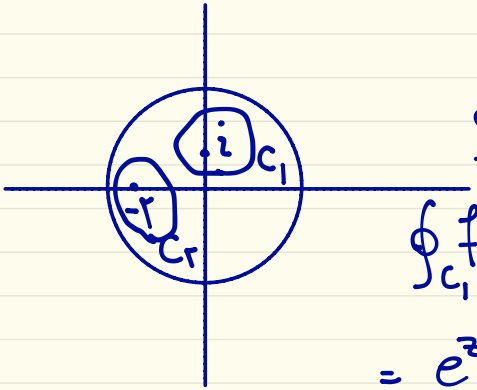
به نام او

ریاضی مهندسی

جلسه بیستم، ۹۲/۲/۱۴

مثال: $\oint_C \underbrace{\frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)^2}}_{f(z)} dz$ را محاسبه کنید که در آن C دایره به شعاع ۳ حول مبدأ است.



$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint \frac{e^z/(z+2)^2}{(z-i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{e^z}{(z+2)^2}\right)'\Big|_i$$

$$= \frac{e^z(z+2)^2 - 2(z+2)e^z}{(z+2)^4}\Big|_i$$

$$\oint_{C_2} f(z)dz = \oint_{C_2} \frac{e^z/(z-i)^2}{(z+2)^2} dz = 2\pi i\left(\frac{e^z}{(z-i)^2}\right)'\Big|_{-2}$$

نابرابری کوشی:

$$|f^n(z_0)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz\right|$$

فرض کنید C دایره به شعاع r حول z_0 باشد و M کران $|f(z)|$ روی C باشد. طبق نابرابری ML داریم:

نابرابر کوشی:

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{2\pi} 2\pi r \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{n!\,M}{r^n}$$

قضیهٔ لیوویل: هر تابع تام کران دار حتماً ثابت است!

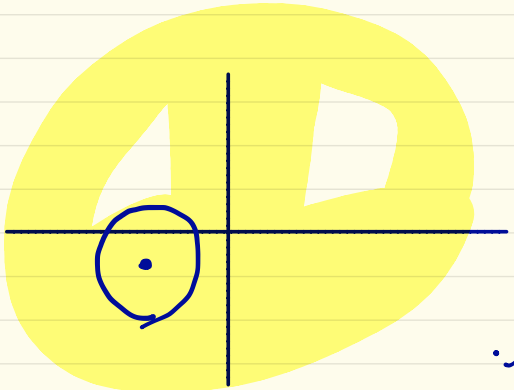
فرض کنید M کران $|f(z)|$ در $\mathbb{C}$ باشد. طبق نابرابری کوشی داریم که به ازای هر $r>0$ و هر $z\in\mathbb{C}$

$$|f'(z)| \le \frac{M}{r^1}\times 1! = \frac{M}{r} \Rightarrow |f'(z)| = 0 \Rightarrow f'(z) = 0$$

نکته: طبق قضیهٔ انتگرال کوشی اگر g تابعی تحلیلی باشد، g' نیز تحلیلی است

قضیهٔ مورِرا: اگر f تابعی پیوسته در دامنهٔ همبند ساده D باشد که برای هر خم ساده بستهٔ C $\oint_C f(z)dz$ برابر صفر باشد، f تابعی تحلیلی است.

اثبات. طبق فرض قضیه تابع $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ که z_0 نقطه ای دلخواه در D است وجود دارد و به راحتی می توان دید $F'(z)=f(z)$. بنابراین F تحلیلی است و طبق نتیجهٔ بالا $f=F'$ نیز تحلیلی است.

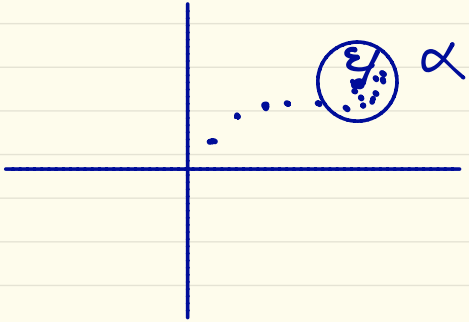


سری توانی مختلط:

فرض کنید $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از نقاط مختلط باشد.

می‌گوییم دنباله z_n به مقدار α همگرا است و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ یا $z_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon>0$ حقیقی $N>0$ وجود داشته باشد که

$$\forall n>N \qquad |z_n-\alpha|<\varepsilon$$



مثال: دنباله $\frac{(i)^n}{n}$ دنباله‌ای همگرا به صفر است.

مثال: i^n دنباله‌ای واگرا است.

قضیه: دنباله $\{z_n\}$ به α همگرا است اگر و فقط اگر دنباله مقادیر حقیقی و موهومی z_n به مقادیر حقیقی و موهومی α همگرا باشد. زیرا اگر قرار دهیم

$$z_n = x_n + i y_n$$

$$\alpha = \beta + i\gamma$$

داریم

$$z_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \iff \left(x_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta ,\ y_n \xrightarrow{n\to\infty} \gamma \right)$$

$$|z_n - \alpha|^2 = |(x_n-\beta) + i(y_n-\gamma)|^2 = (x_n-\beta)^2 + (y_n-\gamma)^2$$

سری مختلط: فرض کنید دنباله $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ داده شده باشد. n-امین مجموع جزئی این دنباله برابر است با

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$$

و سری z_n ها را همگرا گوییم اگر و فقط اگر دنباله S_n به S همگرا باشد و در این شرایط می‌نویسیم

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

S به

قضیه: سری $\{z_n\}$ همگراست اگر و فقط اگر سری قسمت حقیقی z_n ها و قسمت موهومی z_n ها به قسمت حقیقی و موهومی S همگرا باشند

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\, z_k + i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\, z_k$$

نکته: اگر سری z_n ها همگرا به S باشد، آنگاه دنباله z_n ها همگرا به صفر است.

اثبات: $\lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists N>0 \ \forall n>N \ |S_n - S| < \varepsilon/2$

$$\Rightarrow |z_n - 0| = |z_n| = |S_n - S_{n-1}| \le |S_n - S| + |S_{n-1} - S| \underset{n>N+1}{<} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

نتیجه: اگر دنباله z_n ها به صفر همگرا نباشد آنگاه سری z_n ها واگراست.

گوییم سری z_n ها به طور مطلق همگراست اگر سری $|z_n|$ ها همگرا باشد.

قضیه: همگرا $\Longrightarrow$ به طور مطلق همگرایی

مثال نقض $\Longleftarrow$: $\frac{(-1)^n}{n}$

اگر سری z_n ها به S همگرا باشد $R_n = S - S_n$ را n-امین باقیماندهٔ سری گوییم. در این شرایط

دنباله R_n ها همواره به صفر همگراست.

قضیه: سری z_n ها همگراست اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon>0$، $N>0$ وجود داشته باشد که به ازای هر $n>N$ و هر $k>0$ داشته باشیم:

$$|S_{n+k}-S_n|<\varepsilon \iff |z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+k}|<\varepsilon$$

اثبات: فرض کنید سری z_n ها همگرا باشد. در نتیجه به ازای هر $\varepsilon>0$، $N>0$ وجود دارد که برای $n>N$

$$|S_n-S|<\varepsilon/2$$

$$\xRightarrow[\forall k>0]{\forall n>N} |S_{n+k}-S_n|\le|S_{n+k}-S|+|S_n-S|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

اثبات طرف دیگر را می‌پذیریم! (بدون اثبات)

اثبات "به طور مطلق همگرایی $\Leftarrow$ همگرایی"

طبق قضیه قبل کافی است نشان دهیم $\forall\varepsilon>0$ و $\exists N>0$ $\forall n>N, \forall k>0$ $|S_{n+k}-S_n|<\varepsilon$

فرض کنید T_n مجموع های جزئی سری $|z_n|$ باشد. از همگرایی مطلق سری داریم

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N>0 \ \forall n>N \ \forall k>0 \quad |T_{n+k}-T_n|<\varepsilon$

$$|S_{n+k}-S_n| = |z_{n+1}+\cdots+z_{n+k}| \le |z_{n+1}|+|z_{n+2}|+\cdots+|z_{n+k}| = T_{n+k}-T_n<\varepsilon$$

$$T_{n+k} = |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_{n+k}|$$

$$T_n = |z_1|+\cdots+|z_n|$$

در نتیجه سری z_nها همگراست.

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ همگراست اگر $|q|<1$.

$$S_n = q+q^2+\cdots+q^n \Rightarrow qS_n-S_n = q^{n+1}-q$$

$$\Rightarrow S_n = (q^{n+1}-q)/(q-1) \Rightarrow \begin{array}{ll} |q|<1 & \text{همگرا} \\ |q|>1 & \text{واگرا} \end{array}$$

$|q|=1$? $\Rightarrow$ واگرا