به نام او

ریاضی مهندسی

جلسه بیست ودوم، ۹۲/۲/۲۱

جمع و ضرب سری‌های توانی:

$f(z)=\sum a_i z^i \quad g(z)=\sum b_i z^i$

فرض کنید شعاع همگرایی هر دو سری حداقل R باشد.

$$f(z)\pm g(z)=\sum (a_i \pm b_i) z^i \longrightarrow$$ حداقل شعاع همگرایی R

$$f(z)g(z)=\sum_i c_i z^i \longrightarrow$$ حداقل R

$$c_i=\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$$

مشتق و انتگرال جمله به جمله

$$f(z)=\sum a_i z^i \xrightarrow{\text{مشتق جمله به جمله}} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال جمله به جمله}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1} + c$$

اگر شعاع همگرایی $f(z)$ برابر R باشد آنگاه شعاع همگرایی سری مشتق و انتگرال جمله به جمله نیز دقیقاً برابر R است.

$$\left|\frac{n a_n}{n-1\, a_{n-1}}\right| \qquad \limsup \sqrt[n]{(n+1)a_{n+1}}$$

$$=\underbrace{\lim \sqrt[n]{(n+1)}}_{1} \limsup \sqrt[n]{a_{n+1}} = \limsup \sqrt[n]{a_n}$$

قضیه: فرض کنید تابع $f(z)=\sum a_n z^n$ با شعاع همگرایی $R>0$ داده شده باشد. به ازای هر نقطه z که $|z|<R$ داریم:

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = g(z)$$

و شعاع همگرایی f' برابر R است.

نتیجه: اگر تابع f در توانی حول یک نقطه با شعاع مثبت داشته باشد، f تابعی تحلیلی است.

نتیجه ۲: حکم مشابه برای انتگرال به راحتی از قضیه به دست می‌آید.

اثبات: $|z|<R$ و فرض کنید Δz به گونه‌ای باشد که $|z+\Delta z|<R$. برای این کار کافی است $|\Delta z|<R-|z|$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\left((z+\Delta z)^n-z^n\right)}{\Delta z}-n a_n z^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{n z^{n-1}\Delta z+\Delta z^2(\cdots)}{\Delta z}\right)-n a_n z^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta z\,(\underline{\cdots}) \xrightarrow{\Delta z\to 0} 0$$

نکته: اگر $f(z)=\sum a_n z^n$ با شعاع همگرایی $R>0$، f تحلیلی است و

$$a_0=f(0),\quad a_1=f'(0),\quad a_2=\frac{f''(0)}{2!}\ \cdots\quad a_n=f^{(n)}(0)/n!$$

سری تیلور و سری مک لورن

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

$$(*)$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}dz^*$$

اگر سری تیلور را حول نقطه $z_0=0$ بنویسیم به آن سری مک لورن می‌گوییم

$$f(z)=f(z_0)+\frac{z-z_0}{1!}f'(z_0)+\cdots+\frac{(z-z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0)+R_n(z)$$

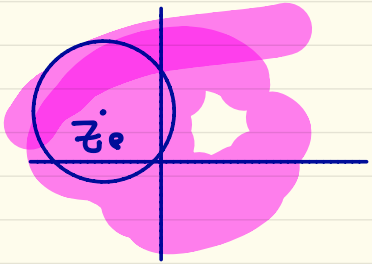
$$(**)$$

$$R_n(z)=\frac{(z-z_0)^{n+1}}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}(z^*-z)}dz^*$$

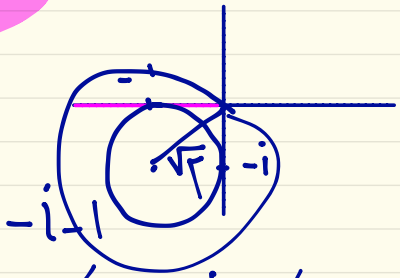
قضیهٔ تیلور: فرض کنید f تابعی تحلیلی روی دامنهٔ D باشد و فرض کنید z_0 نقطه‌ای از D باشد آنگاه دقیقاً یک سری تیلور با مرکز z_0 برای f وجود دارد که ضرایب آن از رابطهٔ $(*)$ داده می‌شود. این نمایش در بزرگترین گوی باز که به طور کامل درون D قرار می‌گیرد معتبر است. به طور دقیق‌تر در بزرگترین گوی حول z_0 که f در آن تحلیلی است معتبر است. همچنین رابطهٔ $(**)$ برقرار است و ضرایب

a_n در نامساوی $|a_n| \le M/r^n$ که M ماکزیمم $|z|$ روی دایرهٔ $|z-z_0|=r$

صدق می‌کند به شرط این که این دایره و درونش به طور کامل در D قرار گیرد.



$\operatorname{Ln} z$

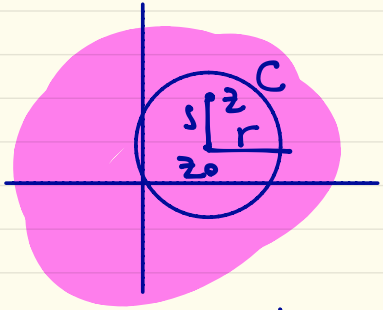


اثبات: طبق رابطهٔ انتگرال کوشی داریم: اگر z درون دایرهٔ C باشد که C و درونش به طور کامل در D قرار دارد، داریم.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{z^*-z}\,dz^*$$

$$\frac{1}{z^*-z}=\frac{1}{z^*-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{(z^*-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right)}$$

$$\left|\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right|<1$$



$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{q^{n+1}}{1-q}$$

$$\frac{1}{z^*-z}=\frac{1}{z^*-z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{z^*-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right)^n\right)$$

$$+\frac{1}{z^*-z_0}\times\left(\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right)^{n+1}\Big/\left(1-\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right)$$

$$=\frac{1}{z^*-z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{z^*-z_0}+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right)^{n+1}\right)+\frac{1}{z^*-z}\left(\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{z^*-z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{z^*-z_0}+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right)^n\right)+\frac{f(z^*)}{z^*-z}\left(\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right)^{n+1}dz^*$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi i}(z-z_0)^k \underbrace{\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{k+1}}}_{f^{(k)}(z_0)/k!} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}(z-z_0)^{n+1}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z)(z^*-z_0)^{n+1}}dz^*}_{R_n(z)}$$

ادعا: $R_n(z) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. برای باقیمانده به فرض اینکه C دایره $|z^*-z_0|=r$ باشد و $|z-z_0|=s<r$ داریم

$$|R_n(z)| \le 2\pi r\,\frac{1}{2\pi}\underbrace{|z-z_0|}_{s}^{n+1}\frac{M}{(r-s)\,r^{n+1}} = \underbrace{\frac{Ms}{r-s}}_{\text{ثابت}} \times \frac{s^n}{r^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

قضیه: یک سری توانی با شعاع همگرایی مثبت، سری تیلور تابع نظیر آن سری توانی است.

$$f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$$

سری‌های تیلور خاص:

$$\frac{1}{1-z} = \sum z^n$$

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\Rightarrow \cos z = \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad \sin z = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \sinh z = \sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cosh z = \sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

$$\frac{1}{1+z^2} \quad , \quad w = -z^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \dots = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$$