به نام او

ریاضی مهندسی

جلسه ششم، ۹۱/۱۲/۵

قضیه انتگرال فوریه:

فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی باشد که

۱. روی هر بازهٔ متناهی قطعه قطعه پیوسته باشد.

۲. حدّ چپ و راست هر نقطه موجود باشد

۳. f به طور مطلق انتگرال پذیر باشد $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<\infty$

آنگاه انتگرال فوریه در نقاط پیوستگی به مقدار تابع و در نقاط ناپیوستگی به میانگین حد چپ و راست همگراست.

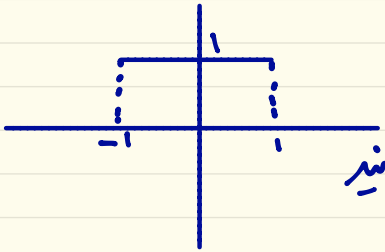
$$f(x)=\int_0^{\infty} A(w)\cos wx+B(w)\sin wx\,dw$$

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos wt\,dt$$

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin wt\,dt$$

مثال: فرض کنید

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$



انتگرال فوریهٔ f را حساب کنید

حل:

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos wx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1 f(x)\cos wx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos wx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left.\frac{\sin wx}{w}\right|_0^1=\frac{2}{\pi}\frac{\sin w}{w}$$

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin wx\,dx=0$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos wx\,\frac{\sin w}{w}\,dw$$

$$Si(u)=\int_0^u \frac{\sin w}{w}\,dw$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos wx\,\frac{\sin w}{w}\,dw=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 1/2 & |x|=1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

$$x=0\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\sin w}{w}\,dw=\frac{\pi}{2}$$

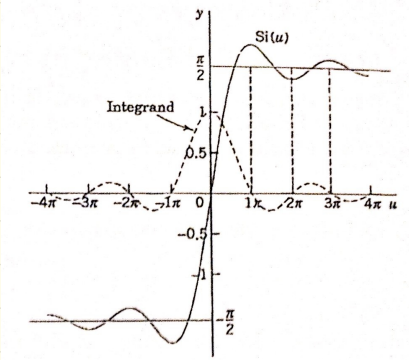


Fig. 279. Sine integral Si(u) and integrand

نمودار $\frac{\sin w}{w}$ و $Si(w)$

سری فوریه:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

تخمین f:

$$f(x)\approx \sum_{n=0}^{K} a_n \cos nx+\sum_{n=1}^{K} b_n \sin nx$$

انتگرال فوریه

$$f(x)=\int_0^{\infty} A(w)\cos wx+B(w)\sin wx\,dw$$

تخمین f:

$$f(x)\approx \int_0^{a} A(w)\cos wx+B(w)\sin wx\,dw$$

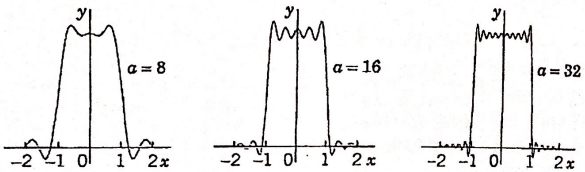


Fig. 280. The integral (9) for $a = 8$, 16, and 32

انتگرال فوریه کسینوسی و سینوسی

f: زوج $\Rightarrow B(\omega)=0$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega x\, f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\omega x\, f(x)\,dx$$

$$f=\int_{0}^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,d\omega$$

f: فرد $\Rightarrow A(\omega)=0$

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\omega x\, f(x)\,dx$$

$$f=\int_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\,d\omega$$

مثال: انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی $f(x)=e^{-kx}$ که $k>0$ ثابت است و $f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$ را حساب کنید.

حل: انتگرال فوریه کسینوسی:

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kx}\cos\omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[e^{-kx}\frac{\sin\omega x}{\omega} + \frac{k}{\omega}\int e^{-kx}\sin\omega x\right]_0^\infty$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{k}{\omega}\left[-\frac{\cos\omega x}{\omega}e^{-kx} - \frac{k}{\omega}\underbrace{\int e^{-kx}\cos\omega x\,dx}_{A(\omega)}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{2}{\pi}\times\frac{+k}{\omega^2} - \frac{k^2}{\omega^2}A(\omega) \Rightarrow A(\omega) = +\frac{2}{\pi}\frac{k}{\omega^2+k^2}$$

$$\Rightarrow e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{k}{\omega^2+k^2}\cos\omega x\,d\omega$$ انتگرال لاپلاس

انتگرال فوریه سینوسی

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega x}{k^2+\omega^2}\, d\omega \qquad k, x > 0$$

تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی

f: زوج $\Rightarrow f(x) = \int_0^\infty A(\omega) \cos \omega x \, d\omega$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx$$

$$\underset{\cos}{\hat{f}_c(\omega)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx$$

$$f = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(\omega) \cos \omega x \, d\omega$$

f: فرد : $f(x) = \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega x \, d\omega$, $B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x) \sin \omega x \, dx$

$$\underset{\sin}{\hat{f}_s(\omega)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x) \sin \omega x \, dx$$

$$f = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

$$\mathcal{F}_c(f) = \hat{f}_c \qquad \mathcal{F}_s(f) = \hat{f}_s$$

ویژگی های تبدیل فوریهٔ سینوسی و کسینوسی

۱- F_c و F_s تبدیل هایی خطی هستند.

برای a و b ثابت به شرط تعریف سمت راست.

$$F_c(af+bg)=aF_c(f)+bF_c(g)$$

$$F_s(af+bg)=aF_s(f)+bF_s(g)$$

۲- اگر علاوه بر شرایط تعریف انتگرال فوریه $f'(x)$ نیز در هر بازه قطعه قطعه پیوسته باشد و $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ آنگاه

a) $F_c[f'(x)]=\omega F_s[f(x)]-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$

b) $F_s[f'(x)]=-\omega F_c[f(x)]$