# معرفی درس

**اصول سیستمهای کامپیوتری**

**جلسه دوم: جبر بول**
**(Boolean Algebra)**

- فهرست مطالب:
  - عملوندهای جبر بول
  - توابع بول
  - پیاده سازی یک تابع بول با دروازه های منطقی
  - دوگان یک تابع
  - جدول کارنو
  - حالات بدون تفاوت (Don't Care)

این جلسه مطابق با بخش ۱-۳ و ۱-۴ از کتاب مانو است



# جبر بول

- جبر بول (Boolean Algebra)

در جبر بول هر متغیر فقط دو مقدار درست (TRUE) یا غلط (FALSE) را دارد.
مقدار درست را با یک و مقدار غلط را با صفر نشان می دهند

- عملگرهای اصلی جبر بول (Boolean Operators)

سه عملگر اصلی جبر بول عبارتند از:

AND
OR
NOT

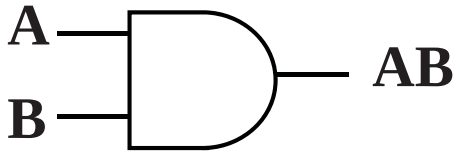
# AND

- عملگر "و" (AND)

خروجی تابع "و" مقدار درست دارد اگر هر دو عملوند آن درست باشند

| A | B | AB |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

شکل دروازه منطقی AND (AND gate)





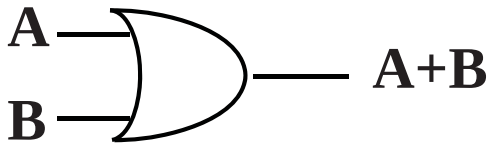

# OR

- عملگر "یا" (OR)

خروجی تابع "یا" مقدار درست دارد اگر حداقل یکی از دو عملوند آن درست باشند

| A | B | A+B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

شکل دروازه منطقی OR (OR Gate)



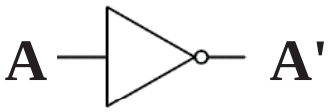
# NOT

- عملگر " مکمل" (NOT)

خروجی تابع "مکمل" معکوس ورودی آن می‌باشد

| A | A' |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

شکل دروازه( منطقی NOT Gate NOT)






# تابع بول (Boolean Function)

- **تابع بول**

یک تابع بول با استفاده از متغیرها و عملگرهای منطقی و پرانتز نوشته می‌شود

مثال:

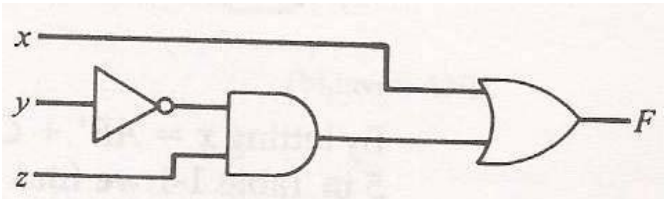
$$F = x + y' z$$

تابع F برابر ۱ است اگر x مقدار ۱ داشته باشد یا y برابر صفر و z برابر یک باشد

نمایش تابع با جدول درستی

| x | y | z | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

نمایش تابع با دروازه های منطقی



# اتحادهای اصلی جبر بول

| | |
|---|---|
| (1) $x + 0 = x$ | (2) $x \cdot 0 = 0$ |
| (3) $x + 1 = 1$ | (4) $x \cdot 1 = x$ |
| (5) $x + x = x$ | (6) $x \cdot x = x$ |
| (7) $x + x' = 1$ | (8) $x \cdot x' = 0$ |
| (9) $x + y = y + x$ | (10) $xy = yx$ |
| (11) $x + (y + z) = (x + y) + z$ | (12) $x(yz) = (xy)z$ |
| (13) $x(y + z) = xy + xz$ | (14) $x + yz = (x + y)(x + z)$ |
| (15) $(x + y)' = x'y'$ | (16) $(xy)' = x' + y'$ |
| (17) $(x')' = x$ | |



# دوگان یک تابع (Duality)

اگر در یک تابع تمام AND ها به OR

تمام OR ها به AND

تمام یک ها به صفر

و تمام صفر ها به یک

تبدیل شوند، دوگان آن تابع به دست می آید

اگر یک تابع درست باشد، دوگان آن نیز درست است

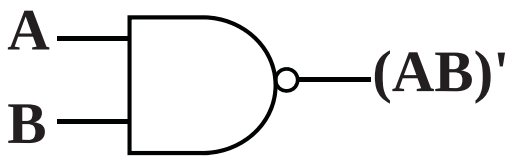
# NAND

اگر خروجی دروازه AND مکمل شود، دروازه NAND بدست می آید

مزیت NAND این است که تمام مدارات منطقی را می توان با NAND ساخت

| A | B | (AB)' |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

شکل دروازه منطقی NAND (NAND gate)





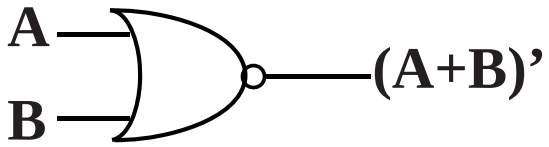

# NOR

اگر خروجی دروازه OR مکمل شود، دروازه NOR بدست می آید

مزیت NOR این است که تمام مدارات منطقی را می توان با NORساخت

| A | B | (A+B)' |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

شکل دروازه منطقی NOR (NOR gate)



# ساده سازی عبارات بول

برای ساده سازی عبارات جبر بول از جدول کارنو (Karnaugh Map) استفاده می شود

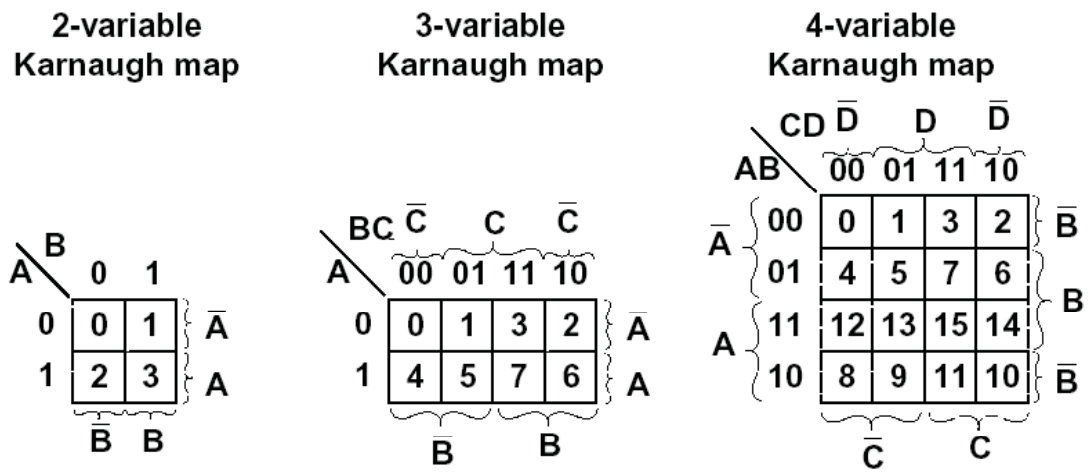
در جدول کارنو هر خانه معادل یک مینترم می باشد

هر سطر جدول درستی یا به عبارت دیگر هر ترکیب متغیرها را یک مینترم می نامند

در جدول کارنو، هر خانه با خانه همسایه آن در مکمل بودن یک متغیر اختلاف دارد



# جدول کارنو ۲ متغیره



# مثال: جدول کارنو ۲ متغیره

2-variable
Karnaugh map

| A \ B | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

$F = AB$



# مثال: جدول کارنو ۳ متغیره

3-variable
Karnaugh map

| A \ BC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

$F = AB + C$

# مثال: جدول کارنو ۴ متغیره

4-variable
Karnaugh map

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 0 |

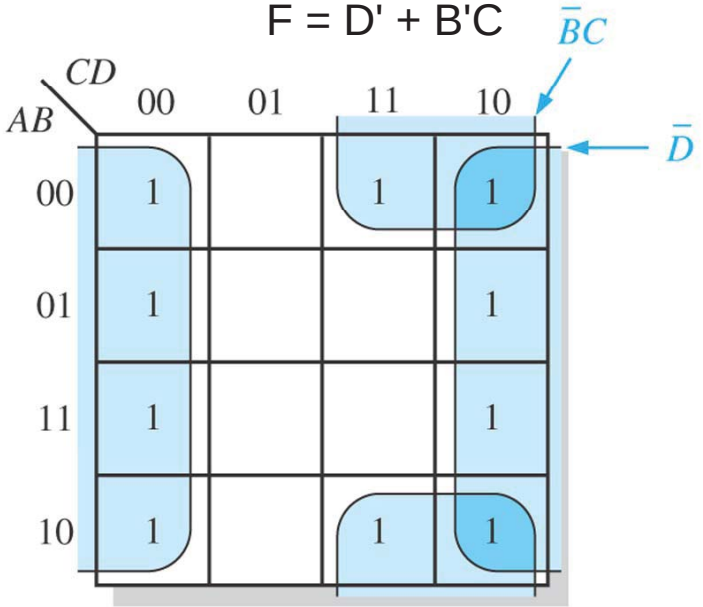
$$F = AB + \bar{C}D$$



# مثال: جدول کارنو ۴ متغیره

F(A, B, C, D) = Σ ( 0, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 14)

F = D' + B'C



# حاصل ضرب حاصل جمع‌ها (POS)

می توان یک تابع جبر بول را به صورت حاصل ضرب حاصل جمع‌ها نوشت

POS = Product Of Sum

در این حالت در جدول کارنو، صفرها ترکیب می شوند



# مثال برای حاصل ضرب حاصل جمع‌ها (POS)

$$F(A, B, C) = \Sigma ( 0, ۱, 4, 6, ۷)$$
$$=\Pi(2, 3, 5)$$

$$F = (A + B' ) ( A ' + B + C ' )$$

| A \ BC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

# حالات بدون تفاوت

- حالات بدون تفاوت (Don’t Care) حالاتی است که در آن حالت، یک یا صفر بودن خروجی مدار اهمیت ندارد یا اینکه آن حالت، احتمال وقوع ندارد
- حالات بدون اهمیت را با X در جدول کارنو نمایش می دهیم



# مثال – حالات بدون تفاوت

$$F(A,B,C,D)=\sum m(2,3,4,6,11,12)+d(10,13,14)$$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | X | 0 | X |
| 10 | 0 | 0 | 1 | X |

$$F=B\overline{D}+\overline{B}C$$

# خودآزمایی

## ۱- کنکور کارشناسی ارشد - ۱۳۷۹

۹- برای تابع بولی ۵ متغیرهٔ زیر ساده‌ترین صورت حاصل جمع حاصلضربها کدام است؟

$$F(A,B,C,D,E) = \sum(0,3,8,14,15,16,18,24,26,27,29) \text{ و } d(6,7,9,19,22)$$

۱) $\bar{C}\bar{D}\bar{E}+A\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}E+ABCD\bar{E}$

۲) $\bar{A}CD+\bar{C}\bar{D}E+\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}DE+ABC\bar{D}E$

۳) $\bar{A}CD+\bar{C}\bar{D}\bar{E}+A\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}\bar{C}E+ABCD\bar{E}$

۴) $\bar{A}CD+A\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{E}+ABCD\bar{E}+\bar{C}\bar{D}E$

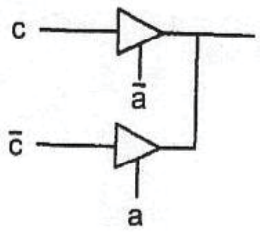


# خودآزمایی

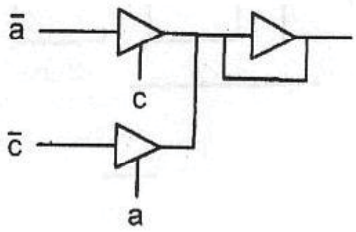
## ۲- کنکور کارشناسی ارشد - ۱۳۸۰

۱۲- کدامیک از مدارهای زیر، تابع $(a \oplus c) + \bar{a}bcd$ را پیاده‌سازی می‌نماید؟

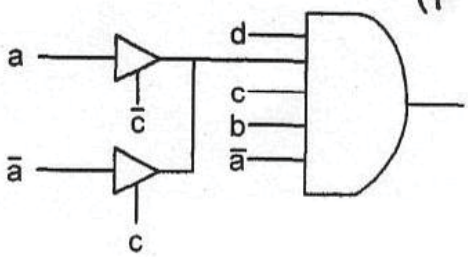
۱)



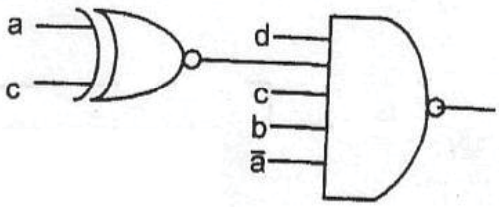

۲)




۳)




۴)



# خودآزمایی

۳- کنکور کارشناسی ارشد – ۱۳۸۵

- در SOPداده شده زیر کدام Product Termها حتما می بایست در حل مدار شامل شود؟ ( Essential Prime Implicantهستند)

$W(a,b,c,d)=\sum m(4,6,7,8,9,11,14,15)$

- 1) $bc,\ ab\bar{d},\ ab\bar{d}$
- 2) $bc,\ ab\bar{c},\ acd$
- 3) $bc,\ ab\bar{c},\ a\bar{b}d$
- 4) $bc,\ ab\bar{c},\ ab\bar{d},\ ab\bar{d}$

۶۳- در SOP داده شده زیر کدام Product Term ها حتماً می‌بایست در حل مدار شامل شود؟

$W(a,b,c,d) = \sum m$ (۴ ,۶ ,۷ ,۸ ,۹ ,۱۱ ,۱۴ , ۱۵ )

۱) $bc,\ a\bar{b}d,\ a\bar{b}\bar{d}$ ۲) $bc,\ a\bar{b}\bar{c},\ acd$ ۳) $bc,\ a\bar{b}\bar{c},\ \bar{a}b\bar{d}$ ۴) $bc,\ a\bar{b}\bar{c},\ a\bar{b}\bar{d},\ a\bar{b}d$



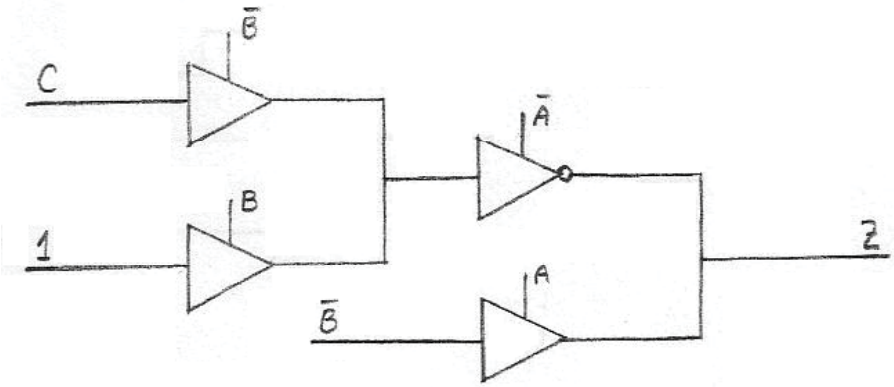
# خودآزمایی

۴- کنکور کارشناسی ارشد – ۱۳۸۵

۶۴- کدام گزینه تابع خروجی مدار شکل مقابل را نمایش می‌دهد؟

۱) $z = 1$

۲) $z = A + \bar{B}\bar{C}$

۳) $z = \bar{A}B + BC$

۴) $z = A\bar{B} + B\bar{C}$