به نام او

ریاضی مهندسی

جلسه یازدهم، ۹۱/۱۲/۲۱

روش دالامبر به عنوان مثالی از روش مشخصه ها:

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=F(u_x,u_y,u,x,y)$$ شبه خطی

Type		Defining Condition	Example in Sec. 12.1
Hyperbolic	هذلولوی	$AC-B^2<0$	Wave equation (1)
Parabolic	سهموی	$AC-B^2=0$	Heat equation (2)
Elliptic	بیضوی	$AC-B^2>0$	Laplace equation (3)

براساس نوع معادله می توان معادله را به معادله ای نرمال تبدیل کرد. برای این تبدیل ابتدا ODE زیر را باید حل کنیم:

$$Ay'^2-2By'+C=0 \qquad y'=\frac{dy}{dx}$$

فرض کنید جواب های معادلهٔ بالا به صورت $\phi(x,y)=cte$ و $\psi(x,y)=cte$ باشد. آنگاه برای تبدیل معادله به فرم نرمال از تغییر متغیر جدول صفحهٔ بعد استفاده کنید.

Type	New Variables		Normal Form
Hyperbolic	$v = \Phi$	$w = \Psi$	$u_{vw} = F_1$
Parabolic	$v = x$	$w = \Phi = \Psi$	$u_{ww} = F_2$
Elliptic	$v = \frac{1}{2}(\Phi + \Psi)$	$w = \frac{1}{2i}(\Phi - \Psi)$	$u_{vv} + u_{ww} = F_3$

روش سیستماتیک درآوردن تغییر متغیرها/حل بالا جبر معادلهٔ مرجع.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad y = ct \qquad \Rightarrow u_{tt} = c^2 u_{yy}$$

$$\Rightarrow c^2(u_{yy} - u_{xx}) = 0 \Rightarrow u_{yy} - u_{xx} = 0 \Rightarrow$$ معادلهٔ هذلولوی

$$-1 \times y'^2 + 1 = 0 \Rightarrow y'^2 - 1 = 0 \Rightarrow (y'-1)(y'+1) = 0$$

$$\underbrace{y - x}_{\phi(x,y)} = cte \;,\; \underbrace{y + x}_{\psi(x,y)} = cte \qquad \Rightarrow v = \underbrace{y - x}_{ct - x} \;,\; w = \underbrace{x + y}_{ct + x}$$

معادلهٔ حرارت روی میلهٔ نامتناهی:

$$u_t = c^2 u_{xx} \qquad u(x,0)=f(x)$$

$$X(x)\,T'(t) = c^2 X''(x)\,T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{c^2 T(t)} = \lambda$$

اگر $\lambda > 0$ باشد جواب ویژه به صورت $h(x)\times e^{c\sqrt{\lambda}t}$ که به لحاظ فیزیک به خاطر جملهٔ نمایی نسبت به t (با نمای مثبت) غیرقابل قبول است.

$$X(x) = a\cos kx + b\sin kx \qquad -k^2 = \lambda < 0$$

$$T(t) = e^{-k^2c^2t}$$

$$u_k(x,t) = (a_k\cos kx + b_k\sin kx)\,e^{-k^2c^2t} \qquad k>0$$

$$u(x,t) = \int_0^\infty (a_k\cos kx + b_k\sin kx)\,e^{-k^2c^2t}\,dk$$

$$f(x) = u(x,0) = \int_0^\infty a_k\cos kx + b_k\sin kx\,dk$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\cos kv\, dv \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\sin kv\, dv$$

$$\Rightarrow u(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\cos kv\cos kx + f(v)\sin kv\sin kx\, dv\, dk$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\cos(kv-kx)\, dv\, dk$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\cos(kv-kx)\, e^{-c^2k^2t}\, dv\, dk$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\int_0^{\infty}\cos(kv-kx)\, e^{-c^2k^2t}\, dk\, dv$$

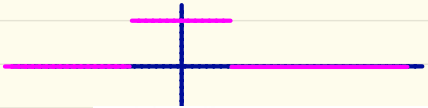
$$\int_0^{\infty} e^{-s^2}\cos 2bs\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2} \qquad s = ck\sqrt{t} \Rightarrow ds = c\sqrt{t}\, dk$$

$$2bck\sqrt{t} = 2bs = k(v-x) \Rightarrow b = \frac{v-x}{2c\sqrt{t}}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\frac{1}{c\sqrt{t}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\left(\frac{v-x}{2c\sqrt{t}}\right)^2} dv = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\exp-\left(\frac{v-x}{2c\sqrt{t}}\right)^2 dv$$

مثال: توزیع اولیه

$$f(x) = \begin{cases} u_0 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$



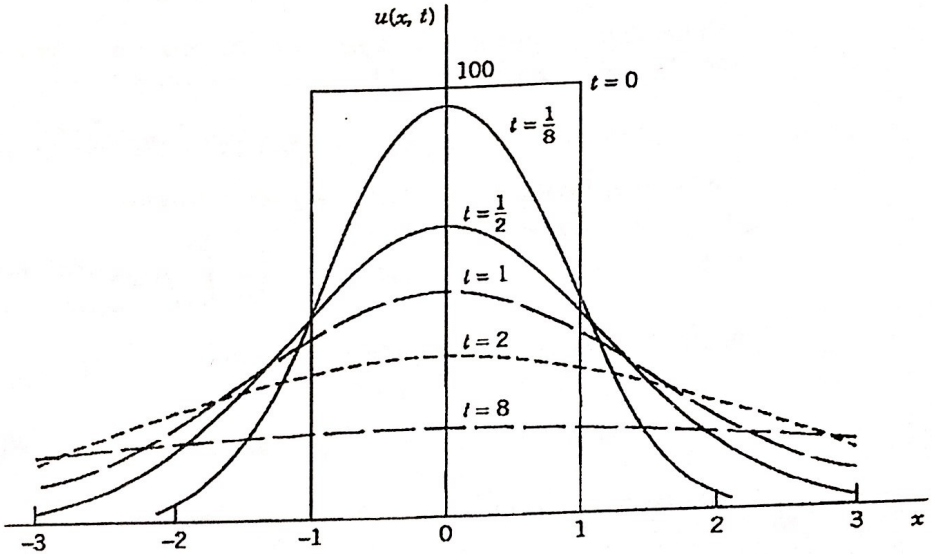


Fig. 296. Solution $u(x, t)$ in Example 1 for $U_0 = 100°C$, $c^2 = 1\ cm^2/sec$, and several values of t

حل مثال معادلهٔ حرارت در میلهٔ نامتناهی با توزیع حرارت اولیهٔ داده شده در مثال قبل:

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

نسبت به متغیر x تبدیل فوریه می‌گیریم $\hat{u} = \mathcal{F}(u)_x$

$$\mathcal{F}(u_t) = c^2 \mathcal{F}(u_{xx}) = c^2(-w^2)\mathcal{F}(u) = -c^2 w^2 \hat{u}$$

$$\hat{u}_t \Rightarrow \hat{u}_t = -c^2 w^2 \hat{u} \Rightarrow \hat{u} = C(w)\, e^{-c^2 w^2 t}$$

$$t=0 \Rightarrow \hat{f}(w) = C(w) \Rightarrow \hat{u}(w,t) = \hat{f}(w)\, e^{-c^2 w^2 t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w)\, e^{-c^2 w^2 t}\, e^{+ixw}\, dw$$