به نام او

ریاضی مهندسی

جلسه شانزدهم، ۹۲/۱/۳۱

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$$

روابط کوشی-ریمان در مختصات قطبی.

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta$$

$$v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$$

تعریف: دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ را مزدوج هارمونیک گوییم هرگاه تابع مختلط $f(x+iy) = u + iv$ تابعی مشتق پذیر باشد.

تابع حقیقی $u(x,y)$ می تواند قسمت حقیقی یک تابع مختلط مشتق پذیر باشد اگر و فقط اگر تابعی همدیس هارمونیک باشد.

مثال: تابع $u(x,y) = x^2 - y^2 - y$ را در نظر بگیرید. این تابع تابعی هارمونیک است. زیرا

$$u_x = 2x \Rightarrow u_{xx} = 2 \qquad u_y = -2y - 1 \Rightarrow u_{yy} = -2$$

$$\Rightarrow \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

تابع $v(x,y)$ را به گونه‌ای بیابید که $u+iv$ تابع مختلط مشتق‌پذیر باشد.

$$u_x = v_y \Rightarrow v_y = 2x \Rightarrow v = 2xy + c(x)$$

$$u_y = -v_x \Rightarrow v_x = -u_y = 2y+1 \xRightarrow{\text{جایگذاری}} 2y + c'(x) = 2y+1$$

$$\Rightarrow c(x) = x + c_1$$

بنابراین هر تابع $v(x,y) = 2xy + x + c_1$ که c_1 ثابتی حقیقی است می‌تواند مزدوج هارمونیکی برای u باشد.

چند مثال از توابع مختلط

تابع نمایی: تابع نمایی تابعی است که نقطه $z = x+iy$ را به نقطه $e^x(\cos y + i\sin y)$ می‌فرستد و آن را با e^z یا $\exp(z)$ نمایش می‌دهیم.

اگر $y=0$ باشد به وضوح $e^z = e^x$. به وسیله روابط کوشی ریمان به راحتی می‌توان نشان داد که e^z با تعریف فوق تابعی مشتق‌پذیر است.

$u = e^x \cos y \qquad v = e^x \sin y$

$u_x = e^x \cos y = v_y \qquad u_y = -e^x \sin y = -v_x$

مشتق e^z برابر است با $(e^z)' = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$

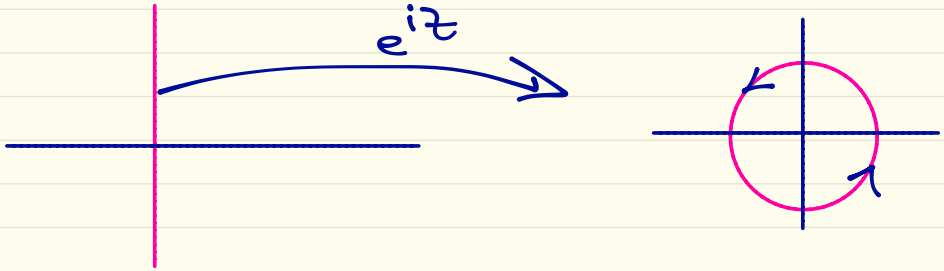
خواص تابع نمایی:

$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

$\Rightarrow |e^{i\theta}|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$e^0 = 1 \qquad e^{i\pi/2} = i \qquad e^{i\pi} = -1 \qquad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \qquad e^{2\pi i} = 1$



- e^z تابعی $2\pi i$ متناوب است. یعنی $e^z = e^{z+2\pi i}$

$$e^{x+iy+2\pi i} = e^x(\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)) = e^z$$

- e^z هیچ‌گاه مختلط ندارد

$$|e^z| = |e^x(\cos y+i\sin y)| = |e^x|\underbrace{|e^{iy}|}_{1} = e^x > 0$$

$$|e^z| = e^x \qquad \arg e^z = y+2n\pi$$

توابع مثلثاتی:

$$x\in\mathbb{R} \quad e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x \qquad \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \sin x$$

توابع $\cos$ و $\sin$ برای اعداد مختلط به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

تابع e^z تابعی تام است. یعنی در تمام صفحه مختلط تعریف شده و مشتق‌پذیر است. بنابراین $\sin z$

و $\cos z$ نیز توابعی تام هستند.

نکته: مشتق مختلط نسبت به چهار عمل اصلی و ترکیب مشابه مشتق حقیقی عمل می‌کند.

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad (fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \qquad (f \circ g)' = f'(g) \times g'$$

و مشتق $\cos$ و $\sin$ نیز در روابط شناخته شده این توابع صدق می‌کند.

$$\cos' z = -\sin z \quad , \quad \sin' z = \cos z$$

تعریف:

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

$$tg' z = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z$$

توابع هذلولوی:

$$\sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

$$\sinh' z = \cosh z \qquad \cosh' z = \sinh z$$

قسمت حقیقی و مختلط توابع مثلثاتی

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

مثال: معادلهٔ روبرو را حل کنید

$$\cos z = 4$$

$$\Rightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 4 \Rightarrow e^{iz}+e^{-iz} = 8 \xRightarrow{\times e^{iz}} e^{2iz} - 8e^{iz} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{iz} = 4 \pm \sqrt{16-1} \Rightarrow e^{ix-y} = 4 \pm \sqrt{15}$$

$$e^{-y}(\cos x + i \sin x) = 4 \pm \sqrt{15} \Rightarrow e^{-y}\cos x = 4 \pm \sqrt{15}$$

$$e^{-y}\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\Rightarrow e^{-y}(-1)^{k} = 4 \pm \sqrt{15} \xRightarrow{k \text{ زوج}} y = -\ln(4 \pm \sqrt{15})$$

$$\Rightarrow z = 2k\pi - i\ln(4 \pm \sqrt{15})$$

نکته: مثلاً به حالت حقیقی می‌توان دید توابع مثلثاتی 2π متناوب هستند. همچنین توابع هذلولوی $2\pi i$ متناوب هستند.

مثال: $\sin z = 0 \Leftarrow z = k\pi$ ، که k عدد صحیح است.

نکته آخر:

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = i\sin z$$

تابع لگاریتم.

$\ln z$ را دوست داریم به صورت وارون e^z عمل کند.

$$\ln z = w \Rightarrow e^w = z = x+iy$$

$$w = u+iv \Rightarrow x = e^u\cos v \quad , \quad y = e^u\sin v$$

$$\Rightarrow e^{2u}(\cos^2 v + \sin^2 v) = x^2+y^2 \Rightarrow u = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \ln(|z|)$$

$$\Rightarrow x = e^{u}\cos v \Rightarrow \cos v = \frac{x}{|z|} \qquad \sin v = \frac{y}{|z|}$$

$$\Rightarrow v = \arg z$$

$$\Rightarrow \ln(z) = \ln(|z|) + i \arg z$$

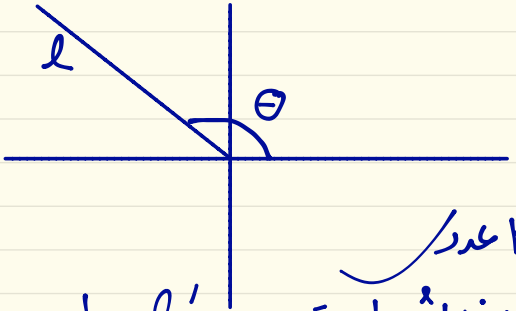
$$\mathrm{Ln}(z) = \ln(|z|) + i\,\mathrm{Arg}\, z$$

$$-\pi < \operatorname{im} \mathrm{Ln}(z) \leq \pi$$

$\ln z$ تابعی تام نیست. حتی اگر از $z=0$ بگذریم نیز $\mathrm{Ln}\, z$ تابعی مشتق‌پذیر در $\mathbb{C}-\{0\}$ نیست.

زیرا $\mathrm{Arg}\, z$ در قسمت منفی محور حقیقی ناپیوسته است.

$\ln z$ با انتخاب برد $\arg z$ به صورت تابعی مشتق‌پذیر در $\mathbb{C}-\{\mathbb{R}_{\leq 0}\}$ می‌آید و $\ln' z = \frac{1}{z}$



فرض کنید l نیم خطی باشد که از مبدأ شروع می‌شود و زاویه θ با قسمت مثبت محور حقیقی دارد.

با فرض $2(k-1)\pi+\theta < \arg z < 2k\pi+\theta$ که k عددی صحیح است، $\ln z$ روی $\mathbb{C}-l$ تعریف شده است و $\frac{1}{z}=\ln' z$

تعریف توان مختلط:

$$c^z := (\exp(z\ln c))^z = e^{z\ln c}$$

$e^{z\operatorname{Ln} c}$: مقدار اصلی c^z

بنابراین c^z نیز در حالت کلی چند مقداره است. به عنوان مثال قبلاً دیده‌ایم اگر $z=\frac{1}{n}$ باشد c^z n مقداره است.

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i(\frac{i\pi}{2}+2k\pi i)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

مقدار اصلی $e^{-\pi/2} = i^i$