الکترومغناطیس 1

۹۲ پائیز — دکتر بهمن آبادی

ساعت ۱۲-۱۰

ntes milford → فصل ۸-۷ — syllabus

raymond

Griffits

Jacson → الکترو ۳

ابزار الکترو بردارات — بزرگ‌تر از اسکالر و بردار هستند تانسورها هستند — بعضی‌ها

قرارداد انیشتین

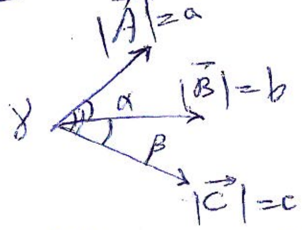
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = \sum_i A_i B_i = A_i B_i$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\,\hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A} = \vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$$

حجم متوازی السطوح

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$



$$|\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}|^2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{A}\cdot\vec{A} & \vec{A}\cdot\vec{B} & \cdot \\ \vec{B}\cdot\vec{A} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\alpha & ac\cos\beta \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

از طریق هندسی بدست آوردن حجم حاصل از این ۳ بردار خیلی دشوار است اما از طریق روش بالا خیلی ساده می‌شود.

تقسیم در یک شرایط خاص برای بردارها نیز انجام می‌شود

$$\frac{\vec{A}}{\alpha}$$

$$\frac{\vec{A}}{\vec{B}} \longrightarrow$$ اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هم راستا باشند

معادلات

$$\vec{A}\cdot\vec{X} = C \qquad \vec{X} = \underbrace{\frac{C\,\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}}}_{\text{یک عدد}} + \vec{B} \rightarrow \vec{A}$$ عمود بر

برای این چنین معادلاتی جواب‌های منحصر به فرد ندارد

معادلات برداری →

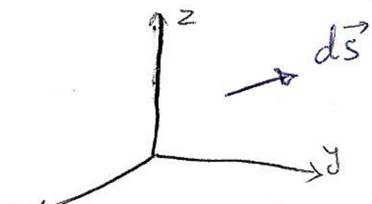
$$\vec{A}\times\vec{X} = \vec{C} \qquad \vec{X} = \frac{\vec{C}\times\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}} + k\vec{A}$$

جواب منحصر به فرد ندارد

$$\begin{cases} \vec{A}\cdot\vec{X} = C \\ \vec{A}\times\vec{B} = \vec{C} \end{cases} \longrightarrow \boxed{\vec{X} = \frac{C\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}} + \frac{\vec{C}\times\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}}}$$

مشتق‌گیری هم از اسکالر گرفته می‌شود هم از بردار

مشتق جهتی آهنگ تغییرات یک تابع اسکالر در یک جهت خاص



$$\frac{d\varphi}{ds}$$

در یک راستای خاص تغییرات تابع φ (پتانسیل) چگونه است

آهنگ تغییرات تابع φ در راستای $S(s)$

$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x,y,z)}{\Delta s}$$

مشتق جهتی

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

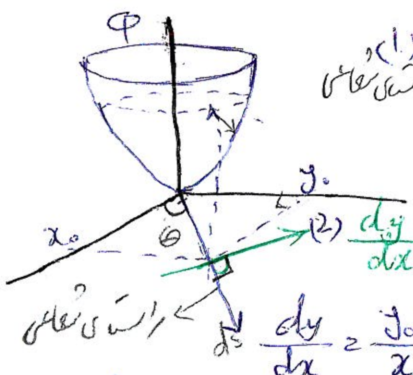
سطح کره $4\pi r^2$ — محیط دایره $2\pi r$

حجم کره $\frac{4}{3}\pi r^3$ — مساحت دایره πr^2

نویسنده: آزاده پاکزاد

$\varphi = \varphi(x, y) = x^2 + y^2$

از این نقطه در راستای خاص حرکت کنیم می‌خواهیم بدانیم تغییرات φ چطور است



(1) راستای شعاعی

$$\frac{d\varphi}{ds} = (2x_0)\frac{dx}{ds} + 2y_0\frac{dy}{ds} = \left(2x_0 + 2y_0\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{ds}$$

$$= \left(2x_0 + 2y_0\frac{y_0}{x_0}\right)\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{2}{x_0}\left(x_0^2 + y_0^2\right)\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2}}$$

$$= 2\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

(2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x_0}{y_0}$

$ds \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y_0}{x_0} = \tan\theta$

$$(2)\ \left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{(2)} = 2x_0\frac{dx}{ds} + 2y_0\frac{dy}{ds} = 2\left(x_0 + y_0\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{ds} = 2(x_0 - x_0)\frac{dx}{ds} = 0$$

تغییرات φ اگر در راستای مماس حرکت کنیم صفر است.

راستای دلخواه $\quad \frac{dy}{dx} = \alpha \quad \left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{\alpha} = 2\left(x_0 + y_0\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{ds} = 2(x_0 + y_0\alpha)\left(1+\alpha^2\right)^{-1/2} = \beta$

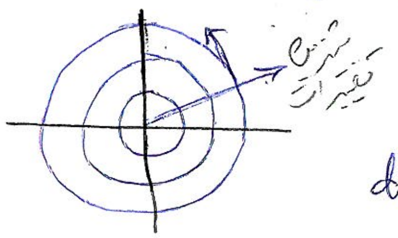
تغییرات φ در چه راستایی Max است؟
در راستای شعاعی است
اگر در راستای مماس حرکت کنیم
هیچ تغییری نداریم

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = 2y_0\left(1+\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}} - 2(x_0 + y_0\alpha)\left(1+\alpha^2\right)^{-3/2}\alpha = 0$$

$y_0 = x_0\alpha$

$$= \frac{2y_0\left(1+\alpha^2\right) - 2(x_0 + y_0\alpha)\alpha}{\left(1+\alpha^2\right)^{3/2}} = 0 \longrightarrow \alpha = \frac{y_0}{x_0}$$

مشتق جهتی ما را به سمت تعریف کمیت شیب یا گرادیان می‌برد



$$\frac{d\varphi}{ds} = \vec{\nabla}\varphi \cdot \frac{d\vec{s}}{ds} \qquad \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}$$

$$= |\vec{\nabla}\varphi|\cos\theta$$

$d\vec{s} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

گرادیان برداری است که اندازه آن برابر با Max مشتق جهتی φ است

زاویه بین $\nabla\varphi$ و ds

جهت گرادیان در همان راستایی که $\frac{d\varphi}{ds}$ بیشینه است (در راستای شیب). گرادیان در اینجا عمود بر سطح هم تراز (ثابت) است

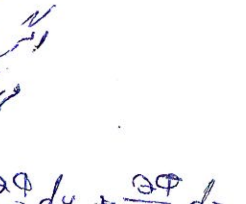
اگر $d\vec{s}$ را در یک دستگاه مختصات داشته باشیم به راحتی می‌توانیم ∇ را مشخص کنیم

$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{s}$

دکارتی: $d\vec{s} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k} \qquad d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}$$

در دستگاه مختصات کروی:



$(r, \theta, \vec{\Phi})$ زاویه

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi}d\Phi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{s}$$

طول جابجایی

$$d\vec{s} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\Phi\,\hat{\Phi}$$

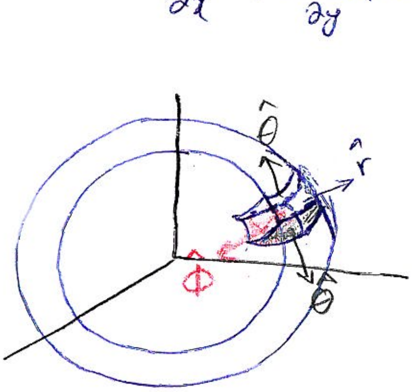
$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\Phi}\hat{\Phi}$$

طول جابجایی که در راستای r، θ و Φ داریم

حال باید $\nabla\varphi$ را طوری بدست آوریم که
$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{s}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}\left\{\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta y\Delta x\Delta z + \frac{\partial F_z}{\partial z}\Delta z\Delta x\Delta y\right\}$$

$$= \frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$



$V = r^2\sin\theta\,\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi$ حجم در مختصات کروی

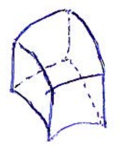
$\hat{r} \longrightarrow da = r^2\sin\theta\,\Delta\theta\Delta\varphi$ ← در راستای $\hat{r}$

$\hat{\theta} \longrightarrow da = r\sin\theta\,\Delta\varphi\,\Delta r$ ← $\hat{\theta}$ 〃

$\hat{\varphi} \longrightarrow da = r\Delta\theta\Delta r$ ← $\hat{\varphi}$ 〃

جلسه ۲

$\hat{r},\ \hat{\theta},\ \hat{\varphi}$ مختصات کروی



$$\left.\begin{aligned}&\cancel{F_r r^2\sin\theta}\quad \frac{\partial}{\partial r}\left(F_r r^2\sin\theta\right)\Delta\theta\Delta\varphi\Delta r\\ &\frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_\theta\, r\sin\theta\right)\Delta\theta\Delta r\Delta\varphi\\ &\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F_\varphi r\right)\Delta\varphi\Delta\theta\Delta r\end{aligned}\right\} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{r^2\sin\theta\Delta\theta\Delta r\Delta\varphi}\oint \vec{F}\cdot n\,d\vec{a}$$

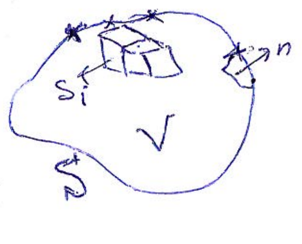
$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(F_r r^2\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_\theta\sin\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(F_\varphi\right)$$

قضیه دیورژانس (گاوس)

سایر مهم در الکترو مغناطیس

$$\boxed{\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV = \oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,da}$$

حجم V توسط سطح S در برگرفته شده



می‌توانیم دیورژانس را در عنصرهای مختلف در نقطه به نقطه داخل این حجم تقسیم و بعد در المان حجم ضرب کنیم =

$\oint \vec{F}\cdot n\,da$

F را روی نقاط سطح S در نظر بگیریم F را در مساحت عناصر سطح ضرب نقطه‌ای کنیم و جمع بزنیم روی کل سطح

تعریف هندسی دیورژانس

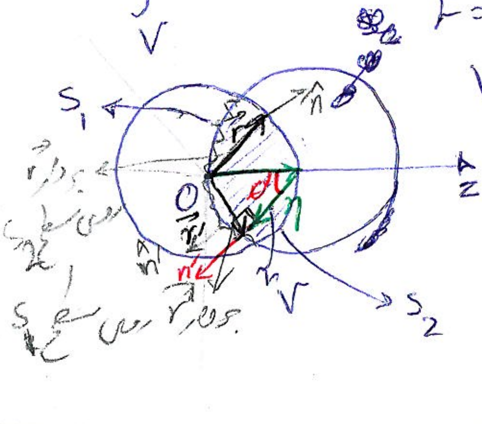
$$\oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\vec{a} = \sum_i \oint_{S_i} F\cdot n\,da = \lim_{\Delta V_i\to 0}\sum_i\left\{\frac{1}{\Delta V_i}\oint_{S_i}\vec{F}\cdot\hat{n}\,da\right\}\Delta V_i = \lim_{\Delta V_i\to 0}\sum_i \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,\Delta V_i$$

$$= \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV$$

مثال: حجم ناحیه مشترک را حساب کنیم
دو کره مشابه اند

$\vec{F} = \vec{r} \qquad \nabla\cdot\vec{r} = 3$

به صورت یک بردار ما در نظر می‌گیریم که بتوانیم از آن دیورژانس بگیریم



$$V = \int_V dV = \frac{1}{3}\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{r}\,dV$$

$$= \frac{1}{3}\oint_S \vec{r}\cdot\hat{n}\,d\vec{a} = \frac{1}{3}\left\{\int_{S_1}\vec{r}'\cdot\hat{n}'\,da + \int_{S_2}\vec{r}\cdot\hat{n}\,da\right\}$$

$$\vec{r}' = \vec{R}+\vec{\eta} = R\hat{k}+\vec{\eta}$$

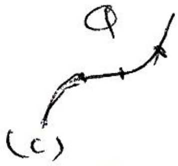
(r, φ, z)

در مختصات استوانه ای به همین شکل روش است

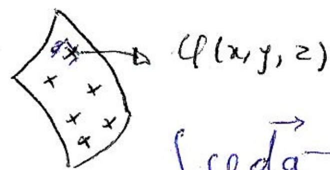
می توانیم مشتقات بردارها را هم در یک راستای خاص بدست آوریم که لازم است هم اندازه بردار و هم جهت بردار را در نظر بگیریم
فقط باید خود بردار یکه ای که وجود دارد را در نظر بگیریم که اگر آن بردار ثابت باشد تغییرات نداریم
1:10 اگر این بردارها ثابت نباشند باید مشتقات آنها را نیز لحاظ کنیم

انتگرال گیری از بردارها یا اسکالرها در امتدادها یا سطوح یا حجم مشخص می شود مثلاً ممکن است در فضا میدان اسکالر داشته باشیم
بخواهیم میدان اسکالر را در نقاط مشخص یا خطوط مشخص بدست آوریم

انتگرال



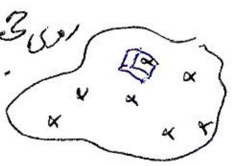
روی سطح



$$\vec{A} = \int_{(c)} \varphi\, d\vec{l} \quad \text{یا} \quad A = \int_{(c)} \varphi\, dl$$

$$\int_S \varphi\, d\vec{a}$$ → برای da یک اندازه و یک جهت در نظر می گیریم

روی حجم



$$\int_V \varphi\, dV$$

مقدار φ در □ بدست می آوریم در حجم ضرب می کنیم و در روی کل حجم انتگرال می گیریم

☑ اگر تابع برداری باشد:

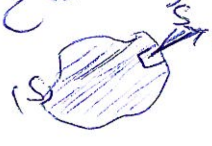
انتگرال روی طول $\int \vec{F}\cdot d\vec{s}$

مقدار $\vec{F}$ را در جهت ... داریم

روی مسیر بسته

$$\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

روی سطح



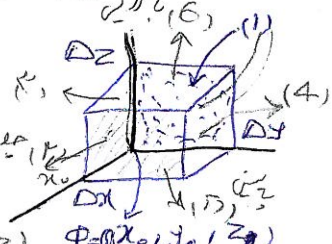
$$\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{a} = \oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\, da$$

روی حجم

مقدار حجم را در المان حجم ... می کنیم

$$\int_V \vec{F}\, dv$$

در الکترومغناطیس دیورژانس خیلی مهم است



$V = \Delta z \Delta y \Delta x$

φ را روی سطح انتگرال بگیریم

تعریف ابتدایی هندسی

$$\boxed{\nabla\varphi = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \varphi\, d\vec{a}}$$

$\varphi = \varphi(x_0+\Delta x, y, z)$ $\quad$ $\varphi = \varphi(x_0, y_0, z_0)$

جلویی در جهت $\hat{i}$

عقبی در جهت $-\hat{i}$

$$\varphi(x_0+\Delta x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x$$

☑ دیورژانس

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\, da}$$

$F_x = F(x_0, y, z)$ برای سطح اول $\quad$ جهت $-\hat{i}$

برای سطح (۲) $F_x = F_x(x_0+\Delta x, y, z) = F(x_0, y, z) + \frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x$ $\quad$ جهت $\hat{i}$

(۳) $F_y = F_y(x, y_0, z)$ $\quad -\hat{j}$ $\quad dx\,dz$

(۴) $F_y = F_y(x, y_0+\Delta y, z) = F_y(x, y_0, z) + \frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta y$ $\quad \hat{j}$ $\quad dx\,dz$ $\quad$ جهت سطح 4

(۵) F_z

(۶) F_z

$$=\frac{1}{3}\left\{\int_{S_1} R\hat k\cdot\hat n' da' + \int_{S_1} \vec\eta\cdot\hat n' da + \int_{S_2}\vec r\cdot\hat n da\right\}_{S_2}$$

با توجه به اینکه دو کره مشابه اند $\vec r\cdot\hat n$ در انتگرال $\vec\eta\cdot\hat n'$ یکسان هستند

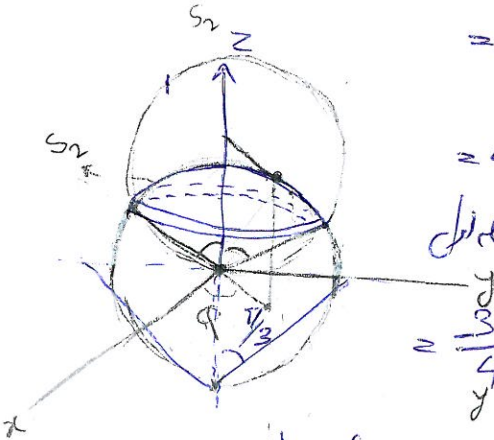
$$=\frac{1}{3}\left\{\int_{S_1} R\hat k\cdot\hat n da + 2\int_{S_2}\vec r\cdot\hat n da\right\}$$

$$\text{جمله} = 2\int r\times r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

بین برای $0<\varphi<2\pi$

رویه نیم دایره است (در صفحه xy قرار دارد) S_1

$$=2R^3\int_0^{\pi/3}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$



$$=4\pi R^3\times\frac{1}{2}=2\pi R^3$$

چون زاویه بین $\hat n', \hat k$ ، $\pi-\theta'$ است

$\cos(\pi-\theta')=-\cos\theta'$

$$\left.\frac{\sin^2\theta'}{2}\right|_0^{\pi/3}$$

$$\text{جمله} = \int R(-\cos\theta')R^2\sin\theta d\theta d\varphi' = -R^3\int_0^{\pi/3}\cos\theta'\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}d\varphi'$$

$$=\frac{3}{4}\pi R^3$$

مولفه های r ، θ و φ مختصات کروی هیچکدام ثابت نیستند

$$\text{حاصل} = \frac{1}{3}\left\{-\frac{3}{4}\pi R^3+2\pi R^3\right\}=\frac{5}{12}\pi R^3 \longrightarrow$$ حجم مشترک دو کره مشابه

کرل VII

تعریف هندسی کرل

$$\vec\nabla\times\vec F=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_{S}\hat n\times\vec F da$$

معادل اند

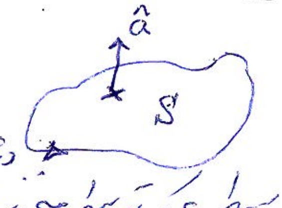
$$\hat a\cdot\vec\nabla\times\vec F=\lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_{(C)}F\cdot d\vec l$$

جهت دلخواه

مولفه $\nabla\times F$ در جهت دلخواه $\hat a$

در نقطه خاص x

جهت $\hat a$ با توجه به راستای $d\vec l$ انتخاب می‌شود



سطح S که توسط منحنی C در بر گرفته شده باشد

$\hat a$ بر سطح عمود است

$$\hat a\cdot\nabla\times\vec F=\hat a\cdot\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\hat n\times\vec F da$$

سطح را به اندازه $\hat a$ جابجا میکنیم یک حجم بدست می‌آید

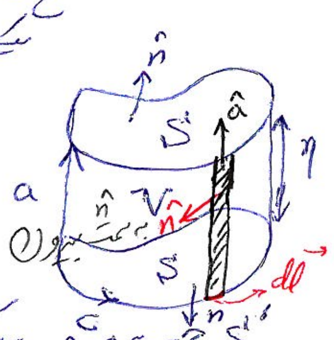
$\hat a$ و $\hat n$ عمود بر هم هستند

$$-\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_{S'}\vec F\cdot\underbrace{(\hat a\times\hat n)da}_{\eta d\vec l}$$

$S\eta < V$

چون $\hat a$ یک بردار واحد ثابت و مشخص است بر S عمود است می‌توان $\hat a$ را داخل انتگرال ببریم؟

$$=\lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_{(C)}\vec F\cdot d\vec l$$



$\eta dl = da$ مساحت

$\hat a\times\hat n$ در راستای $d\vec l$ است

C در بر می‌گیرد ، V حجم ، S' سطح جانبی

در مختصات استوانه‌ای

$$\nabla\times F=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\hat n\times F d\vec a=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)i+\cdots$$

قضیه استوکس

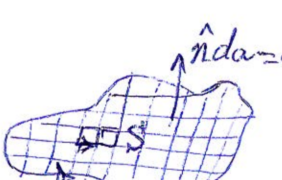
خیلی کاربرد دارد و استفاده میشه

$$\int_{S}\vec\nabla\times\vec F\cdot \underset{\hat n da}{d\vec a}=\oint_{C}\vec F\cdot d\vec l$$

انتگرالهای کرل روی

$$\oint_C\vec F\cdot d\vec l=$$

مجموع انتگرالهای کرل روی سطح های کوچک داخلی گرفته میشود



سطح S که توسط منحنی C دربرگرفته شده باشد

قضیه اول در مختصات کروی در اکثر کتابها موجود است

3

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = \sum_i \oint_{C_i} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$ → معادل با اینکه روی مرزها انتگرال بگیریم

$$= \sum_i \left\{ \frac{1}{\Delta S_i} \oint \vec{F}\cdot d\vec{l} \right\} \Delta S_i = \lim \sum \underbrace{(\hat{n}\cdot \vec{\nabla}\times\vec{F})}_{\lim_{\Delta S_i\to 0} \frac{1}{S}\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}} \Delta S_i$$ ← ضرب *

$\Delta S_i \to 0$

$$= \int_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{a}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\varphi) = \nabla^2\varphi$$ لاپلاسی φ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}+\dots \qquad = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+$$

تمام الکترو به لاپلاسین برمی‌گردد و جواب‌های این معادله قبلا پتانسیل الکتریکی است که می‌خواهیم قوانین را بدست آوردیم. تابع پتانسیل، گرادیان...

$$* \ \vec{\nabla}_r\times(\vec{r}-\vec{r}\,') = 0$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = \phi$$ → بردار صفر

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = \phi$$ اسکالر

$$* \ \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$$ تانسور؟!

مکان ← $\vec{F} = \vec{r}$

اگر F تابع مکان شد ← بردار مکان

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3 \\ \vec{\nabla}\times\vec{r} = \phi \\ \vec{G}\cdot\vec{\nabla}\vec{r} = \vec{G} \\ \nabla^2\vec{r} = \phi \end{cases}$$

بردار دلخواه ← $\vec{G}$

در یک ماتریس واحد اثر کند، بدون تغییر باز می‌گرداند G

$$(G_x\hat{i}+G_y\hat{j}+G_z\hat{k})(\hat{i}\hat{i}+\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k}) = G_x\hat{i}+G_y\hat{j}+G_z\hat{k} = \vec{G}$$

بعضی معادلات مهم $\boxed{\text{/}}$

$$\vec{\nabla}\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})$$ ← ۹ جمله دارد

$$= \hat{i}\hat{i}+\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i}\hat{i} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{j}\hat{j} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{k}\hat{k} \end{pmatrix}$$

ماتریس I

وقتی گرادیان روی بردار (به جای روی اسکالر) اثر کند به آن تانسور می‌گوییم، تانسور ۲

$$(G_x\hat{i})\cdot(\hat{i}\hat{i}) = G_x\hat{i}(\hat{i}\cdot\hat{i}) = G_x\hat{i}$$

$$(G_x\hat{i})\cdot(\hat{j}\hat{j}) = G_x\hat{j}\underbrace{(\hat{i}\cdot\hat{j})}_{0} = 0$$

$$(G_z\hat{k})(\hat{k}\hat{k}) = G_z\hat{k}(\hat{k}\cdot\hat{k}) = G_z\hat{k}$$

بردار مکان.

F تابعی از اندازه بردار $\vec{r}$ باشد

$$\begin{cases}\varphi(r) \\ \vec{F}(r)\end{cases} \Rightarrow * \ \vec{\nabla}\cdot\vec{F}(r) = \frac{\vec{r}}{r}\frac{dF}{dr}$$

لاپلاسی بردار $\vec{r}$ یعنی لاپلاسی مولفه x و y و z بردار $\vec{r}$

$$F(r) = F\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \qquad \frac{\partial F(r)}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial F(r)}{\partial y}\hat{j}+\dots$$

* تابعی از یک جهت خاص در یک راستای مشخص باشد، $\vec{A}$ بردار ثابت

$$\begin{cases}\varphi(\vec{A}\cdot\vec{r}) \\ \vec{F}(\vec{A}\cdot\vec{r})\end{cases} \quad * \ \vec{\nabla} = \vec{A}\frac{d}{d(\vec{A}\cdot\vec{r})} \qquad \frac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{r} = A_x x + A_y y + A_z z)}{\partial x}$$

اثبات:

$$\vec{\nabla}\varphi(\vec{A}\cdot\vec{r}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k} = \frac{\partial\varphi}{\partial(\vec{A}\cdot\vec{r})}\frac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{r})}{\partial x}\hat{i}+\dots$$

$$= \frac{d\varphi}{d(\vec{A}\cdot\vec{r})}A_x\hat{i}+\dots = \vec{A}\frac{d\varphi}{d(\vec{A}\cdot\vec{r})}$$

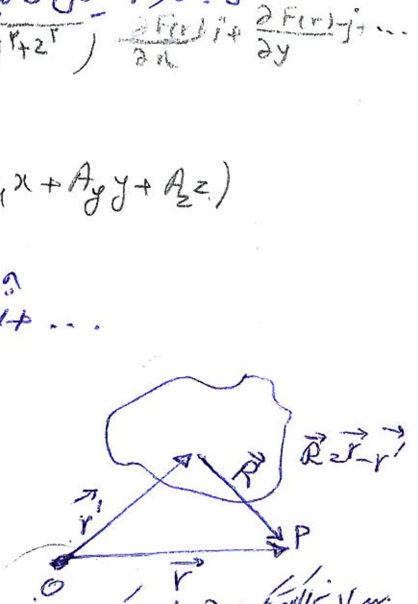
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}$$

$r = (x, y, z)$

$r' = (X, Y, Z)$

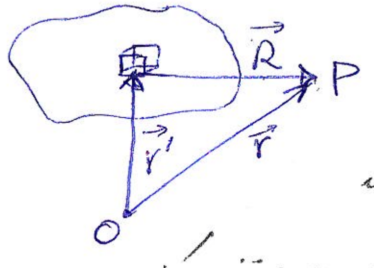
$$\vec{\nabla}_R = -\vec{\nabla}_{r'}$$ ← اگر r fix باشد

$$\vec{\nabla}_r = \vec{\nabla}_R = \frac{\partial}{\partial X}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial Y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial Z}\hat{k}$$ → اگر r' fix باشد



میدان الکتریکی در P را حساب کنیم می‌خواهیم گرادیان r را حساب کنیم

جلسه سوم:



چون میدان‌ها تابعی از $\vec{R}$ هستند که از اشکال‌ها (انتگرال‌ها) مختلفی می‌توانند به خود بگیرند

میدان‌هایی که در الکترو با آنها سروکار داریم میدان‌هایی که از $\vec{r}-\vec{r}'$ هستند

اگر $\vec{r}'$ را fix کنیم و میدان را در نقاط مختلف $\vec{r}$ بخواهیم از ∇_r استفاده می‌کنیم

چون r' fix است ∇_r معادل ∇_R

گرادیان یعنی تغییرات

اگر r را fix کنیم r' می‌تواند تغییر کند پس R می‌تواند تغییر کند

$$\nabla_R = -\nabla_{r'}$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\varphi(\vec{R}) \qquad \vec{F}(\vec{R})$$

$$X = x - x'$$

$$Y = y - y'$$

$$Z = z - z'$$

$$\vec{R} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}_r = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} = \frac{\partial}{\partial X}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial Y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial Z}\hat{k} = \vec{\nabla}_R$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} \quad 1 \leftarrow \text{اگر } r' \text{ ثابت باشد}$$

$$\nabla' = \frac{\partial}{\partial x'}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y'}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z'}\hat{k} = -\nabla_R$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x'} \quad -1 \quad \text{اگر } r \text{ ثابت باشد}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}_{R=r-r'} = -\vec{\nabla}_{r'}}$$

قضیه اول گرین:

$$\boxed{\int_V \left(\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi\cdot\nabla\psi\right)dV = \oint_S \varphi\,\underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial n}}_{\nabla\psi\cdot\hat{n}}\,da}$$

سیاحجم →

سطح و حجم ← قضیه دیورژانس

کنتور (خط) و سطح ← ق استوکس

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \vec{\nabla}\psi\cdot\hat{n}$$

φ و ψ دو میدان اسکالر هستند که تابعیت از x، y و z دارند

در قضیه دیورژانس $\vec{F} = \varphi\vec{\nabla}\psi \Rightarrow \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \int_V \nabla\cdot(\varphi\vec{\nabla}\psi)\,dV = \int_V \big(\nabla\varphi\cdot\nabla\psi + \varphi\overbrace{\nabla\cdot\nabla\psi}^{\nabla^2\psi}\big)\,dV$

$$= \oint_S F\cdot\hat{n}\,da = \oint_S \varphi\,\underbrace{\nabla\psi\cdot\hat{n}}_{\frac{\partial\psi}{\partial n}}\,da$$

∇

تابعی که مشتقش ... یک عدد است در معادله $\nabla^2\psi = $ صدق می‌کند

قضیه دوم گرین:

$$\boxed{\int_V \left(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi\right)dV = \oint_S \underbrace{\left(\psi\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\psi\right)}_{\vec{F}}\cdot d\vec{a}}$$

$$\nabla\cdot F$$

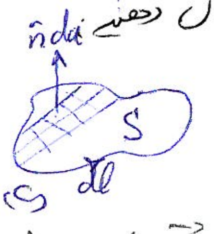
مخصوصاً اگر φ و ψ در معادله لاپلاس صدق کنند $\varphi+\psi$ نیز در معادله لاپلاس صدق می‌کند

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\left(\psi\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\psi\right)$$

$$= \cancel{\nabla\psi\cdot\nabla\varphi} + \psi\nabla^2\varphi - \cancel{\nabla\varphi\cdot\nabla\psi} - \varphi\nabla^2\psi$$

نشان دهید

$$\boxed{\oint_C \varphi\,d\vec{l} = \int_S \hat{n}\times\vec{\nabla}\varphi\,da}$$



$\vec{A}\varphi$

قضیه استوکس $\int_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}$ ق استوکس

$\vec{C}$ یک بردار ثابت دلخواه

$$\vec{C}\cdot\oint_C \varphi\,dl = \oint_C \varphi\vec{C}\cdot d\vec{l} = \int_S \nabla\times(\varphi\vec{C})\cdot\hat{n}\,da$$

$$= \int_S \big(\nabla\varphi\times C + \varphi\,\cancel{\vec{\nabla}\times\vec{C}}\big)\cdot\hat{n}\,da = \int_S (\vec{\nabla}\varphi\times\vec{C})\cdot\hat{n}\,da = \int_S \vec{C}\cdot(\hat{n}\times\vec{\nabla}\varphi)\,da$$

$$= C\cdot\int_S n\times\nabla\varphi\,da$$

C بردار ثابت ← 0

برداری ← اسکالر

$$\nabla\cdot(f\vec{V}) = \nabla f\cdot V + f\nabla\cdot V$$

$$\nabla\times(fV) = \nabla f\times V + f\nabla\times V$$

$$\int_V \vec{\nabla}\varphi \, dV = \oint_S \varphi \, \hat{n} \, da$$

$$\int_V \vec{\nabla}\times\vec{F} \, dV = \oint_S \hat{n}\times\vec{F} \, da$$

$$\int_V \big(\overbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}) + (\vec{G}\cdot\vec{\nabla})\vec{F}}^{\text{یک بردار}}\big) dV = \oint_S \vec{F}(\vec{G}\cdot\hat{n})\, da \qquad (\vec{G}\cdot\vec{\nabla})\vec{F} \longrightarrow \vec{G}\cdot\vec{\nabla}\vec{f}$$

$$(G\cdot\nabla)F = \left(G_x \frac{\partial}{\partial x} + G_y \frac{\partial}{\partial y} + G_z \frac{\partial}{\partial z}\right)(F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k})$$

اگر یک محیطی (الکتروستاتیک) شامل بار باشد پتانسیل الکتریکی در هر نقطه ای که بار ~~نباشد~~ (در آن) $\overset{x}{P}$

تابع (میدان اسکالر) پتانسیل در آن نقطه در $\nabla^2\varphi = 0$ صدق می کند (از فضا)

حل معادله لاپلاس برای ما مهم است چون پتانسیل در آن صدق می کند.

میدان $\longrightarrow$ پتانسیل

$$G\cdot\nabla = \dots = G_x \frac{\partial}{\partial x}(F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) + G_y \frac{\partial}{\partial y}(F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) + G_z \frac{\partial}{\partial z}(F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k})$$

$$= G_x \frac{\partial F_x}{\partial x}\hat{i} + G_x \frac{\partial F_y}{\partial x}\hat{j} + G_x \frac{\partial F_z}{\partial x}\hat{k} + G_y \frac{\partial F_x}{\partial y}\hat{i} + G_y \frac{\partial F_y}{\partial y}\hat{j} + \dots + G_z \frac{\partial F_x}{\partial z}\hat{i} + G_z \frac{\partial F_y}{\partial z}\hat{j} + \dots$$

$$\vec{A}\vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k})(B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$
$$= A_x B_x \hat{i}\hat{i} + A_x B_y \hat{i}\hat{j} + A_x B_z \hat{i}\hat{k} + \dots$$

تانسور مرتبه ۲ $N = 3$ بعد فضا

دو بردار که کنار یکدیگر قرار بگیرند یک تانسور تشکیل می دهند

شبیه یک ماتریس است که ۹ عنصر دارد (و روی هم اثر کنند)

ضریب گذردهی خلاء ε در واقع یک تانسور است که ۹ مؤلفه دارد

جوابهای معادله لاپلاس $\nabla^2\varphi = 0$

در مختصات دکارتی $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

قضیه اول: اگر N تابع ~~(میدان)~~ (پتانسیل) $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ داشته باشیم که در معادله لاپلاس صدق کنند تابع

C_i ها ثابت اند

$$\Phi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \dots + C_N\varphi_N = \sum_{i=1}^{N} C_i\varphi_i$$

در معادله لاپلاس صدق خواهد کرد.

$$\nabla^2\Phi = \dots = \sum_i C_i \nabla^2\varphi_i = 0$$

اگر چند پتانسیل داشته باشیم که در معادله لاپلاس صدق کنند و بتوانیم ترکیبی از آنها را تنظیم کنیم که شرایط مرزی را ارضا کند جواب معادله لاپلاس را پیدا کرده اید

قضیه یکتایی: اگر φ_1 و φ_2 در معادله لاپلاس صدق کنند و هر دو (تابع) شرایط مرزی را نیز ارضا کنند، آنگاه یا φ_1 همان φ_2 است یا تنها در یک ثابت با هم متفاوتند $\varphi_1 = \varphi_2 + C$

φ_1 همان مقداری را روی مرز داشته باشد که φ_2 دارد

فضای بی نهایت یا محدود

شرطها

1) دیریشله $\varphi_1\big|_{\text{مرزها}} = \varphi_2\big|_{\text{مرزها}}$ $\longrightarrow C = 0$

روی مرزها خود میدان باشد (مشخص)

2) نیومن $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_{\text{مرزها}} = \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_{\text{مرزها}} \Rightarrow C \neq 0$

مشتق جهتی عمود بر سطح

$\nabla\varphi_1\cdot n$ میدان الکتریکی

۳. مانند میدان روی مرز عمود است یا اینکه مشتقات φ_1 و φ_2 مشخص باشد

میدان الکتریکی = مشتق φ

اگر φ ثابت باشه برامون اهمیتی نداره

$$\varphi = \varphi(x, y, z)$$

$$\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$$

اسکالر

$$\Phi \vec{\nabla} \Phi \longrightarrow = \vec{F}$$ یک بردار

اثبات:

اگر φ_1 را پیدا کنیم که در شرایط مرزی صدق کند جواب پتانسیل در این فضا همان φ است. هر پتانسیل دیگری را پیدا کنید جواب باز همان است. پتانسیل باید در تمام فضا درست باشد در هر نقطه پتانسیل همان مقدار را بدهد.

Φ منجر به همان مقادیر مشخص شده بشود.

S شامل S_1، S_2، ... مرزها است

قضیه دیورژانس

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV = \oint_{S_0+S_1+S_2+\dots+S_N} \vec{F}\cdot\hat{n}\, da$$

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{\nabla}\Phi)\, dV = \int_V (\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi + \Phi \cancel{\nabla^2\Phi})\, dV =$$

$$\text{سمت چپ} = \int_V |\vec{\nabla}\Phi|^2 dV$$

$$\text{سمت راست} = \oint_{\text{سطح}} (\Phi\vec{\nabla}\Phi\cdot\hat{n})\, da = 0 \quad \Rightarrow$$

سمت $\Phi = 0$

اگر شرط اول درست باشد φ ها روی سطح هر دو با هم برابرند اگر روی تمام سطوح شرط دیریشله برقرار باشد Φ صفر است.
اگر شرط نیومن درست باشد گرادیان Φ ($\nabla\Phi\cdot n = 0$) صفر است.

انتگرال ده این انتگرال مثبت است و جمع آنها صفر شده پس تک تک آنها صفر است.

$$\Rightarrow \int_V |\vec{\nabla}\Phi|^2 dV = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\Phi = 0}$$

یعنی Φ باید در تمام نقاط فضا ثابت باشد یعنی شیب آن ثابت است

Φ تغییرات ندارد

شرط دیریشله $\Rightarrow \Phi = 0 \longrightarrow$ صفر است Φ چون روی مرز Φ ثابت باید هم صفر باشد $\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

شرط نیومن $\Rightarrow \vec{\nabla}\Phi\cdot\hat{n} = 0 \Rightarrow \Phi$ ثابت است $\Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = C$

نتیجه اخلاقی! اگر یک تابع Φ را بدست آوردید که در معادله لاپلاس صدق کند هر تابع دیگری را که بدست آوردید با این تابع هیچ فرقی ندارد به شرطی که هر شرایط مرزی را ارضا کند.

جلسه چهارم

اگر چند تابع پیدا کنیم که در ∇^2 صدق کند و بتوانیم ضریب آنها را طوری پیدا کنیم که مجموع آنها شرایط مرزی را ارضا کنند یعنی ما توانسته‌ایم جواب را پیدا کنیم به دلیل قضیه یکتایی. اگر جواب مسئله حدس بزنید یا پیدا کنید هر طوری که در معادله لاپلاس صدق کند و شرایط مرزی را ارضا کند آن موقع دیگر جواب را پیدا کرده‌اید هر کار دیگری که بکنید که جواب دیگری را پیدا کنید همین جواب است بعلاوه یک ثابت.

$$\nabla^2\varphi = 0$$

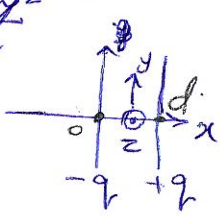
دکارتی: $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \cancel{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}} + \cancel{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}} = 0$

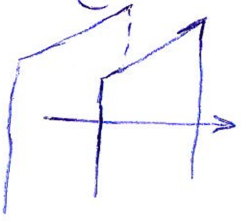
یک بعدی $\longrightarrow$ وقتی φ تابعی از y و z نباشد

مثلا اگر دو صفحه‌ی بی‌نهایت طویل داشته باشید که خازن تشکیل دهند

کره‌ای که بار Q روی آن قرار داده شده است

تابع پتانسیل φ فقط تابعی از r است





فقط در راستای x تغییر پتانسیل

پتانسیل فقط تابعی از x است

در یک بعد $\frac{d^2\varphi}{dx^2}=0 \to \varphi = ax+b$ a و b توسط شرایط مرزی بدست می‌آید

برای پیدا کردن a و b یکبار x را صفر می‌گذاریم و پتانسیل را صفر، یکبار $x=d$ و پتانسیل را V_0 با اختلاف آنها a و b بدست می‌آید

$$\varphi(0)=0=b$$
$$\varphi(d)=V_0=ad+b$$

در مختصات کروی

۱۰:٤

$$\nabla^2\varphi = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)}_{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=0$$

تابع

منظور ϕ مختصات کروی

اگر φ تابعی از r باشد

$$\frac{d}{dr}(r\varphi)=C \Rightarrow \boxed{\varphi = C+\frac{a}{r}}$$

معمولاً در بی‌نهایت پتانسیل را صفر در نظر می‌گیریم مثلاً اگر کره‌ای با شعاع R داشته باشیم

در بی‌نهایت $\varphi = C = 0$

جواب‌های این معادله باید یکتا باشند

معادله لاپلاس معادله‌ای است که اگر ما بتوانیم یک تابع پتانسیل تعیین کنیم که شرایط مرزی را ارضا کند جواب را پیدا کرده‌ایم

هر بلایی که سر φ بیاوریم مهم نیست. جواب به همان وضعیت پیدا شده چون شرایط مرزی را ارضا می‌کند.

۷) حل معادله لاپلاس در مختصات دکارتی

دکارتی $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$

یکی از حالت‌ها برای جواب این است که $\varphi=0$ یک جواب بدیهی است

$$\varphi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

$$Y(y)Z(z)\frac{d^2X}{dx^2}+X(x)Z(z)\frac{d^2Y}{dy^2}+X(x)Y(y)\frac{d^2Z}{dz^2}=0 \xrightarrow{\div XYZ\neq 0}$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=0 \qquad -\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{-\beta^2}+\overbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}^{\alpha^2+\beta^2}=\alpha^2$$

فقط تابعی از x

چون X و Y و Z مستقل از یکدیگرند به این دلیل α^2 می‌گذاریم که α^2 می‌تواند هم حقیقی باشد هم مختلط

شرایط مرزی تعیین می‌کند که $\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$ مثبت باشد

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\alpha^2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-\beta^2$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$$

$$(1) \Rightarrow X=Ae^{+i\alpha x}+Be^{-i\alpha x}=A'\cos\alpha x+B'\sin\alpha x$$

sin سینوسی‌ها رفتار نوسانی نشان می‌دهد

periodic $\leftarrow Y=Ce^{i\beta y}+De^{-i\beta y}=C'\cos\beta y+D'\sin\beta y$

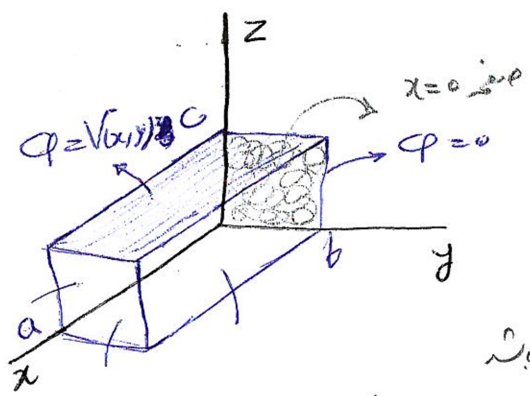
نمایی $\leftarrow Z=Ee^{\gamma z}+Fe^{-\gamma z}=E'\sinh\gamma z+F'\cosh\gamma z$

ضرایب ثابت از شرایط مرزی تعیین می‌شوند α ها هم با شرایط مرزی ارتباط پیدا می‌کنند.

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \qquad \sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

E' و F' را برحسب E و F بنویسیم. α و β و γ به چه صورت به هم ربط دارند

حل کنیم



تابع پتانسیل روی صفحات معین است
همه صفحات به جز صفحه بالا $\varphi=0$ (زمین شده‌اند یعنی پتانسیل صفر)
پتانسیل را داخل جعبه می‌خواهیم بدست آوریم

تابع پتانسیل را وقتی در معادله لاپلاس صدق می‌کند را ... می‌گوییم
در محل هایی هست که بار الکتریکی وجود ندارند وگرنه اصلاً جواب نمی‌تواند باشد
روی سطوح مرزی بار وجود دارد که پتانسیل را در اینجا ثابت می‌کند شرطی وجود ندارد که صفر باشد یا نباشد
پتانسیل را داریم داخل این جعبه (که هیچ باری ندارد) بدست می‌آوریم و این شده که پتانسیل اعمال شده روی مرزها باید پیوسته باشد
ارضا کند

$x=0 \longrightarrow X = A' = 0 \longrightarrow X = B'\sin\alpha x$

$x=0 \quad y=0 \quad z=0 \longrightarrow \varphi = 0$

$Y(y) = \sin\beta y \qquad Z(z) = \sinh\gamma z$

$\sin\alpha x = X(x)$

$x=0$ سطح (صفحه)

$x=a \quad \varphi=0 \longrightarrow \sin\alpha a = 0 \Longrightarrow \alpha a = n\pi \qquad \boxed{\alpha_n = \frac{n\pi}{a}}$

بعضی از n

$Y(y) = \sin\beta y \longrightarrow y=b \quad \sin\beta b = 0 \qquad \boxed{\beta_m = \frac{m\pi}{b}}$

به ازای هر n ای یک ضریب و به ازای هر m ای یک ضریب مخصوص خود را دارد

$Z(z) = \sinh\gamma z \longrightarrow z = c$

طبق فرض اول

$$\varphi = \sum_{n,m} A_{mn} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y \sinh\gamma z$$

پس نهایت جمله می‌توانند باشند
شرایط مرزی $A', B', \ldots, l, l'$
باید دقیقاً تعیین کنند

$$V(x,y) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y \sinh\gamma c$$

توابع Sin و Cos متعامدند (مستقل‌اند)
اگر مخالف باشند (در هم ضرب) حاصل انتگرال صفر می‌شود
اگر یکسان باشند حاصل $\frac{a}{2}$ یا 1 می‌شود

$$\boxed{\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = \frac{a}{2}\delta_{mn}}$$

$n \neq m \longrightarrow 0$

$n = m \longrightarrow a/2$

$$\int_0^a\int_0^b \sin\frac{l\pi}{a}x \sin\frac{l'\pi}{b}y\, V(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^a\int_0^b \sum_{n,m} A_{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{l\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y \sin\frac{l'\pi}{b}y \sinh\gamma c\,dx\,dy$$

$$= \sum_{n,m} A_{nm}\, \frac{a}{2}\delta_{nl} \times \frac{b}{2}\delta_{ml'} \sinh\gamma c = \frac{ab}{4} A_{ll'} \sinh\gamma c$$

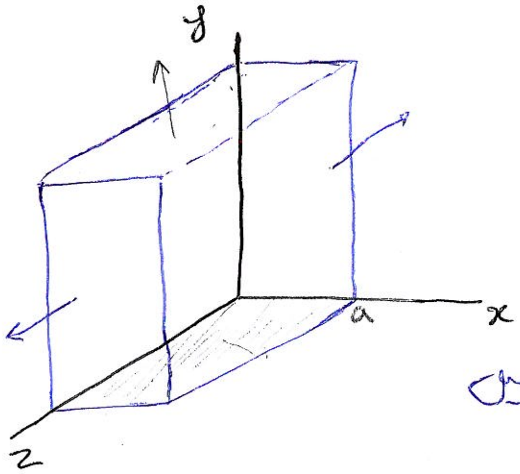
$$\Rightarrow \boxed{A_{ll'} = \frac{4}{ab\sinh\gamma c}\int_0^a\int_0^b \sin\frac{l\pi}{a}x \sin\frac{l'\pi}{b}y\, V(x,y)\,dx\,dy}$$

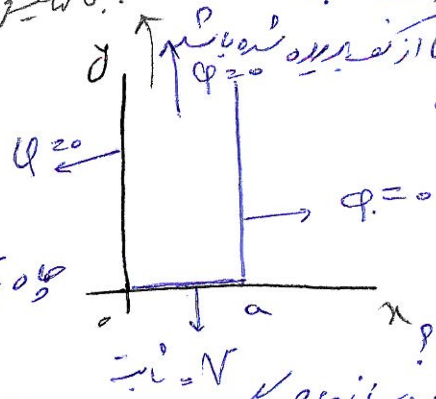
1;22

$$\longrightarrow \varphi = \sum_{l,l'} A_{ll'} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y \sinh\gamma c$$

مثال: چاه پتانسیل

صفحه ای که در امتداد z بی نهایت باشد تابعیت z ندارد
به بی نهایت میره





چاه پتانسیل

y بالا بی نهایت اما از نصف بریده شده باشیم

صفحه خازن ها که از یک طرفش بی نهایت شده

φ دو بعدی است چون به y و x وابسته است

* پتانسیل مرزها چگونه است؟
مرزها را در نظر گرفته ام مثلاً لبه رساناها که مثلاً یک پلاستیک گذاشته ام که مرزها را در نظر بگیریم پتانسیل

$$\nabla^2\varphi = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \qquad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2 \longrightarrow e^{\pm i\alpha x},\ \sin\alpha x,\ \cos\alpha x$$

$$e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \alpha^2 \longrightarrow e^{\pm\alpha y}$$

$$y \to \infty \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow Y = e^{-\alpha y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n y} \sin\frac{n\pi}{a}x = \varphi$$

$$x = 0 \longrightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \sin\alpha x \qquad \sin\alpha x = \mathrm{Im}\, e^{i\alpha x}$$

$$\begin{matrix} y=0 \\ z=0 \end{matrix}\ x = a \longrightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \alpha a = n\pi \longrightarrow \boxed{\alpha_n = \frac{n\pi}{a}} \qquad n\frac{\pi}{a}$$

$$\varphi = \underset{\text{Imaginary}}{\mathrm{Im}} \sum A_n e^{-\alpha_n y} e^{i\alpha_n x} = \mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\alpha_n(x+iy)} \qquad Z = e^{i\frac{\pi}{a}(x+iy)}$$

ادامه حل صفحه بعد

$$\longrightarrow \varphi = \mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty} A_n Z^n$$

جلسه پنجم:

$$* \quad e^{\pm i\alpha x},\ e^{\pm i\beta y},\ e^{\pm\gamma z} \longrightarrow \begin{cases} \sin\alpha x,\ \cos\alpha x \\ \sin\beta y,\ \cos\beta y \\ \sinh\gamma z,\ \cosh\gamma z \end{cases}$$

در جهت x، φ تناوبی باشد

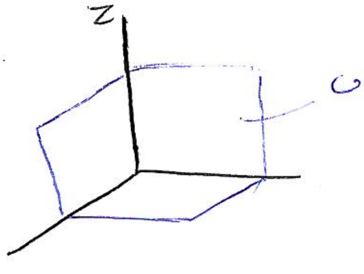
در جهت y، φ تناوبی است

$$\varphi = \sum \left(A_{nm} \sin\alpha_n x \sin\beta_m y \sinh\gamma_{n,m} z + B_{nm} \sin\alpha_n x \sin\beta_m y \cosh\gamma z + \cdots\right)$$

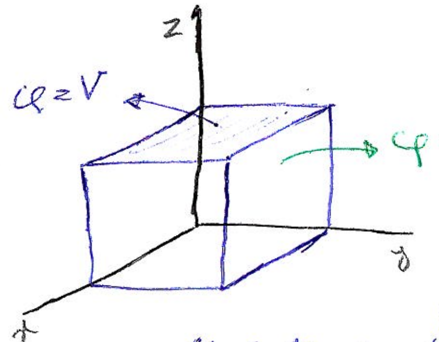
حالت خاص $\alpha = 0 \quad \beta = 0 \longrightarrow \gamma = 0$

$$\left.\begin{matrix} X = ax + b \\ Y = a'y + b' \\ Z = a''z + b'' \end{matrix}\right\} \varphi = XYZ = Ax + By + Cz + Dxy + Exz + Fyz + Gxyz + K \qquad aa'a''$$

در این حالت در هیچ جهتی φ تناوبی نیست



با این شرایط مرزی تمام ضرایب φ در حالت خاص برابر صفر شود جز G



برهم‌نهی پتانسیل (Superposition)

Note: در شکل مقابل اگر به جای سطح بالا، سطح در جهت y پتانسیل آن V باشد جواب مسئله نیز عوض می‌شود که در جواب بدست آمده حالت اول فقط جای y و z را عوض می‌کنیم (به همین سادگی)

* حال اگر سطح بالایی را V و پتانسیل سطح در جهت y را نیز V بگذاریم
جواب جمع جواب حالت اول (سطح بالایی V) ~~پتانسیل~~ جواب حالت دوم (سطح در جهت y، V) می‌شود.
چون در جواب اول φ در جهت y صفر است با جواب دوم (که در جهت y، V است) جمع می‌شود و φ سطح در جهت y را می‌دهد

اگر مثلاً در جهت x هم پتانسیل V بود در جواب حالت اول جای z و x را عوض می‌کنیم و بعد جواب را با جواب حالت در جهت y و z، پتانسیل V جمع می‌کنیم.

$\boxed{h}$ ادامه مسئله صفحه قبل:

$$X = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x \qquad X = A\sin\alpha x \xrightarrow{x=a} \sin\alpha a = 0$$

$$Y = B' e^{-\alpha y} \qquad \varphi = \sum A_n \sin\alpha_n x\, e^{-\alpha_n y}$$

با n های زوج صفر است ?

$\sin\frac{n\pi}{a}x$ ، $\sin\frac{m\pi}{a}x$ ، ... متعامد هستند

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{a}x = \frac{a}{2}\delta_{nm}$$

$$V = \sum A_n \sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$\int_0^a V \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx}_{\frac{a}{2}\delta_{nm}} = \frac{a}{2}A_m$$

همه A_n ها صفر می‌شوند مگر اینکه $n=m$ باشد

چون بین ۰ و a، V ثابت است

$$A_m = \frac{2}{a}V\int_0^a \sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = \frac{2V}{a}\frac{a}{m\pi}\left(-\cos\frac{m\pi}{a}x\right)\Big|_0^a = \frac{4V}{m\pi} = \begin{cases} 1 & m = \text{فرد} \\ 0 & m = \text{زوج} \end{cases}$$

$$\varphi = \sum_{n=\text{فرد}} \frac{4V}{m\pi}\sin\frac{n\pi}{a}x\, e^{-\frac{n\pi}{a}y} = \frac{4V}{n\pi} Im \sum_{n=\text{فرد}} \frac{1}{n}Z^n \qquad Z = e^{i\frac{\pi}{a}(x+iy)}$$

$$= \frac{2V}{\pi} Im \ln\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$$

کسر را به شکل نمایی بدست آوردیم

Z را به -Z تبدیل می‌کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^n}{n} = -\ln(1-Z) \quad , \quad \ln(1+Z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-Z)^n}{n} = Z - \frac{Z^2}{2} + \cdots$$

$$\ln(1+Z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-Z)^n}{n} = Z - \frac{Z^2}{2} + \cdots$$

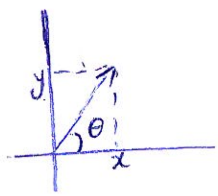
هر عدد مختلط را می‌توانید به صورت یک دامنه r و فاز $e^{i\theta}$ نمایش دهید.

$$-\ln(1-Z) = Z + \frac{Z^2}{2} + \cdots$$

$$\ln\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) = 2\left(Z + \frac{Z^3}{3} \cdots\right) = 2\sum_{n=\text{فرد}}\frac{Z^n}{n}$$

$$Z = x + iy = Ae^{i\theta} \qquad \theta = \tan\frac{y}{x}$$

دامنه



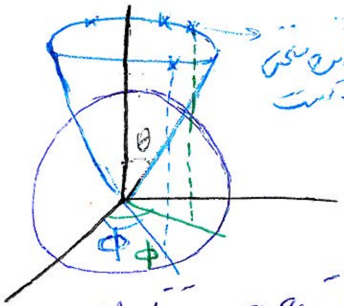
$$\frac{1+Z}{1-Z} = Ae^{i\theta} \qquad \ln\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) = \ln A + i\theta$$

$$\times\, 1 - Z^*$$

در مختصات کروی

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0$$



در بسیاری از مسائل تابع φ تابعی از Φ (زاویه سمتی) نیست
علی الاصول با این نوع توابع سروکار داریم:

$$\varphi = Z(r)P(\theta)$$

تابع φ مستقل از زاویه سمتی Φ باشد $\Big\}\rightarrow$

$$\nabla^2\varphi = \frac{P}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rZ) + \frac{Z}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) = 0$$

$$\frac{r^2}{PZ}\times \text{ضرب} \Rightarrow \underbrace{\frac{r}{Z}\frac{d^2}{dr^2}(rZ)}_{\text{فقط تابعی از } r} = \underbrace{-\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)}_{\text{فقط تابعی از } \theta} = k$$

۵۷:۲۸

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + kP = 0$$

معادله لژاندر

این معادله فقط وقتی جواب قابل قبول دارد که
$n=0,1,2,\ldots$

$$k = n(n+1)$$

همه k ها زوج هستند ⟸ که درست و مثبت باشند

در غیر این صورت جواب این معادله در $\theta=0$ و $\theta=\pi$ جوابهای مبهم و بی‌نهایت پیدا می‌کند.

$$\theta = 0, \pi \rightarrow P \text{ بی‌نهایت}$$

P تابعی از $\cos\theta$ بدست می‌آید

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n \rightarrow \begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \\ \vdots \end{cases}$$

$x = \cos\theta$? why?

$$\frac{r}{Z}\frac{d^2}{dr^2}(rZ)=n(n+1) \xrightarrow{?} Z_n=r^n \ , \ Z_n=r^{-(n+1)}$$

به ازای n های مختلف ۲ دسته جواب خواهیم داشت: همه جواب ترکیبی از این جواب ها است

$$\varphi = \begin{cases} r^n P_n(\cos\theta) \longrightarrow \text{هماهنگ های منطقه ای} \\ r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) \quad (2) \end{cases}$$

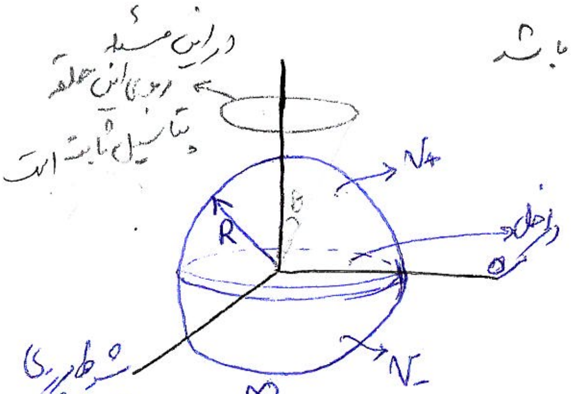
مثلا وقتی منطقه شامل $r=0$ باشد ← (2) بی نهایت می شود چون پتانسیل نباید ∞ باشد ضرایب (2) صفر می شود.

جواب کلی معادله لاپلاس در مختصات کروی ←

جواب کلی :
$$\boxed{\varphi=\sum\left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)}$$

A_n و B_n ها را با استفاده از شرایط مرزی به دست می آوریم. پتانسیل

اگر $r=\infty$ ضرایب A_n ها صفر می شود چون در بی نهایت هم نمی توانیم ∞ باشد



☑ می خواهیم پتانسیل داخل کره را به دست آوریم — تقارن φ دارد

$$\varphi_{in}=\sum A_n r^n P_n(\cos\theta) \qquad r<R$$

باید B_n ها صفر باشند که پتانسیل ∞ نشه

در $r=0$ ، $\frac{1}{r^{n+1}}$ ∞ می شود ← $B_n=0$

ثابت کنید

$$V(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\theta)$$

$$\int P_n(x)P_m(x) = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} = \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

توابع لژاندر در واقع متعامدند

$0 - \pi/2 \to +V$

$\pi/2 \to \pi \to -V$

$$\int_0^{\pi} V(\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \sum A_n R^n \underbrace{\int_0^{\pi} P_m(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}_{\frac{2}{2n+1}\delta_{nm}} = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

باید $n=m$ باشد

$n\neq m \to 0$

$$\left[\int_0^{\pi/2} V P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} V P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\right] = \frac{2}{2m+1}A_m R^m$$

$$A_m = \frac{2m+1}{2}R^{-m}\left[\quad '' \quad\right] \qquad \varphi = V\left[\frac{3}{2}\frac{r}{R}P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}\left(\frac{r}{R}\right)^5 P_5(\cos\theta) + \cdots\right]$$

1،2،5

چرا فقط m فرد؟

در اینجا فقط توابع لژاندر فرد ظاهر شده زوج ها صفر می شود

$$\varphi=\sum\left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$$

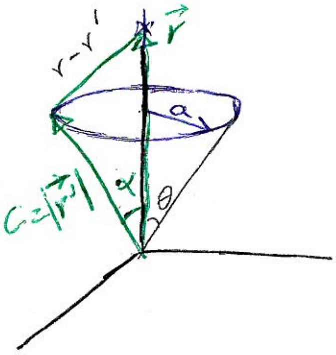
گاهی باید یه ترفند ساده می توانیم A_n و B_n ها را به دست آوریم

$P_n(1)=1$

نکته مهم: روی محور z ، P_n ها (به ازای n های مختلف) همیشه 1 هستند — $\theta=0$ روی محور z

$$\underset{\text{روی محور z}}{\varphi} = \sum\left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right)$$

اگر پتانسیل را روی محور z به دست آوریم و ضرایب A_n ها و B_n ها را تعیین کنیم به خاطر یکتایی مسئله A_n ها و B_n ها را در واقع تعیین کرده ایم در این صورت هر نقطه از فضا را که بدهند به راحتی φ را در $P_n(\cos\theta)$ ضرب می کنیم و پتانسیل را به دست می آوریم (θ آن را بررسی می کنیم که چه است) به همین راحتی :-)



یک حلقه باردار داریم می‌خواهیم پتانسیل را در یک نقطه از فضا بدست آوریم

تقارن ϕ دارد

* پتانسیل را روی محور خیلی راحت می‌توانیم بنویسیم می‌خواهیم ϕ را از آن حساب کنیم

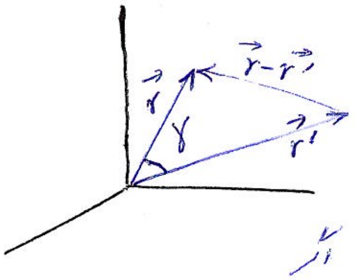
دستگاه: cgs (سانتی‌متر، گرم، ثانیه)

در غیر ε ۲ $\longrightarrow$ $\varphi = \dfrac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ هر نقطه از فضا

توضیح inference: θ زاویه‌ای است که r با محور $\hat{z}$ می‌سازد (θ در مختصات کروی) و α ها زاویه‌هایی هستند که $\vec{r}$ و $\vec{r}'$ با یکدیگر می‌سازند

$$= \frac{q}{\sqrt{r^2+c^2+2rc\cos\alpha}}$$

r کوچکتر



$$\boxed{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos\gamma)}$$

اگر $r > r' \Rightarrow r_> = r,\ r_< = r'$ اگر $r < r' \Rightarrow r_< = r,\ r_> = r'$

$$\varphi = q\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos\alpha) \Rightarrow \varphi = q\sum \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos\alpha) P_n(\cos\theta)$$

فقط روی محور

پتانسیل در هر نقطه فضا

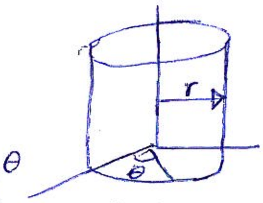
نتیجه اخلاقی: در مختصات کروی که پتانسیل ما تقارن سمتی داشته باشه جواب ما به صورت توابع لژاندر ضرب در r ضرب در حاصل‌ضرب‌های منفصل است

اگر پتانسیل را روی محور داشته باشیم به راحتی می‌توانیم در هر نقطه دیگر پتانسیل را تعیین کنیم

معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای

تقارن در راستای z

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \cancel{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}} = 0$$



جداسازی متغیرها $\varphi = Y(r)\,S(\theta)$

$$\frac{1}{r}S(\theta)\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}Y(r)\frac{d^2S(\theta)}{d\theta^2} = 0$$

$\xrightarrow{\frac{r^2}{SY}}$

$$\frac{r}{Y(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY}{dr}\right) = \frac{-1}{S(\theta)}\frac{d^2S(\theta)}{d\theta^2} = \alpha^2$$

معادله نوسانگر هارمونیک

α می‌تواند مختلط مجازی یا حقیقی باشد

if $\alpha = 0$ $\Rightarrow S(\theta) = A_0 + B_0\theta$, $r\frac{dY}{dr}$ ثابت است $\rightarrow Y(r) = a_0 + b_0 \ln r$

$$\frac{d^2S}{d\theta^2} + \alpha^2 S(\theta) = 0 < \begin{matrix}\sin\alpha\theta \\ \cos\alpha\theta\end{matrix},\ e^{\mp i\alpha\theta}$$

اگر فضای ما کامل باشد

چون φ باید دور بچرخد تا به مقدار اولیه خودش برسد $\Rightarrow \sin\alpha\theta = \sin\alpha(\theta+2\pi) \Rightarrow \boxed{\alpha = n}$ $n=1,2,\dots$

اگر فضای ما کامل نباشد لزومی ندارد $\alpha = n$ باشد.

$0 < \theta < \beta$ مثلاً برای یک گوه

$$\underbrace{\frac{r}{Y}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dY}{dr}\right) = n^2}\quad Y = r^n,\ Y = r^{-n} \Rightarrow$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) + \sum r^{-n}(A_n' \sin n\theta + B_n' \cos n\theta)$$

$$S_0 \quad + (A_0 + B_0\theta)(a_0 + b_0 \ln r)$$

جواب S — جواب Y

اگر منطقه‌ای که داریم شامل مرکز باشد حتماً $A_n' = B_n' = 0$ باید باشد. و حتماً باید $b_0 = 0$ باشد

$$\alpha = 0 \longrightarrow S(\theta) = A_0 + B_0\theta$$

در این صورت داریم $\quad r\frac{dY}{dr} = C$ ثابت $\quad \frac{dY}{dr} = \frac{C}{r} \Longrightarrow Y(r) = a_0 + b_0 \ln r$

جلسه ششم

مختصات استوانه‌ای
$$\begin{cases} \psi(r) = a r^{\alpha} + b\, r^{-\alpha} \\ S(\theta) = A \sin\alpha\theta + B \cos\alpha\theta \\ \psi_0 = a_0 + b_0 \ln r \\ S_0 = A_0 + B_0\theta \end{cases}$$

$$\varphi = \psi S$$

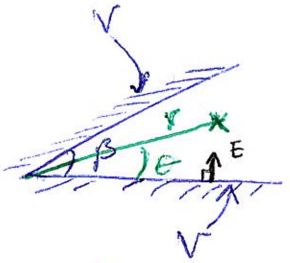
همواره این طور نیست که α ها را صفر قرار دهیم اگر θ ها فقط را بپوشانند $\alpha = n$

معمولاً در مسائل برای پتانسیل مبدأ را مرجع

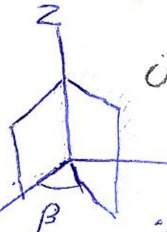
α می‌تواند غیر صحیح هم باشد اگر پتانسیل تمام فضا را در بر بگیرد

برای پتانسیل دلخواه است که کجا را نقطه مرجع قرار دهیم در اینجا چون ∞ نقطه صفر مناسبی است به دلیل تابعیت پتانسیل که $\frac{1}{r}$ است

∞ را صفر انتخاب می‌کنند در مسائل ما مرجع را همواره ∞ انتخاب می‌کنیم مگر اینکه صریحاً اعلام کنیم نقطه دیگری است.



مثال: گوه‌ای شامل ۲ صفحه بی‌نهایت طول با عرض محدود $0 < \theta < \beta$ شکل (امتداد z به سمت بیرون) گوه را به یک پتانسیل V وصل کرده‌ایم چون ... سطح ... را تحمیل می‌کند



بهترین دستگاهی که می‌توانیم انتخاب کنیم برای محاسبه پتانسیل برای $0 \leq \theta \leq \beta$ دستگاه مختصات استوانه‌ای است. این سیستم تقارن در امتداد محور z را دارد و تابع φ ما فقط تابعی از r و θ می‌تواند باشد.

خارج بی‌نهایت بودن صفحه‌ها

خارج گوه یک تابع دیگری باید بنویسیم تابع پتانسیل را باید in و Out حساب کنیم و شرط پیوستگی را لحاظ کنیم

* در $r=0$ (که در این نقطه قرار گرفته‌ایم) φ نباید ∞ شود ⇐ $b=0$
* ثابتی که در $\theta=0$ است از حاصلضرب $a_0 \cdot A_0$ بدست می‌آید

برای اینکه در $\theta=0$ و $\theta=\beta$ یک V ثابت داشته باشیم باید ضریب $\psi_0 S_0$ یک ثابت شود که اگر $B_0 \neq 0$ باشد این V ثابت نمی‌شد (خواهد شد)

چون V را ساخته‌ایم در $\theta=\beta$ نیز دوباره باید $\varphi = V$ شود پس باید $\sin\alpha\beta = 0 \Leftarrow \alpha\beta = n\pi$

$r \to 0 \longrightarrow b = b_0 = 0$

$\theta = 0 \xrightarrow{\varphi = V} B = 0$

$\theta = \beta \longrightarrow \varphi = V \longrightarrow B_0 = 0$

$\sin\alpha\theta = 0 \;\downarrow\; \alpha\beta = n\pi \longrightarrow \alpha = \frac{n\pi}{\beta}$

$a_0 A_0$

$$\Longrightarrow \varphi = V + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\theta\right)$$

* در معادله لاپلاس صدق می‌کند
* شرایط مرزی را ارضا می‌کند

به هر صورتی جواب بدست آورده صحیح جواب بدست خواهد آمد

برای بدست آوردن A_n ها ضرب را در $\sin\frac{m\pi}{\beta}\theta$ می‌کنیم بعد انتگرال می‌گیریم و بعد A_n ها بدست می‌آید

$r \to 0$ جمله غالب φ سری همان جمله اول $\varphi \approx V + A_1 r^{\pi/\beta} \sin\frac{\pi}{\beta}\theta$ $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

استوانه‌ای

$$-\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\theta}$$

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -A_1 \frac{\pi}{\beta} r^{\frac{\pi}{\beta}-1} \sin\frac{\pi}{\beta}\theta \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -A_1 r^{\frac{\pi}{\beta}-1} \frac{\pi}{\beta}\cos\frac{\pi}{\beta}\theta \end{cases}$$

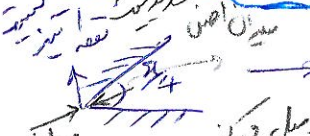
مؤلفه مماسی (در جهت سمتی)

در نزدیکی $r \approx 0$: $E_\theta \propto r^{\frac{\pi}{\beta}-1}$ ← روی سطوح

روی دو صفحه گوه $\theta = 0, \beta$ ، E_T میدان مماسی صفر است

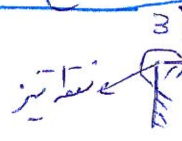
در $\theta=0$: $E_\theta = -E_\theta\big|_{\theta=\beta}$

E_θ متناسب با r است

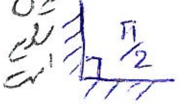


$\pi/4 \longrightarrow E_\theta \propto r^3$

خیلی شدید به صفر میل می‌کند



$3\pi/2$ نقطه تیز $\qquad E_\theta = r^{-1/3}$

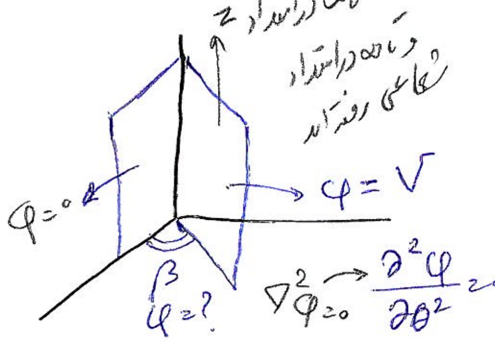


میدان ثابت است $\quad \pi/2 \longrightarrow E_\theta \propto r \qquad E_\theta = 1$

2π نقطه تیز $\qquad E_\theta \propto r^{-1/2}$

وقتی نقطه تیز داریم در $r=0$ شدید شدت میدان الکتریکی افزایش پیدا می‌کند (به صورت بی‌نهایت)

گوه — تقارن سمتی استوانه‌ای — تقارن در امتداد z



مسئله: صفحه‌های گوه تا بی‌نهایت رفته‌اند تا بی‌نهایت در راستای z و تا بی‌نهایت در راستای شعاعی رفته‌اند φ بین دو صفحه را پیدا کنید

تابع پتانسیل نباید تابعی از r باشد φ فقط تابعی از θ بدست می‌آید
چون صفحه تا بی‌نهایت رفته

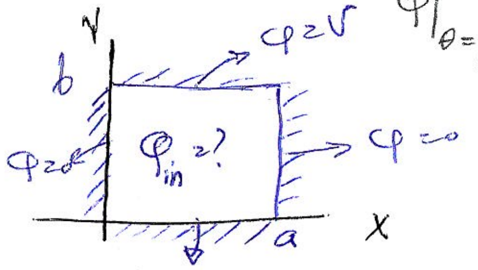
$$\nabla^2\varphi=0 \longrightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0$$

$$\varphi=a_0+B_0\theta$$

$$\theta=0\longrightarrow\varphi=0\Longrightarrow a_0+0=0\longrightarrow a_0=0$$

$$\varphi\Big|_{\theta=\beta}=B_0\beta=V\longrightarrow B_0=\frac{V}{\beta}\Rightarrow\varphi=\frac{V\theta}{\beta}$$

مسئله (تحویل سرکلاس)
در راستای z تا بی‌نهایت رفته بنابراین تابعی از z نیست
پتانسیل را داخل بدست آورید



$$\nabla^2\varphi=0$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \qquad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\alpha^2 \qquad x=e^{\pm i\alpha x},\ \sin\alpha x,\ \cos\alpha x$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=\alpha^2\longrightarrow Y=e^{\pm\alpha y}$$

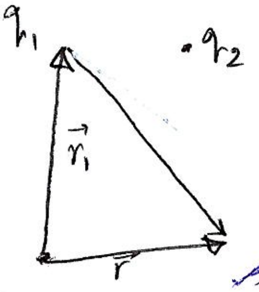
$$\begin{cases} X=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x \\ Y=A'e^{\alpha y}+B'e^{-\alpha y}\overset{\text{یا}}{=}A'\sinh\alpha y+B'\cosh\alpha y\end{cases}$$

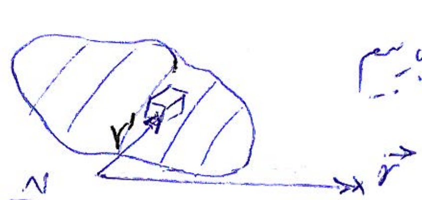
$$x=0\longrightarrow\varphi=0\longrightarrow B=0 \qquad x=a\longrightarrow\varphi=0\longrightarrow A\sin\alpha a=0\longrightarrow\alpha a=n\pi \quad \alpha=\frac{n\pi}{a}$$

$$y=0\longrightarrow\varphi=0\longrightarrow A'+B'=0\longrightarrow A'=-B' \qquad X=A\sin\alpha x$$

$$y=b\longrightarrow\varphi=0\longrightarrow A'e^{\alpha b}+B'e^{-\alpha b}=0$$

نقد





هدف ما از پتانسیل این است که میدان الکتریکی را بیابیم

$$\vec{E}=k\int\frac{\rho\,dV}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\vec{E}=k\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

برای اینکه شکل این میدان‌ها به صورت واحد پیدا کنیم و به صورت تحلیلی بنویسیم از تابع دلتای دیراک استفاده می‌کنیم
وقتی که می‌نویسیم منظور میدان فضای سه بعدی است

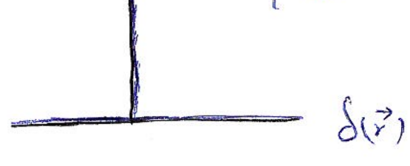
∇ تعاریف تابع دلتای دیراک

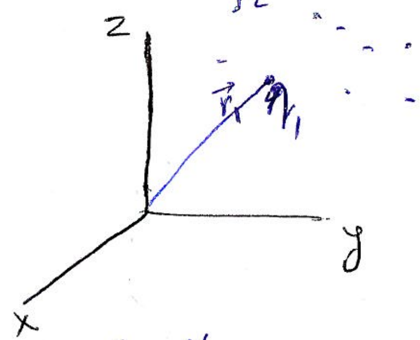
$$\delta(\vec{r})=\begin{cases}0 & \text{در تمام فضا به غیر از } \vec{r}=0\\ \infty & \vec{r}=0\end{cases}$$

$$\text{در کل}:\ \int_{\text{تمام فضا}}\vec{F}(\vec{r})\,\delta(\vec{r})\,dV=F(0)$$

F تابع دلخواهی از $\vec{r}$

$$\Rightarrow\int_{\text{تمام فضا}}\delta(\vec{r})\,dV=1$$





چگالی در نقطه $\vec{r}$ $\quad \rho(\vec{r}) = q_1\delta(\vec{r}-\vec{r}_1)$

q_1 در وجود بار

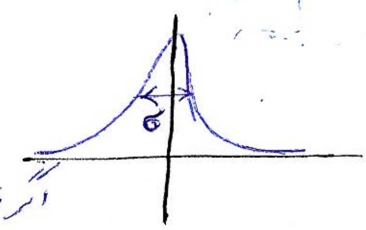
$$q_1 = \int_{\text{کل فضا}} \rho\, dV = \int q_1 \delta(\vec{r}-\vec{r}_1)\, dV = q_1$$

چگالی : $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$

بار کل فضا $\overrightarrow{Q} = \int \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\, dV = q_1 + q_2 + \cdots + q_N$

$\delta(\vec{r}-\vec{r}_1) \overset{\text{تعریف}}{=} \delta(x-x_1)\,\delta(y-y_1)\,\delta(z-z_1)$ مثل

دیفانسیل $\delta(x) \leftarrow \frac{1}{x}$



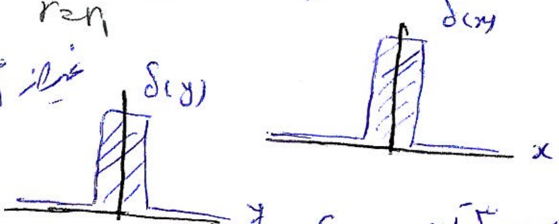
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)\,dy = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z)\,dz = 1$$

اگر پهنای تابع لورنتس را به صفر میل دهیم همان تابع دلتای دیراک بدست می‌آید

$$\int_0^{+\infty} \delta(x)\,dx = \frac{1}{2} \qquad \delta(x) = \delta(-x)$$

تابع دلتای دیراک تابعی زوج است.

$$\delta(r-r_1) = \begin{cases} \infty & r = r_1 \\ 0 & \vec{r} \neq \vec{r}_1 \text{ غیر از} \end{cases}$$



اگر پهنای این تابع را به سمت صفر میل دهیم سطح زیر آن 1 می‌شود.

حاصلضرب ۳ تا از این توابع انتگرال حاصلضرب ۳ تابع $\delta(x)$ ، $\delta(y)$ و $\delta(z)$ 1 می‌شود.

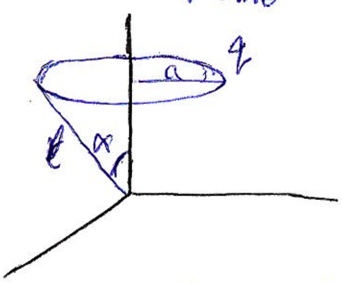
$$\int_{\text{در فضای کروی}} \delta(\vec{r})\,dV = 1$$

$$\int \delta(\vec{r})\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = 1 = \underbrace{\int \delta(r)\,dr}_{1} \underbrace{\int \delta(\theta)\,d\theta}_{1} \underbrace{\int \delta(\varphi)\,d\varphi}_{1} = 1$$

$\delta(\vec{r}) \to \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\delta(\theta)\,\delta(r)\,\delta(\varphi)$

تابع دلتای دیراک کل فضا را صفر می‌کند بجز جاهای خاص که بار هست را غیر صفر می‌کند

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')$$



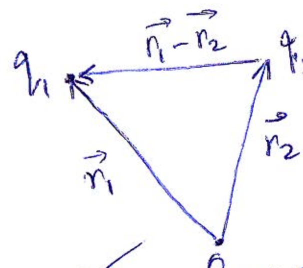
مثال : کل بار روی حلقه q است چگونه چگالی ρ را بنویسیم که اولاً وقتی روی کل فضا انتگرال می‌گیریم همان بار q را بدهد و ضمناً طوری باشد که نقطه در راستای r مشخص θ مشخص باید بار غیر صفر باشد φ کل حلقه را می‌پوشاند (شامل $2\pi \geq \varphi \geq 0$ است)

$$\rho(\vec{r}) = \alpha q\, \delta(\theta-\alpha)\,\delta(r-l)$$

به همین راحتی شما می‌توانید تمام بارهایی که در فضا دارید را به چگالی حجمی تبدیل کنید این کار ما را خیلی راحت خواهد کرد تمام چیزهایی که در فضا داریم نقطه‌ای حجمی سطحی و ... را بنویسید در محاسبات $\int \rho\, dV$

تا اینجا حرف ما از ریاضیات تمام شد از جلسه بعد الکترواستاتیک را بیان می‌کنیم

جلسه هفتم



قانون کولن

نیرویی که از طرف ۲ به ۱ وارد می‌شود

$$\vec{F}_{12}=\frac{K q_1 q_2}{|r_1-r_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

$$=K\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

دیمانسیون ندارد

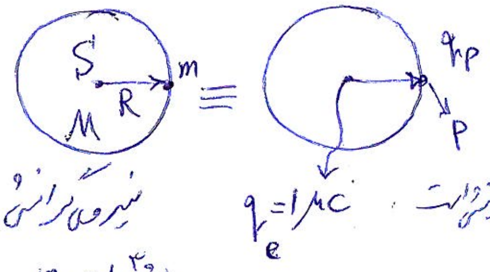
$K=8.9874\times10^{9}\ \frac{Nm^2}{C^2}$ $\quad K=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

ثابت جفت شدگی بارهای الکتریکی

که از قانون دوم نیوتن پیروی می‌کند

[بار گرانشی = جرم] فعلاً در الکترواستاتیک قانون سوم نیوتن برقرار است.

- نیروی الکتریکی بسیار قوی‌تر از نیروی گرانشی است.
- اگر یک پروتون روی شعاع خورشید در نظر بگیرید نیروی گرانشی بین پروتون و خورشید معادل است با اینکه $1\mu C$ الکترون در مرکز خورشید و یک پروتون روی شعاع خورشید قرار دهید نیروی الکتریکی بین پروتون و $1\mu C$ بار، با فاصله شعاع خورشید معادل آن نیروی گرانشی است.



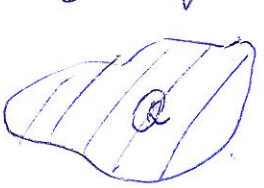
نیروی گرانشی

$m_S\simeq10^{30}\ kg$

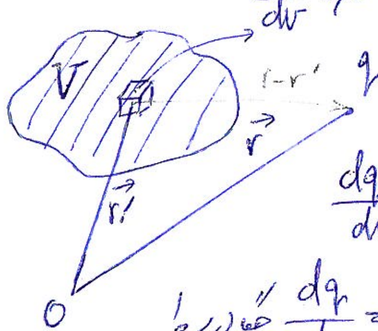
$$F_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_i q_j}{|r_i-r_j|^3}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)$$

نیرویی که از طرف بقیه ذرات به q_i وارد می‌شود

بردار مکان باری که دارد بر آن نیرو وارد می‌شود



$$F\neq K\frac{Qq}{|r_1-r_2|^3}(r_1-r_2)$$



$$\vec{F}_q=K\int_V\frac{q_1\,dq}{|r-r'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

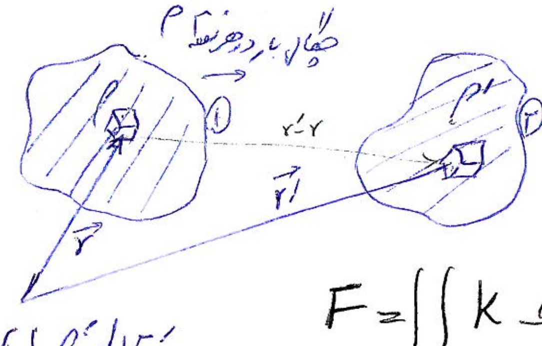
به طور کلی اگر یک توزیع بار نقطه‌ای حجمی و سطحی داشته باشیم نیرویی که بر ذره q وارد می‌شود عبارت است از

$\frac{dq}{dv}=\rho$

چگالی سطحی $\frac{dq}{da}=\sigma$

$$\vec{F}=K\sum_{j=1}^{N}\frac{q\,q_j}{|r-r_j|^3}(\vec{r}-\vec{r}_j)+K\int\frac{q\rho\,dv}{|r-r'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')+K\int\frac{q\sigma\,da}{|r-r'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

نیروی بین دو توزیع پیوسته



نیرویی که ۱ روی یک عنصر خاص ۲ وارد می‌کند را حساب می‌کنیم بعد این عنصر را تعمیم می‌دهیم و تمام نیروها را جمع می‌کنیم (جمع دوم روی عناصر ۲)

$K\iint\rho' dv'$

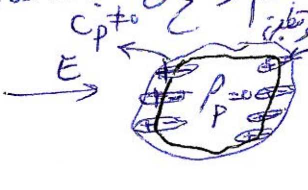
$$F=\iint k\frac{\rho' dv'\rho\,dv}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}(\vec{r}'-\vec{r})$$

نیروی وارد بر عنصری با بردار r' را داریم حساب می‌کنیم پس داریم $\vec{r}'-\vec{r}$، اول بردار $\vec{r}$ را می‌نویسیم اول بردار $\vec{r}$ را می‌نوشتیم که داریم نیروی وارد بر ذره با آن بردار مکان را حساب می‌کنیم.

این بحث‌های ما برای ابعاد ماکروسکوپیک است در فصل ۲ در ابعاد میکروسکوپیک بررسی می‌کنیم.

مواردی که تا الان بیان کردیم سمبلیک هستند برای محاسبه نیرو برای یک حجم در اینده حجم و سطح را جدا در نظر می‌گیریم

(فصل ۵-۶) } اگر این اتم‌ها مختلف باشند در جسم وقتی این جسم را داخل یک میدان الکتریکی E قرار دهیم توزیع بار داخل جسم عوض می‌شه بنابراین می‌توان گفت روی سطح جسم یک توزیع بار داریم اما در داخل هیچ باری وجود ندارد



به طور تجربی ثابت شده که وجود یک بار در نیرویی که یک بار q به بار q دیگر وارد می‌کند هیچ تاثیری ندارد.

☑ میدان الکتریکی

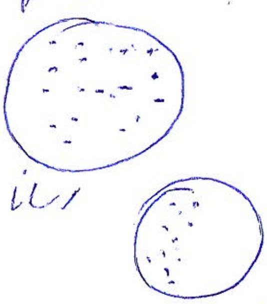
$E=\lim \frac{\vec F}{q}$

$q\to 0$

$q \rightarrow$ بار آزمون

q_1

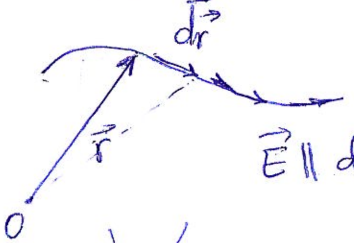
وجود بار q روی میدان رسانا تاثیر بگذارد بنابراین ما q را به صفر میل می‌دهیم تا تاثیر روی توزیع بار واقعی میدان تاثیر نگذارد نیرویی که حساب می‌کنیم، در توزیع بار اولیه تغییر ایجاد کرده



توزیع بار پیوسته

$$E=\lim_{q\to 0}\frac{\vec F}{q}=k\int\frac{\rho dV}{|r-r'|^3}(\vec r-\vec r')$$

هرچه آزمایش را با بار کوچک و کوچکتر انجام دهیم ویژگی سیستم را بهتر تشخیص می‌دهیم.
هدف در الکتروستاتیک پیدا کردن همین میدان E است.

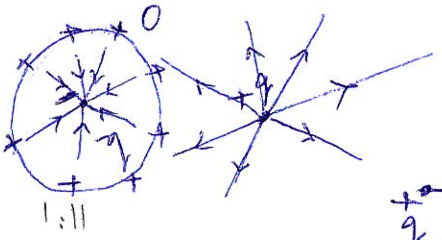


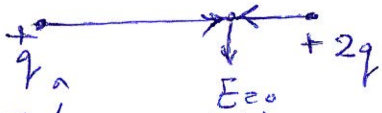
$\vec E \parallel d\vec r$

خط نیرو موازی با E است

□ یک خط با الکتریکی داشته باشیم

- خطوط میدان یکدیگر را قطع نمی‌کنند مگر در نقاطی که میدان صفر باشد (چون خط جهت میدان را مشخص می‌کند) خط میدان با خط نیرو مشابه
میدان الکتریکی همیشه مماس بر خط نیرو است. بارها ختم می‌شود

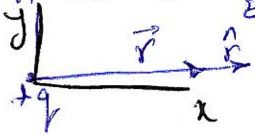




اگر بخواهیم در صفحه x-y خط نیرو را بدست آوریم می‌توانیم از معادلات خط نیرو استفاده کنیم

$$\vec E=E_x\hat i+E_y\hat j+E_z\hat k$$
$$d\vec r=dx\hat i+dy\hat j+dz\hat k$$
$$E\parallel dr \Rightarrow \frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y}=\frac{dz}{E_z}$$

می‌خواهیم خط نیروی بار q + را پیدا کنیم



$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec r=\underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}_{\alpha}(x\hat i+y\hat j+z\hat k)$$

$$\frac{dx}{\underbrace{E_x}_{\alpha x}}=\frac{dy}{\alpha y}\xrightarrow{\int}\ln x=\ln y+C\longrightarrow \ln\left(\frac{x}{y}\right)=C\longrightarrow \boxed{y=kx}$$

تمام خطوطی که از مبدا می‌گذرند خطوط نیرو هستند می‌توان در مختصات دیگر همین کار را انجام دهیم

مختصات ۹۳ $d\vec r=dr\,\hat r+r\,d\theta\,\hat\theta$ $\quad \frac{dr}{E_r}=\frac{r\,d\theta}{E_\theta}$

$\vec E=E_r\hat r+E_\theta\hat\theta$

$\vec E=-\vec\nabla\varphi$

مشتق‌گیری‌ها روی r گرفته می‌شود
تغییرات r را می‌دهد

$\vec\nabla\times(\nabla f)=0$ اسکالر

$\vec\nabla\times\vec F=0\Rightarrow \vec F=\vec\nabla f$

$$\vec E\propto\frac{\vec r-\vec r'}{|r-r'|^3}\quad ?\ \vec\nabla\times\frac{\vec r-\vec r'}{|r-r'|^3}\propto\vec\nabla\times\vec E$$

عملگر خارجی

$$\vec\nabla\times\frac{\vec r-\vec r'}{|r-r'|^3}=\cancel{\vec\nabla_r\frac{1}{|r-r'|^3}\times(\vec r-\vec r')}+\frac{1}{|r-r'|^3}\cancel{\vec\nabla_r\times(\vec r-\vec r')}=0$$

$$\vec\nabla\times(\varphi\vec F)=\vec\nabla\varphi\times\vec F+\varphi\,\vec\nabla\times\vec F$$

$$\vec\nabla\frac{1}{|r-r'|^3}=-3\frac{\vec r-\vec r'}{|r-r'|^5}\longrightarrow \vec r-\vec r'\ \text{در راستای}$$

$$\vec\nabla f(r)=\frac{\vec r}{|r|}\frac{df}{dr}$$

در واقع $\nabla\times E$ صفر است

$\boxed{E=-\vec{\nabla}\varphi}$

منفی قرارداد

بنابراین ما می‌توانیم به جای اینکه E را بدست آوریم میدان φ را که یک اسکالر است را پیدا کنیم و بعد از آن گرادیان بگیریم

چون $\nabla\times E=0$

☑ پتانسیل

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\xleftrightarrow{\text{گرادیان بگیریم}}\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

پتانسیل بار q در فاصله r

اگر از φ با این فرمول گرادیان بگیریم

$$\Rightarrow \varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\, dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad dv' = r'^2\sin\theta'\, dr'\, d\varphi'\, d\theta'$$

نسبت به r'

$\rho dv'$ روی r' ها هست وقتی از φ گرادیان می‌گیریم داریم نسبت به r ها گرادیان می‌گیریم

چگالی روی r' ها است ⟸ چون انتگرال و ∇ را می‌توانیم عوض کنیم

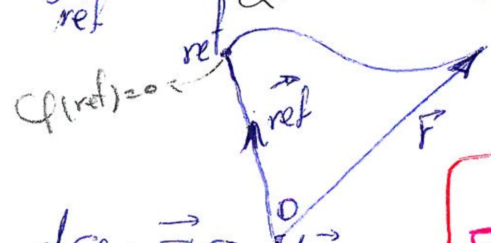
وقتی انتگرال گرفتیم دیگر تابع ما تابعی از پریم ها نخواهد بود تابعی از r هست (x,y,z) (چون انتگرال گیری روی پریم ها انجام شد) بعد که گرادیان می‌گیریم دیگر نسبت به r گرادیان می‌گیریم.

اگر ∇ نسبت به پریم بود روی $\rho dv'$ هم مشتق گیری می‌شد چون $\rho dv'$ تابعی از r' است

☑ اگر میدان الکتریکی را در یک مسیر که فاصله دلخواه تصور کنیم در هر نقطه مرجع بگیریم و در یک نقطه ای مثل نقطه ref و یک نقطه ای مثل r

$$\int_{\vec{ref}}^{\vec{r}}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$\varphi(ref)=0$ از نقطه ref تا $\vec{r}$



$$\int_{\vec{ref}}^{\vec{r}}\vec{E}\cdot d\vec{r}=-\int\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{r}=-\int_{\vec{ref}}^{\vec{r}}d\varphi$$

$$=-\left(\varphi(\vec{r})-\cancel{\varphi(\vec{ref})}\right)=-\varphi(\vec{r})$$

طبق تعریف

پتانسیل در نقطه ref صفر است 0

$$d\varphi=\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{\varphi(\vec{r})=-\int_{\vec{ref}}^{\vec{r}}\vec{E}\cdot d\vec{r}}$$

اگر E را داشته باشیم با این طریق φ را بدست می‌آوریم

$$\boxed{\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi}$$

اگر φ را داشته باشیم با این طریق E را بدست می‌آوریم

$$\varphi(\vec{r})=-\int_{\vec{ref}}^{\vec{r}}E\cdot dr=\int\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\underbrace{\vec{r}\cdot d\vec{r}}_{r\,dr}$$

$r\,dr$ ⟶ در جهت شعاعی

چون مؤلفه شعاعی فقط مهم است اگر r در جهت dr باشد فقط اثر دارد عمود بر آن صفر می‌شود

$$\boxed{\varphi(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

☑ فرض کنید یک میدان الکتریکی داریم و بار q را وارد این میدان می‌کنیم

$$U=-\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int q\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{U=+q\varphi(\vec{r})}$$

φ در محل بار الکتریکی ناشی از میدان الکتریکی خارجی

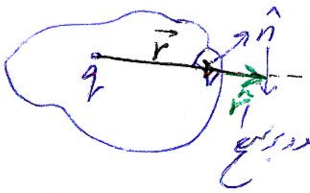
انرژی پتانسیل همان پتانسیل است برای واحد بار

انرژی‌ای که به علت آمدن بار الکتریکی در این محیط به وجود آمده

این انرژی فقط مربوط به q است (فقط به علت وجود q است)

جلسه هشتم

قانون گاوس:



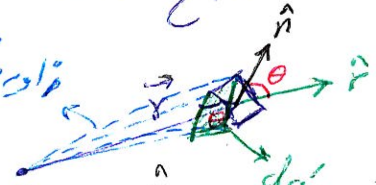
$$\oint_S E\cdot\hat{n}\,da = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$\hat{n}\,da = d\vec{a}$

$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\hat{n}\,da = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{da'}{r^2} = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\Omega = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

شار الکتریکی که روی کل سطح عبور می‌کند

$$\oint_S d\Omega = 4\pi$$



da' عمود بر $\vec{r}$

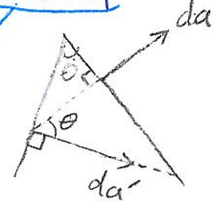
المان سطح عمود بر $\vec{r}$

$$\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\cdot\hat{n}\,da = \cos\theta\,da = da'$$

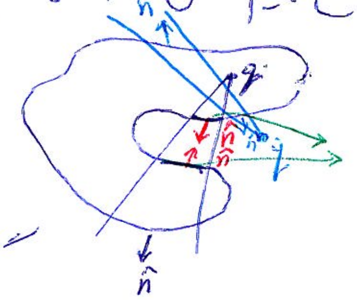
$$da' = r^2 \underbrace{\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}_{d\Omega}$$

عنصر زاویه فضایی

$\frac{da'}{r^2}$ اجزای کوچکی که روی سطح است یک عنصر زاویه فضایی داریم روی حجم آن که جمع بزنیم حاصل 4π می‌شود



اگر q بیرون این سطح باشد زاویه فضایی هر دو یکی است ولی $\hat{n}$ های آن‌ها خلاف جهت یکدیگرند بنابراین باری که بیرون سطح باشد اثری در قانون گاوس نخواهد گذاشت



اگر سطح به صورت شار این دو سطح همدیگر را خنثی می‌کنند

این دو یک زاویه فضایی را در بر می‌گیرند

(1) این برای یک تک بار بود اگر چندین q داشته باشیم ⟸

$$E = E_1 + E_2 + \cdots$$

$$\Rightarrow \oint_S (E_1+E_2+\cdots)\cdot\hat{n}\,da = \oint_S E_1\cdot\hat{n}\,da + \oint_S E_2\cdot\hat{n}\,da + \cdots = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_1+q_2+\cdots)$$

شار الکتریکی گذرنده از یک سطح بسته متناسب با بار داخل آن است

(2) اگر بار پیوسته در سطح در داخل باشد

باری که داخل این حجم است

$$\oint_S E\cdot\hat{n}\,da = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dV$$

V حجمی که توسط سطح S در بر گرفته شده

اگر توزیع دلتا را برای بار نقطه‌ای تعریف کنیم این رابطه برای بار نقطه‌ای هم درست است

قضیه گاوس به صورت نقطه‌ای (دیفرانسیلی):

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

قضیه دیورژانس ⟵

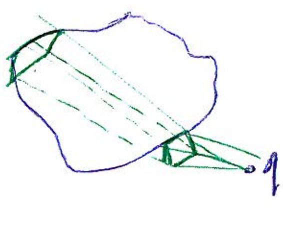
$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dV$$

در هر نقطه‌ای که $\nabla\cdot E$ را حساب کنیم برابر است با $\frac{\rho \text{ آن نقطه}}{\varepsilon_0}$

اگر در یک نقطه از فضا بار نداشته باشیم $\nabla\cdot E = 0$

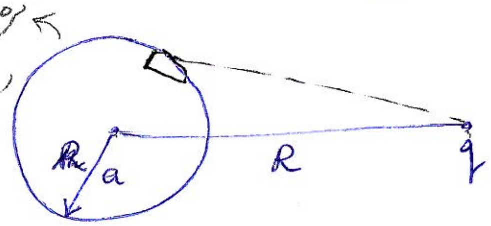
معمولاً میدان را روی خود بار تعریف نمی‌کنیم و آن‌ها را در نظر می‌گیریم

بارهای روی سطح به حساب نمی‌آیند چون اگر زاویه فضایی یک قسمت سطح را در نظر بگیریم همان شاری که از یک سمت وارد می‌شود از سطح دوم راستای زاویه فضایی آن خارج می‌شود و در واقع هیچ چیز خاصی نمی‌ماند



1) میانگین پتانسیل روی سطح کره برابر است با پتانسیل در مرکز کره وقتی هیچ باری داخل کره نباشد

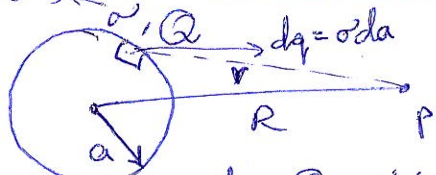
کره فرضی در فضا



$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi a^2}\oint_S \varphi\, da = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

قضیه mean feild

چگالی σ, Q



اینجا بسیار مهم
مسئله ای زیر یک کره با بار Q

$dq = \sigma da \qquad Q = \sigma 4\pi a^2$

قانون کولن $\quad E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{Q\, da}{4\pi a^2 r}$$

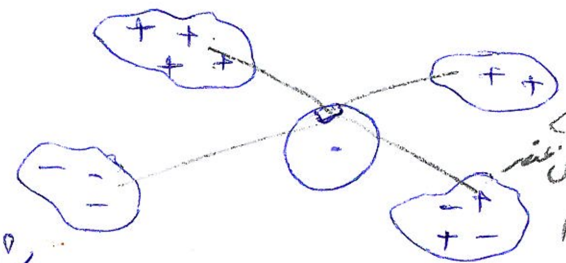
$$\Rightarrow \frac{\cancel{Q}}{\cancel{4\pi\varepsilon_0} R} = \frac{1}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}}\frac{\cancel{Q}}{4\pi a^2}\oint \frac{da}{r}$$

یک رابطه هندسی است

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{4\pi a^2}\oint_S \frac{da}{r}}$$

برای یک کره دلخواه
در نقطه P به فاصله R از مرکز کره

حل مسئله اولیه: $\quad \dfrac{1}{4\pi a^2}\oint_S \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\, da = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{4\pi a^2}\oint \dfrac{da}{r}\right) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

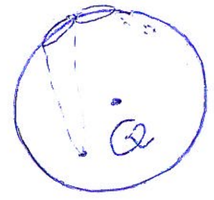


برای عنصر خاص روی کره
با پتانسیل
تک تک
بار روی آن عنصر
حساب کنیم

اگر یک توزیع بار کاملاً دلخواه داشته باشیم $1/R$ در شکل روبه رو اگر بخواهیم میانگین پتانسیل روی این کره که درون آن بار وجود ندارد را بدست آوریم می‌شود پتانسیل در مرکز این کره به شرطی که هیچ باری داخلش نباشد

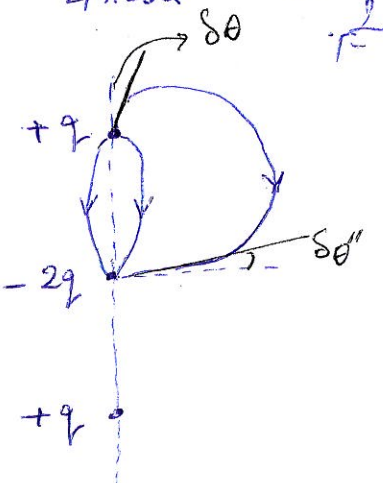
⟸ این نکته را می‌فهمیم که: اگر در فضایی که بار وجود ندارد قطعاً پتانسیل در آنجا نمی‌تواند Max یا Min داشته باشد مثلاً فرض کنید در نقطه O پتانسیل Max باشد وقتی پتانسیل را در سمت داخل دیواره کره انتگرال بگیریم یک کره ای اطراف O رسم کنیم بعد در تک تک سطح‌های کوچک پتانسیل را در da ضرب و بعد انتگرال و بعد تقسیم بر سطح کل کره کنیم قطعاً از پتانسیل Max در مرکز کمتر می‌شود و با قضیه بالا تناقض دارد.

2) میانگین پتانسیل روی سطح یک کره به شعاع a برابر $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$ است اگر بار Q در داخل کره باشد و هیچ باری در بیرون کره نداشته باشیم.



$$\boxed{\delta\theta'' = \frac{\delta\theta^2}{4}}$$

نشان دهید

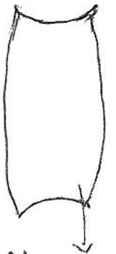


مثال (چهار قطبی)

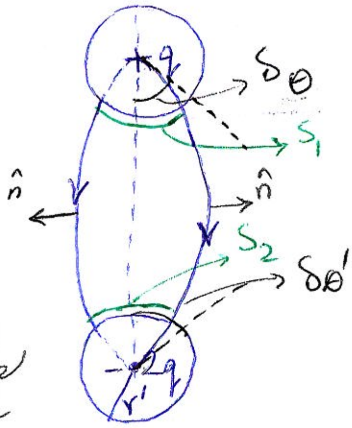
اگر یک خط میدانی از قطب جنوب بار بالایی تحت چه زاویه ای به قطب شمال بار پایینی تر می‌رسد

سطح بسته

سطح جانبی را همان خطوط میدان در نظر بگیریم



سطح بسته برای قانون گاوس



در این سطح بسته هیچ باری وجود ندارد

$$\oint \vec E\cdot\hat n\, da = 0$$

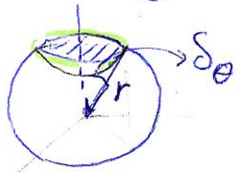
روی سطح جانبی $\vec E\cdot\hat n da$ صفر می‌شود فقط روی دو سطح S_1 و S_2 باقی می‌ماند (چسبیده به بار نقطه‌ای)

$$\int_{S_1} E\cdot\hat n da + \int_{S_2} \vec E\cdot\hat n da$$

شار کل بار نقطه‌ای از کل سطح کره $= \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

سطح کل — سطح کاسه بالایی — سطح کاسه پایینی

شار سطح بخشی از کره $= \dfrac{q}{\varepsilon_0}\dfrac{1}{4\pi r^2}2\pi(1-\cos\delta_\theta)r^2 = \dfrac{2q}{\varepsilon_0}\dfrac{1}{4\pi r'^2}2\pi(1-\cos\delta_{\theta'})r'^2$



سطح قسمت هاشور $= \int \underbrace{r^2\sin\theta d\theta d\varphi}_{da}$

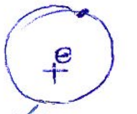
$$= r^2\int \sin\theta d\theta d\varphi = -\cos\theta\Big|_0^{\delta_\theta}\times 2\pi r^2 = r^2 2\pi(1-\cos\delta_\theta)$$

چون خیلی به بار بالایی نزدیک هستیم دیگر اثر بار پایینی حذف شده

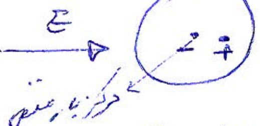
$$\Rightarrow (1-\cos\delta_\theta) = 2(1-\cos\delta_{\theta'}) \qquad \frac{\delta_\theta^2}{2} = 2\frac{\delta_{\theta'}^2}{2} \Rightarrow \boxed{\delta\theta = \sqrt{2}\,\delta\theta'}$$

- مسئله تک قطبی monopol دوقطبی diapol ← بسیار کاربرد دارد در مواد مثلاً در یک

مثلاً یک ماده تحت یک میدان بارهای مثبت و منفی آن از هم جدا می‌شود



مرکز بار منفی در مرکز کره است

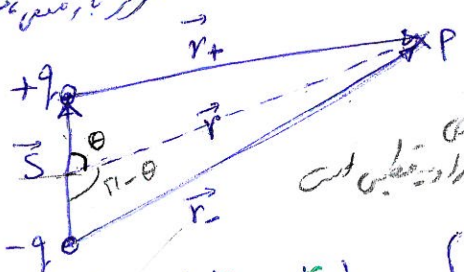


مرکز بار منفی

در حضور E

تعریف دوقطبی: اگر دو بار مثبت و منفی به فاصله مشخص S قرار دهیم به طوری که نقطه‌ای که میدان را در آن می‌خواهیم فاصله‌اش خیلی بیشتر از S باشد.

پتانسیل را در نقطه P بدست می‌آوریم و از روی پتانسیل E را بدست می‌آوریم



در مختصات کروی θ همان زاویه قطبی است

$S < r$

$$\begin{cases} r_+^2 = r^2 + \left(\frac{S}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{S}{2}\right) r\cos\theta \\ r_-^2 = r^2 + \left(\frac{S}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{S}{2}\right) r\cos\theta \end{cases} \qquad \pi-\theta$$

$$\varphi(\vec r) = \frac{q}{r4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r}{r_+} - \frac{r}{r_-}\right)$$

$$r_+^2 = r^2\left[1+\left(\frac{S}{2r}\right)^2 - \frac{S}{r}\cos\theta\right] \Rightarrow \frac{r}{r_+} = \left[1+\left(\frac{S}{2r}\right)^2 - \frac{S}{r}\cos\theta\right]^{-1/2}$$

$$r_-^2 = r^2\left[1+\left(\frac{S}{2r}\right)^2 + \frac{S}{r}\cos\theta\right] \qquad \frac{r}{r_-} = \left[\ \text{〃} + \text{〃}\ \right]^{-1/2}$$

بسط تیلور نیوتن

$$= 1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{S}{2r}\right)^2 - \frac{S}{r}\cos\theta\right] + \frac{3}{8}\left[\left(\frac{S}{2r}\right)^2 - \frac{S}{r}\cos\theta\right]^2 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left[\ \text{〃} + \text{〃}\ \right] + \frac{3}{8}\left[\left(\frac{S}{2r}\right)^2 + \text{〃}\ \right]^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\varphi(\vec r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{S}{r^2}\,\overbrace{\cos\theta}^{P_1(\cos\theta)}} = \frac{\vec P\cdot\hat r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec P\cdot\vec r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$ ← φ دوقطبی

$\vec P = q\vec S$ گشتاور دوقطبی — $\vec S$ و $\vec P$ همراستا هستند

$\vec E = -\vec\nabla\varphi$ $E_r = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = \dfrac{qS}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{2}{r^3}\cos\theta$

چون φ بستگی به ϕ ندارد در مختصات کروی

$E_\phi = \dfrac{1}{r\sin\theta}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\phi} = 0$

$E_\theta = -\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \dfrac{qS}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{\sin\theta}{r^3}$

اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ ‌ به E فقط مؤلفه مماسی دارد شعاعی ندارد

$$\Rightarrow \quad \vec E = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat r + \sin\theta\,\hat\theta\right)$$

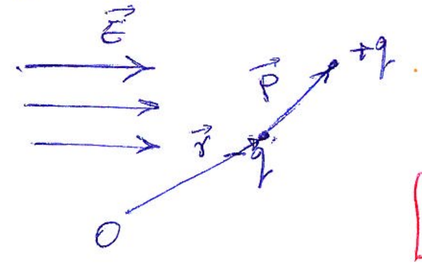
به وسیله این E می‌توان خطوط میدان را پیدا کرد (معادله)

در مختصات کروی: $\dfrac{dr}{E_r} = \dfrac{r\,d\theta}{E_\theta}$ المان طول در کروی: $d\vec r = dr\,\hat r + r\,d\theta\,\hat\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\hat\phi$

$\dfrac{dr}{r\,d\theta} = \dfrac{E_r}{E_\theta} = \dfrac{2\cos\theta}{\sin\theta}$ $\displaystyle\int\frac{dr}{r} = 2\int\cot\theta\,d\theta \;=\; \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = 2\ln(\sin\theta) + C$

$\ln\left(\dfrac{r}{\sin^2\theta}\right) = C$ $\boxed{r = r_0\sin^2\theta}$ → دلخواه

پتانسیلی که E در نقطه $+q$ ایجاد کرده φ است که $\vec E$ خارجی ایجاد کرده



$$U = -q\,\varphi(\vec r) + q\,\underbrace{\varphi(\vec r + \vec S)}_{\to\ \varphi(r) + \vec\nabla\varphi\cdot\vec S}$$ بسط طول $r=r$

$ds_x \times$ مشتق φ — جمله دوم بسط تیلور

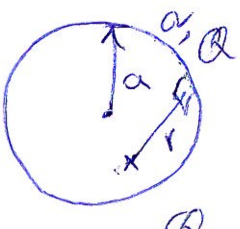
$= q\,\underbrace{\vec\nabla\varphi}_{-E}\cdot\vec S$

$$\boxed{U = -\vec E\cdot\vec P}$$ انرژی پتانسیل برای دوقطبی

$\vec\tau = \vec r\times\vec F = ?$

جلسه نهم:

با توجه به قانون گاوس میدان الکتریکی داخل این کره صفر است به این معنا که پتانسیل چنین کره ای ثابت است مقدار این پتانسیل (کره با چگالی سطحی بار σ)



در نقطه دلخواه داخل کره $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

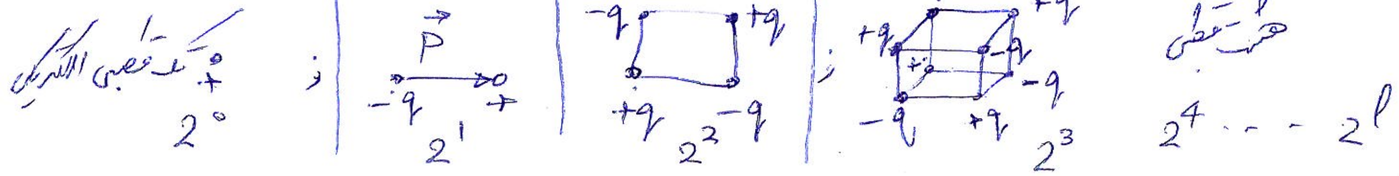
پتانسیل را در هر نقطه داخل حجم این کره می‌توان به دست آورد

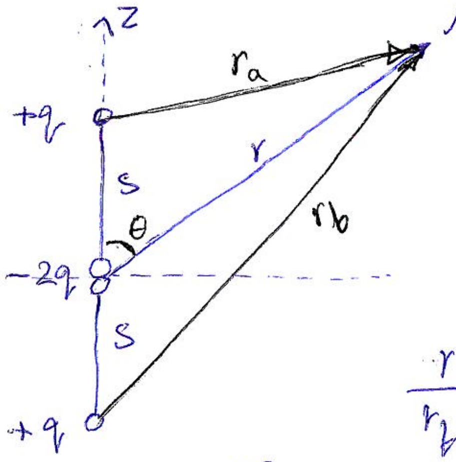
$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \oint_S \frac{\sigma\,da}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

در جلسه ۱۲ ← پتانسیل در فاصله d از مرکز یک کره رسانا با بار Q $= \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}$

می‌توان با انتقال یک دوقطبی و قرار دادن یک دوقطبی دیگر به جای آن با علامت های معکوس می‌توان یک چهارقطبی ایجاد کرد (چهارقطبی)

$E \downarrow$, $\varphi \downarrow$	$E \downarrow$, $\varphi \downarrow$	$E \downarrow$, $\varphi \downarrow$	$E \downarrow$, $\varphi \downarrow$
$\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^2}$	$\frac{1}{r^4}$, $\frac{1}{r^3}$	$\frac{1}{r^{l+2}}$, $\frac{1}{r^{l+1}}$





$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_a} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{r_b}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} - 2\right) \qquad P_n(\cos\theta)$$

$$\frac{r}{r_a} = 1 + \frac{s}{r}\cos\theta + \frac{s^2}{r^2}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$

$$\frac{r}{r_b} = 1 - \frac{s}{r}\cos\theta + \frac{s^2}{r^2}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$

$$\text{جمع} \longrightarrow = 2 + \frac{2s^2}{r^2}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \qquad \overbrace{\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)}^{P_2(\cos\theta)}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(2 + \frac{2s^2}{r^2}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right) = \frac{2qs^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

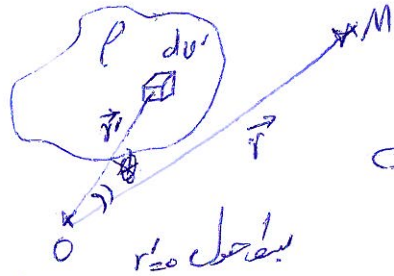
توابعی که در بخش زاویه ای چند قطبی ها وجود دارد همان توابع لژاندر هستند

در تک قطبی زاویه ای نداریم $\longrightarrow P_0(\cos\theta)$

~~در فواصل دور~~ در فواصل دور میدان الکتریکی تک قطبی به نسبت $\frac{1}{r^2}$ کاهش می یابد
اما دوقطبی $\frac{1}{r^3}$ ، چهارقطبی $\frac{1}{r^4}$ یعنی میدان دوقطبی و چهارقطبی سریع تر کاهش می یابند

* برای توزیع کاملاً دلخواه پیوسته می توان پتانسیل را به صورت جمع تک قطبی، دوقطبی، ... بنویسید
برای شکلهای مختلف یک چهارقطبی ضرایب $\frac{1}{r^3}$ میدان فرق می کند

☒ برای یک توزیع دلخواه پیوسته می خواهیم در نقطه M پتانسیل را بیابیم



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r'})\,dv'}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \qquad \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)^{-1/2}$$

بسط حول $r'=0$

$\frac{x}{r}$ cos هادی در امتداد محور x

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r} + \left(x'\frac{\partial}{\partial x'} + y'\frac{\partial}{\partial y'} + z'\frac{\partial}{\partial z'}\right)\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\bigg|_0$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(x'\frac{\partial}{\partial x'} + y'\frac{\partial}{\partial y'} + z'\frac{\partial}{\partial z'}\right)^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} + \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \frac{x}{r^3} \qquad \frac{x}{r} = l$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\bigg|_0 = \frac{y}{r^3} \qquad \frac{y}{r} = m$$

$$\frac{\partial}{\partial z'}\frac{1}{|r-r'|} = \frac{z}{r^3} \qquad \frac{z}{r} = n$$

cos های هادی بردار $\vec{r}$: l, m, n

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^{\,l}}{r_>^{\,l+1}}P_l(\cos\gamma)$$

در این مسئله فضا را به دو قسمت تقسیم کنیم جاهایی که $\vec{r'}<\vec{r}$ جایی که $\vec{r'}>\vec{r}$

در اینجا r' ها کوچکتر از $\vec{r}$ هستند

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{r'})\,dv' \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r'^{\,l}}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

$$\frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2}\cos\theta + \frac{r'^2}{r^3}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\overbrace{\rho(r')dv'}^{\text{بار کل جسم}}}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{r'\rho(r')dv'}{r^2}\cos\theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{r'^2\rho(r')dv'}{r^3}\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)+\dots$$

که ثابت است انتگرال گیری روی کل جسم است

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\int r'\rho(r')dv'\cos\theta + \dots$$

جمله اول مانند این است که همه بار را در نقطه O (مرکز) قرار داده ایم

* اگر یک توزیع بار از نظر بار کل خنثی باشد جمله اول صفر است چون بار کل صفر است مانند یک دوقطبی که از نظر بار خنثی است و جمله اول ندارد

2^0 تک قطبی، 2^1 دوقطبی، 2^2 چارقطبی ...

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

φ_0: به این معنا که همه بار در (حول) مرکز مبدأ قرار گرفته باشد

معمولاً وقتی در فواصل دور می رویم جمله اول غالب است یعنی φ_0 مهم می شود چون به صورت $\frac{1}{r}$ تغییر می کند اما بقیه جملات سریع تر کاهش می یابند بنابراین می توان از جملات دوم به بعد صرف نظر کرد مگر اینکه کل بار صفر باشد و در این صورت جمله اول صفر است

44:45

φ_1 پتانسیل دوقطبی را تداعی می کند جمله سوم پتانسیلش متناسب با $\frac{1}{r^3}$ است ← چهارقطبی را تداعی می کند

** برای یک توزیع کاملاً پیوسته می توانیم پتانسیل را جمع بی نهایت نقطه است که در واقع از چند قطبی ها تشکیل شده که اولین جمله وقتی مهم است که بار خالص داشته باشیم.

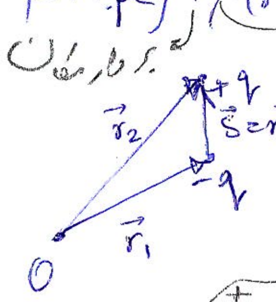
گشتاور دوقطبی

گشتاور توزیع دوقطبی بار

$$\vec{P} = \int \vec{r}' \underbrace{\rho(\vec{r}')dv'}_{\text{بار}}$$

جمله دوم — بردار مکان

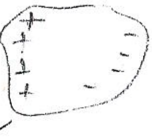
مرکز جرم $r_{cm} = \int \frac{r\, r' dm}{M}$



$$\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad \vec{P} = -q\vec{r}_1 + q\vec{r}_2 = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = q\vec{s}$$

مرکز بار $\quad \vec{r'} = \frac{1}{Q}\int \vec{r}'\overbrace{\rho(r')dv'}^{dq} = \frac{\vec{P}}{Q}$

اگر توزیع بار از نظر بار کل خنثی باشد مرکز بار در بی نهایت قرار دارد



از نظر بار کل صفر است

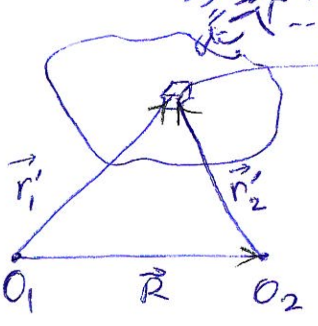
if $Q = 0 \Rightarrow \vec{r'} \to \infty$

مرکز بار فرض معنی ندارد (حول) توزیع بار قرار داشته باشد هر جایی می تواند باشد

Note!

* if $Q = 0 \Rightarrow$ گشتاور دوقطبی الکتریکی به اینکه گشتاور را حول چه نقطه ای بنویسیم بستگی ندارد ** $\vec{P}$ تابعی از مبدأ مختصات است اما

این شکل دوقطبی



$dq' = \rho(r')dv'$

گشتاور دوقطبی نسبت به O_1

$$\vec{P}_2 = \int \vec{r}_2'\,\overbrace{\rho(r')dv'}^{dq'} = \int(\vec{r}_1' - \vec{R})\,dq' = \int \vec{r}_1' dq' - \int \vec{R}\, dq'$$

نسبت به O_2

$$= \vec{P}_1 - \vec{R}Q$$

برداری که از O_1 به O_2 وصل می شود

if $Q \neq 0 \Rightarrow$ همواره می توان نقطه ای را پیدا کرد که گشتاور دوقطبی در آن صفر شود

علت: اگر ~~...~~ مبدأ را مرکز بار در نظر بگیریم گشتاور دوقطبی نسبت به مرکز بار صفر است

$$\vec{r'} = \frac{\vec{P}}{Q}$$

$$\text{if } Q \neq 0 \longrightarrow \vec{r'} = 0 \Rightarrow \vec{P} = 0$$

چهارقطبی

θ زاویه بین $\vec{r}$ و $\vec{r'}$ است پس از حاصلضرب آنها بدست می‌آید

$$r'^2 \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r'})^2}{r^2} - r'^2\right]$$

$x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$

$$= \frac{1}{2r^2}\left[3\sum_{i=1}^{3} x_i x'_i \sum_{j=1}^{3} x_j x'_j - r'^2 \sum_i \sum_j x_i x_j \delta_{ij}\right]$$

$i = j \quad \delta = 1$

$i \neq j \quad \delta = 0$

جمله دوم بسط پتانسیل

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^5}\int \rho(\vec{r'})\,dv'\left[3\sum_{ij} x_i x_j x'_i x'_j - r^2 \sum_{ij} x_i x_j \delta_{ij}\right]$$

روی پریم‌ها بدون

$$\sum_{ij} x_i x_j\left(3x'_i x'_j - r^2\delta_{ij}\right)$$

$$\cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^5}\sum_{ij}\left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right)}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^5}\sum_{ij} x_i x_j \int \underbrace{\rho(\vec{r'})\,dv'}_{dq'}\left(3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij}\right)$$

$i, j = 1, 2, 3$

$\vec{P}$ گشتاور دوقطبی ۳ جمله داشت ~~یک~~ ماتریس ستونی

Q_{ij} تانسور چهارقطبی الکتریکی

$$\boxed{\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^5}\sum_{ij} x_i x_j Q_{ij}}$$

۹ جمله داریم

۹ مؤلفه ← یک ماتریس 3×3

همه این ۹ جمله مستقل نیستند چون یک ماتریس متقارن است

Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}

Q_{12}, Q_{13}, Q_{23}

$Q_{12} = Q_{21}$

تا اینجا اگر ۶ مؤلفه Q_{ij} ها را داشته باشیم بقیه را نیز داریم ← ۳ مؤلفه بالا و قطر مستقل اند

$$Q_{11} = \int \rho(\vec{r'})\,dv'\left(3x_1'^2 - r'^2\right)$$

$$Q_{22} = \int \rho(\vec{r'})\,dv'\left(3x_2'^2 - r'^2\right)$$

$$Q_{33} = \int \quad " \quad \left(3x_3'^2 - r'^2\right)$$

$$\Big\} = 0$$

$$Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$$

$$\Rightarrow Q_{11} + Q_{22} = -Q_{33}$$

این رابطه در همه وضعیت‌ها درست است

تانسور چهارقطبی الکتریکی در کل ۵ مؤلفه مستقل دارد

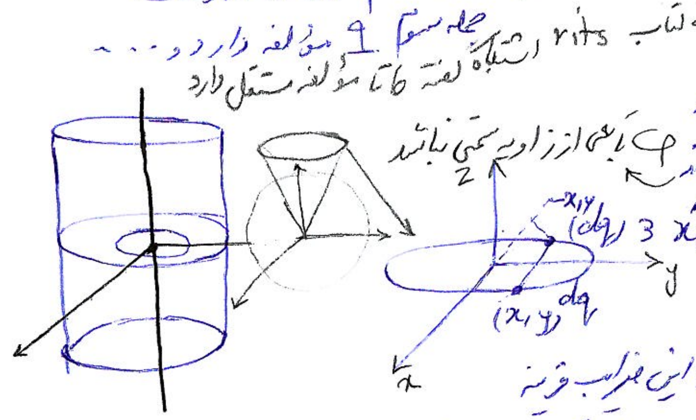
جمله ~~...~~ چهارم یعنی φ_3، ۲۷ جمله دارد... جمله اول یک مؤلفه‌ای φ_0، φ_1 جمله دوم ۳ مؤلفه داشت جمله سوم ۹ مؤلفه دارد و ...

کتاب ritz اشتباه گفته ۶ تا مؤلفه مستقل دارد

تقارن سمتی

حول محور z

$\boxed{\text{VI}}$ اگر توزیع باری داشته باشیم که تقارن ~~محوری~~ داشته باشد حول محور تمام نقاط روی دایره‌ها φ ثابت داشته باشند φ تابعی از زاویه سمتی نباشد



مقدار Q_{12}، $i \neq j$ که $\delta_{ij} = 0$ پس موجود $(dq)\, 3x'_i x'_j$

و هر دو نقطه dq روی دایره یکسان است

پس اما مؤلفه x آنها منفی یکدیگرند و ما روی dq ها با این ضرایب قرینه انتگرال می‌گیریم پس حاصل کل صفر است (چون q های آنها یکسان است)

$Q_{ij} = 0 \quad i \neq j$

اگر تقارن محوری داشته باشیم مؤلفه‌های غیر قطر همه صفر می‌شوند از نظر بار الکتریکی

چون تقارن محوری داریم Q_{11} و Q_{22} با یکدیگر تفاوتی ندارند و مانند این است که جای محور x و y را عوض کنیم که هیچ تغییری نمی‌کند و می‌شد.

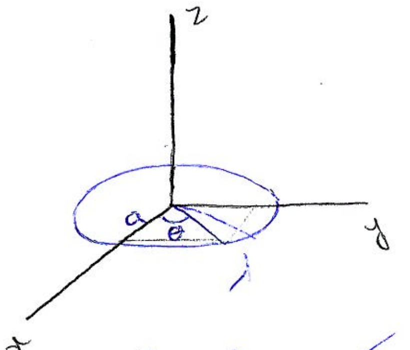
$$\int dq\,(3x'^2-r'^2) = \int dq\,(3y'^2-r'^2) \Longrightarrow Q_{11}=Q_{22}$$

$$\underline{Q_{11}+Q_{22}=-Q_{33}} \qquad 2Q_{11}=-Q_{33}$$

** اگر تقارن محوری حول محور z داشته باشیم تانسور چهارقطبی الکتریکی فقط ۱ مؤلفه مستقل دارد

بنابراین در مسئله‌های مختلف که تقارن‌های خاص می‌دارند با استفاده از تقارنی که دارد خیلی از مؤلفه‌ها را لازم نیست محاسبه کنیم

1:47 مثلاً ۹ مؤلفه تبدیل می‌شود به یک مؤلفه.



مثال: فرض کنید یک حلقه با چگالی بار λ روی آن می‌خواهیم گشتاورهای دوقطبی و چهارقطبی آن را نسبت به مرکز بدست آوریم

$$\vec{P}=\int \vec r'\,\underbrace{\rho(r')dv'}_{dq'}$$

$$\vec{P}=\int \vec{r}'\,\lambda a\,d\theta \qquad \vec r' = x'\hat i + y'\hat j + z'\hat k$$

$$=\int_0^{2\pi}(a\cos\theta\,\hat i + a\sin\theta\,\hat j + 0\hat k)\,\lambda a\,d\theta = 0$$

اگر بار، توزیع باری غیر صفر باشد و روی مرکز بار $\vec{P}$ صفر است $Q\neq 0$

چون تقارن محوری داریم Q_{ij} صفر می‌شوند و فقط باید Q_{33} را بدست آوریم

$$Q_{33}=\int dq'(3z'^2-r'^2)$$

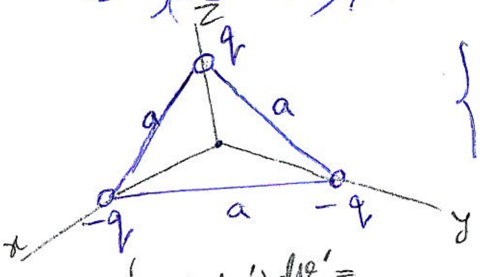
$$=\int -a^2\,dq = -a^2\lambda\,2\pi a = -2\pi a^3\lambda$$

$$Q_{11}=Q_{22}=-\frac{1}{2}Q_{33}=\pi a^3\lambda$$

علی‌الاصول جملات اول را داریم

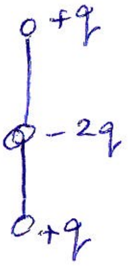
$$Q_{33}=\int(3z'^2-r'^2)\rho(r')\,dv' = \int(3z'^2-x'^2-y'^2)\rho(r')\,dv'$$

مثال: گشتاور دوقطبی این توزیع بار را بدست آورید و تانسورهای Q_{ij} را بدست آورید. مرکز را وسط مثلث بگیرید.



$$\begin{cases}\vec P = ?\\ Q_{ij}=?\end{cases}$$

$$\vec{P}=\int r'\rho(r')\,dv' =$$



سؤال: خطوط میدان یک چهارقطبی خطی در امتداد y
a یک ثابت است

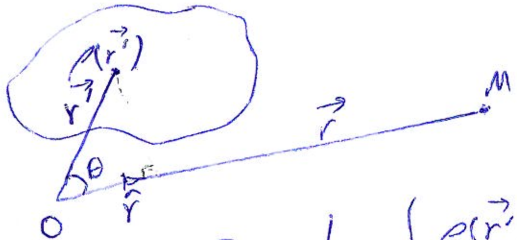
در مختصات دکارتی

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^2$$

$$x^2+y^2=kx^{4/3}$$

اگر ... $r=r_0$ در نظر بگیری
دوقطبی
باز کنید حجم دو دکارتی بدست می‌آید

جلسه دهم



در حالت کلی میدان نقطه‌ای در نقطه‌ای مانند M
φ در نقطه M :

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec r')dv'}{|\vec r-\vec r'|}=$$

$$\vec P=\int\vec r'\rho(\vec r')dv'$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r}+\frac{\vec P\cdot\hat r}{r^2}+\frac{1}{2r^3}\sum_{i,j}x_ix_jQ_{ij}+\cdots\right]$$

$$\to\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int\overbrace{\vec r'\rho(\vec r')dv'}^{\vec P}\cos\theta$$

θ زاویه بین r و r' است ⟸ $r'\cos\theta=\vec r'\cdot\hat r$

اگر توزیع بار را بتوانیم به صورت یک تک قطبی علاوه بر یک دوقطبی
که یک راستای دلخواه می‌تواند داشته باشد با $\vec P$ این $\vec P$

روی θ هم انتگرال گرفته می‌شود. جمله دوقطبی است
$\vec P$ بدانیم $\frac{\vec P\cdot\hat r}{r^2}$ در

$$Q_{ij}=\int\left(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij}\right)\rho(\vec r')dv'$$

گشتاور تانسور ~~دوقطبی~~ چهارقطبی

در حالت کلی ۹ مؤلفه دارد که ۶ تا مستقل اند

$$Q_{ij}=\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}&Q_{13}\\&Q_{22}&Q_{23}\\&&Q_{33}\end{pmatrix}$$

ریست ماتریس متقارن است و جمع قطر صفر می‌شود
۵ تا مستقل دارد.

$x_1=x$
$x_2=y$ $x_3=z$

$$Q_{33}=\int\left(2z'^2-x'^2-y'^2\right)\rho(\vec r')dv'$$

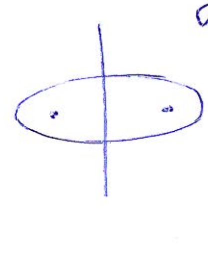
باشد
تقارن محوری بخواهیم

if $Q_{33}>0$ →

کشیده

$2z'^2>x'^2+y'^2$

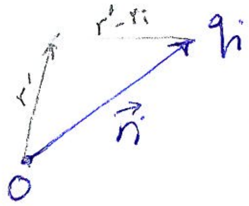
$Q_{33}<0$



یادآوری:

$$\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \varphi = -\int_{ref}^{r} \vec{E}\cdot dr$$

تمام این عبارت های برای توزیع بار نقطه ای هم درست است. برای یک توزیع نقطه ای هم می توان [illegible] دو قطبی، چهار قطبی ... تعریف کرد [illegible]



$$\varphi(\vec r) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |r - r_i|} \quad ; \quad \rho(\vec r) = q_i\,\delta(\vec r - \vec r_i)$$

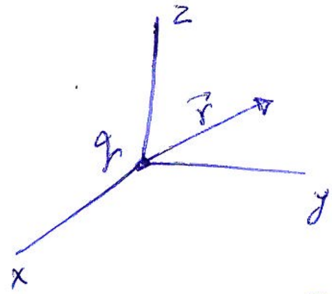
δ همه جا صفر غیر از نقطه $\vec r_i$

در حالت کلی $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec r')\,dv'}{|\vec r - \vec r'|}$

توسط تابع دلتا دیراک می توان برای توزیع بار نقطه ای هم چگالی بار بنویسیم.

برای توزیع نقطه ای $= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{q_i\,\delta(\vec r' - \vec r_i)\,dv'}{|\vec r - \vec r'|} = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec r - \vec r_i|}$

می توان این را تعمیم داد.



$$\nabla\cdot(E) = \nabla\cdot\left(\frac{q\vec r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) = \frac{q\,\delta(\vec r)}{\varepsilon_0}$$

قانون گاوس می گوید

$$\Rightarrow \nabla\cdot\left(\frac{\vec r}{r^3}\right) = 4\pi\,\delta(\vec r)$$

if $r = 0$

داریم: $\vec\nabla\cdot\left(\frac{\vec r}{r^3}\right) = \left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)\cdot\vec r + \frac{1}{r^3}\,\overbrace{\nabla\cdot\vec r}^{3} = 0$ if $r \neq 0$

$\nabla f(r) = \frac{\vec r}{r}\frac{df}{dr}$; $\quad \frac{-3}{r^4}\frac{\vec r}{r}\cdot\vec r \quad r^2$

پس $\nabla\cdot\left(\frac{\vec r}{r^3}\right)$ تکینگی در $r=0$ دارد

دلتای دیراک این امکان را فراهم می کند که عبارت هایی که از قضیه دیورژانس بدست می آیند درست باشند

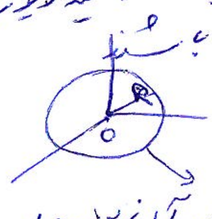
قضیه دیورژانس $\int_V \nabla\cdot F\,dv = \oint_S F\cdot\hat n\,da$

زاویه فضایی

$$\int_V \nabla\cdot\left(\frac{\vec r}{r^3}\right)dv = \oint_S \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\,da = \int d\Omega = 4\pi$$

$$= \int_V 4\pi\,\delta(\vec r)\,dv = 4\pi$$

تعریف $\delta(\vec r)$



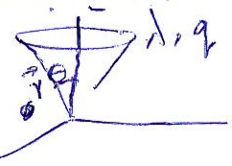
با توجه سطحی که بار q درآن بوده و یا در مبدأ تکینگی دارد

دیدیم عبارت بدست آمده از قضیه دیورژانس استفاده کردیم به 4π رسیدیم از تابع دیراک هم استفاده کردیم به همان 4π رسیدیم بنابراین * تابع دلتای دیراک این امکان را فراهم می کند که حتی برای زمانی که تکینگی در

27:30 عبارت ها و توابعی که داریم به کار ببریم بدون اینکه مشکلی پیش آید عدد و کمیت درست به ما می دهد.

28:10 بنابراین هر تابع توزیعی را اگر به صورت گسسته باشد یا پیوسته در بخشی از فضای ما حتی از پارامترهای در یک نقطه خاص از آن پارامترها قرار گرفته باشد برحسب تابع دلتای دیراک برحسب آن پارامتر بنویسیم

VI مثلا حلقه ای که قبلا بیان شد در تمام نقاط فضا به جز در یک r خاص بار آن صفر است بنابراین نسبت به پارامتر r یک تابع دلتای دیراک است و در یک θ مشخص. چنین توزیع هایی را می توان برحسب تابع دلتا دیراک بنویسیم



λ, q

پتانسیل بیان شده برای φ به صورت بسط دو قطبی، چهار قطبی و ... بود. حالت هایی است که مسئله را به صورت تقریبی حل می کنیم اما اگر این توزیع ها شکل هندسی مشخص و خاصی داشته باشند می توانیم دقیق حل کنیم و دقیق حل کردن یعنی حل کردن معادله لاپلاس است زیرا

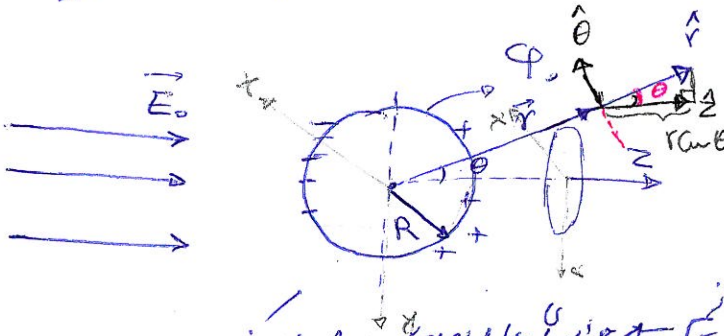
$$\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \to \nabla\cdot(-\nabla\varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

اگر در هر نقطه از فضا ρ را بدهند پتانسیل در معادله پواسون صدق می کند.

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2\varphi = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}}$$ معادله پواسون

اگر φ را در نقطه ای (M) که بار وجود ندارد بخواهیم بدست آوریم $(\rho=0)$ ⇐ پتانسیل در معادله لاپلاس $\nabla^2\varphi=0$ صدق می کند در این صورت اگر بتوانیم شرایط مرزی را اعمال کنیم φ را بدست آورده ایم

$\rho=0 \to \nabla^2\varphi=0$



۳۵.۳۶

مسئله: در میدان یکنواخت یک رسانای کروی (اگر یک سطح هم پتانسیل است چون میدان داخلش صفر است)

میدان الکتریکی یکنواخت E_0 در تمام فضا وجود دارد.

حال می خواهیم پتانسیل را با وجود این رسانا پیدا کنیم ⇐ جواب معادله لاپلاس را پیدا می کنیم

چون کره است ← از هماهنگ های منفرد در تمام فضا استفاده می کنیم چون تقارن سمتی داریم

φ تقارن سمتی $\Rightarrow \varphi_{out} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$

در داخل کره پتانسیل ثابت است و φ_0 است.

۳۷،۴۰

① $r \gg R \to \vec{E} = \vec{E}_0 = E_0\hat{z} \Rightarrow \varphi = -E_0 z + C$

شرط مرزی ۱: چون در تمام فضا E_0 داریم توقع داریم اگر به بی نهایت برویم E همان E_0 باشد

② $r=R \to \varphi=\varphi_0$ — روی سطح رسانا $\varphi=\varphi_0$

$r\to\infty \to \frac{1}{r^{n+1}}=0$ فقط بسط باقی می ماند

① $\to \sum A_n r^n P_n(\cos\theta) = -E_0 \overbrace{r\cos\theta}^{z} + C$

P_n ها عمود و مستقل اند. تساوی ثابت دو طرف باید برابر باشند

$\boxed{A_0 = C}$

$A_1 r\cos\theta = -E_0 r\cos\theta \to \boxed{A_1 = -E_0}$

$A_n = 0\ ;\ n \geq 2$

جمله ثابت های دو طرف تساوی باید برابر باشند C — $P_0 = 1$, $P_1 = \cos\theta$

② $\xrightarrow{r=R} \varphi_0 = A_0 + A_1R\cos\theta + \sum_{n=0} B_n R^{-(n+1)}P_n(\cos\theta) \Rightarrow A_0 + B_0\frac{1}{R} = \varphi_0$

$\to C = \varphi_0 - \frac{B_0}{R} = A_0$

44:10 $A_1R + \frac{B_1}{R^2} = 0 \to \boxed{B_1 = -A_1R^3 = E_0R^3}$

$B_n = 0,\ n\geq 2 \to$ از $n\geq2$ چون جمع تعدادی از P_n ها با ضرایب B_n صفر می شود پس باید B_n ها صفر باشند چون در طرف دیگر تابعی از $\cos\theta$ نداریم

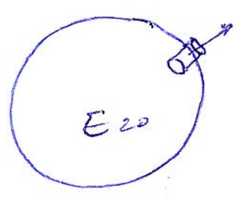
$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$ ← $\varphi = A_0 + A_1R\cos\theta + \frac{B_0}{r} + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta = \varphi_0 - \frac{B_0}{R} - E_0 r\cos\theta + \frac{B_0}{r} + \frac{E_0R^3}{r^2}\cos\theta$

17 $\Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi_0 + B_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) - E_0 r\cos\theta\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)}$ ← جواب کامل

تمام شرایط مرزی را ارضا می کند

اگر یک رسانای بدون بار خالص باشد $B_0 = 0$ اگر بار خالص صفر باشد $\leftarrow B_0 = 0$

$$E = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\theta} = \left[\frac{B_0}{r^2} + E_0\cos\theta\left(1 + \frac{2R^3}{r^3}\right)\right]\hat{r} + \dots\ \hat{\theta}$$



$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

اگر بخواهیم چگالی بار روی رسانا بدست آوریم باید عنصر استوانه‌ای در نظر بگیریم چون E عمود است E_{θ} صفر است فقط E در جهت $\hat{r}$ (شعاعی) دارد

$$\sigma = \varepsilon_0 E\Big|_{r=R} = \frac{\varepsilon_0 B_0}{R^2} + 3E_0\varepsilon_0\cos\theta \longleftarrow$$

چگالی بار روی رسانا بر حسب θ

$\varphi \leftarrow 2\pi,\ \pi \rightarrow \theta$ $\quad 0<\theta<\pi \quad 0<\varphi<2\pi$

کل بار روی رسانا $Q = \int \sigma\, da = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\varepsilon_0 B_0}{R^2} + 3E_0\varepsilon_0\cos\theta\right)R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \varepsilon_0 B_0 4\pi + 3\varepsilon_0 E_0 R^2 \frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\pi} \times 2\pi$

$= 4\pi\varepsilon_0 B_0$

برای کره بدون بار خالص $\longrightarrow Q = 0 \longrightarrow B_0 = 0$

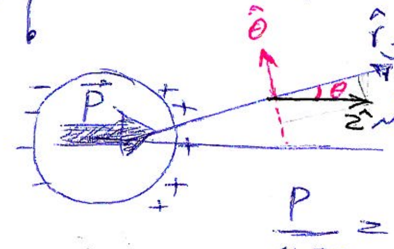
$$Q = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\varphi = \varphi_0 - E_0 r\cos\theta\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)} \\ \vec{E} = E_0\cos\theta\left(1 + \frac{2R^3}{r^3}\right)\hat{r} - E_0\sin\theta\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\hat{\theta} \end{cases}$$

عبارت هایی که R^3 $\frac{1}{r^3}$ دارد که تداعی کننده یک دوقطبی است عبارت‌هایی که بدون r است را از هم تفکیک کنید

$$\vec{E} = E_0\underbrace{\left(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}_{\hat{z}} + E_0\frac{R^3}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right) \quad (*)$$

$$E_{\text{دوقطبی}} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

اگر B_0 صفر
چگالی بار تابعی از $\cos\theta$ است
در $\theta = 0$، σ مثبت
$\theta > \frac{\pi}{2}$ σ منفی می‌شود $\Leftarrow$ یک توزیع بار منفی سمت چپ است و یک توزیع بار مثبت سمت راست



و مانند یک دوقطبی است که دارد یک میدان شبیه E دوقطبی در فضا ایجاد می‌کند P را با استفاده از $(*)$ می‌توانیم بدست آوریم

$$\frac{P}{4\pi\varepsilon_0} = E_0 R^3$$

that is $\boxed{P = 4\pi\varepsilon_0 E_0 R^3}$ $\longleftarrow$ مقدار گشتاور دوقطبی این کره

$\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$

$\hat{z}\cdot\hat{r} \qquad \hat{z}\cdot\hat{\theta}$

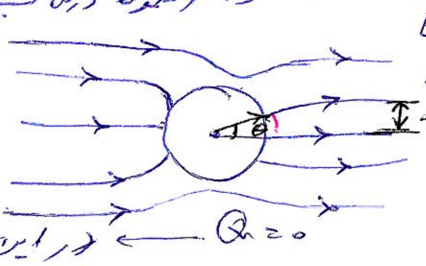
بردار $\hat{z}$ یک تصویر روی $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ دارد

چیزی که بدست آوردیم مثل این است که (انگار که) میدان الکتریکی جمع E_0 اولیه است + میدانی که این دوقطبی (کره) ایجاد کرده! پتانسیل در ∞ صفر نیست یک مقدار مشخص دارد

برای اینکه بدانیم φ کجا صفر است φ_0 را صفر قرار می‌دهیم و $\vec{\theta}$ و $\vec{r}$ را بدست می‌آوریم

این میدان را می‌توان به شکل برداری (معمولاً در کتاب‌ها اینجا است) نوشت!

فرهاد
گورکانه $\quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{P}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3}\right)$



در بی‌نهایت $E = E_0$

خطوط میدان $l = ?$

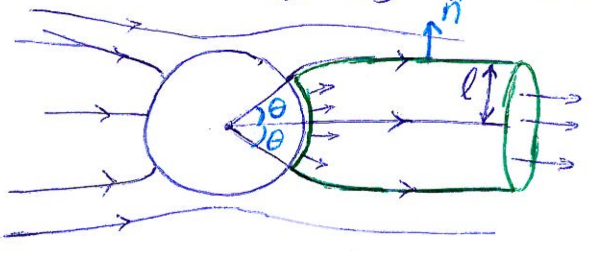
در این حالت خطوط میدان ترکیب همان میدان است بعلاوه خطوطی که برای دوقطبی داشتیم $\longleftarrow Q = 0$

وقتی مبدأ پتانسیل را داریم در واقع داریم این را به یک توزیع بار ربط می دهیم خود به خود در دل این ها وابستگی آن ها وجود دارد

1:14

می خواهیم بدانیم اگر یک خط بار با زاویه θ از کره خارج شود در بی نهایت فاصله خط میدان آن با محور z چقدر است؟ ℓ

۱) از قانون گاوس استفاده می کنیم در یک سطح بسته



خطوط میدان برای سطح جانبی شارش صفر می شود (طبق قانون گاوس)

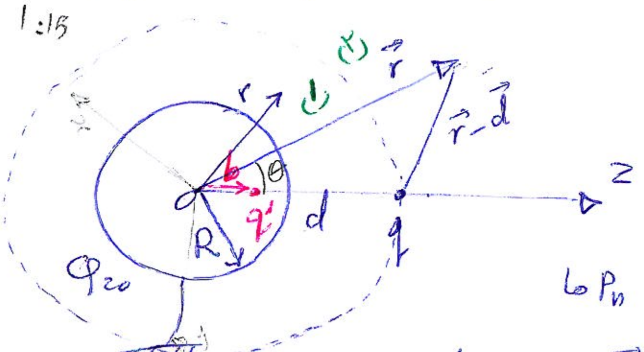
E در نزدیکی سطح کره را پیدا کردیم: میدان الکتریکی نزدیک کره را φ

$$\int \vec E\cdot\hat n\, da = \pi \ell^2 E_0$$

چون E_0 بر سطح انتهایی سطح بسته گاوس اینجا عمود است

شار در بی نهایت $\varphi = \pi \ell^2 E_0$

1:15



مثال: کره ای که $\varphi = 0$ به زمین وصل است یک بار نقطه ای q جلوی آن قرار داده ایم پتانسیل در کل فضا؟

در نقطه $\vec r$ تقارن ϕ (سمتی) دارد

کره یک توزیع بار پیدا کرده چون به زمین وصل است

بر حسب P_n ها

پتانسیل در $\vec r$ = پتانسیل q در $\vec r$ + پتانسیل کره در $\vec r$ (بیرون)

$$\frac{1}{|\vec r - \vec r'|} = \sum \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{out} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right]P_n(\cos\theta)$$

اندازه $|\vec r - \vec d|$

(۱) $r<d$

داخل محیط $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}\frac{r^n}{d^{n+1}}P_n(\cos\theta) + \sum\left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right]P_n(\cos\theta)$

(۲) بیرون محیط $\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{d^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta) + \sum\left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right]P_n(\cos\theta)$

$$r = R \longrightarrow \varphi_1 = 0 = \sum\left(\frac{R^n q}{d^{n+1}4\pi\varepsilon_0} + A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$$

شرایط مرزی: ضرایب باید صفر باشند

$$\Rightarrow A_n R^n + B_n R^{-(n+1)} = -\frac{qR^n}{4\pi\varepsilon_0 d^{n+1}} \Rightarrow A_n + B_n R^{-2n-1} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 d^{n+1}} \quad (*)$$

1:29 $r\to\infty \Rightarrow \varphi_2 = 0$

در بی نهایت پتانسیل صفر است (φ_2 را باید به کار ببریم)

در $r=\infty$، $B_n r^{-(n+1)}$ و $\frac{d^n}{}$ صفر می شوند فقط $A_n r^n$ می ماند

$$\Rightarrow A_n = 0$$

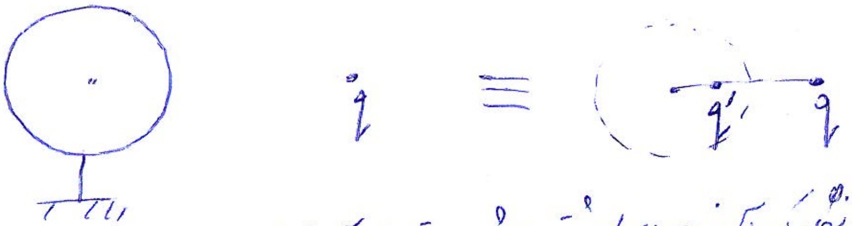
$$(*) \to B_n = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^{2n+1}}{d^{n+1}} = \frac{-qR/d}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{d}\right)^n \qquad q' = -\frac{qR}{d}\,,\quad \frac{R^2}{d} = b$$

$$= \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}b^n$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0|\vec r - \vec b|}$$

$$\Rightarrow \varphi_{out} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q' b^n}{4\pi\varepsilon_0 r^{n+1}}P_n(\cos\theta)}$$

جلسه دهم پتانسیل یک بار q در فاصله d از مرکز کره را تولید می‌کند یعنی یک بار نقطه‌ای که در b باشد و q' داخل کره است چون $b = \frac{R^2}{d} < R$ } یک بار نقطه‌ای q که در q_0 باشد q' پتانسیلی که ایجاد می‌کند معادل با این صورت که یک بار نقطه‌ای q و یک کره داشته باشیم



این مسأله به روش تصویر برای حل معادله پتانسیل صدق می‌دهد

اصطلاحاً می‌گویند q' تصویر q است انگار که آینه محدبی داشته باشید مقابل آن بایستید و خود را در آن ببینید تصویرتان داخل این آینه محدب قرار گرفته

آن تصویر و بار q را در نظر بگیرید و φ را بدست آورید و اگر بتوانید با یک بار تصویری که در محیط رسانا قرار بگیرد و شرایط مرزی را ارضا کند چون جواب معادله لاپلاس یکتاست جواب را بدست آورده اید

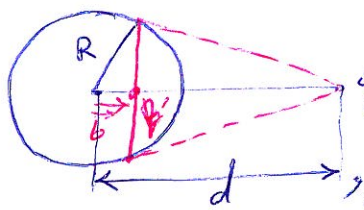
چون سطح کره در ∞ هم پتانسیل اند

در این مسئله در ∞ باری وجود ندارد و بار جابجا نشده داریم اما در مسئله قبلی چون در ∞ نیز بار وجود داریم بار جابجا نشده ندارید. در این مسئله اگر بار کره Q_0 بود همین روش درست بود فقط یک Q دیگه نیز روی مرکز کره داشتیم (سپس پتانسیل ∞ است)

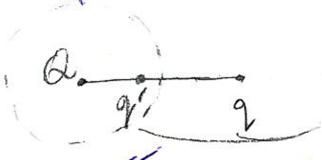
میدان توزیع بار جابجا نشده در بی‌نهایت ها صفر هستند

$|q'| < |q|$ $\quad q' = -q\frac{R}{d}$ $\quad b = \frac{R^2}{d}$

یک هندسه ساده



اگر از بار q دو مماس بر دایره رسم کنیم و دو نقطه دایره را به هم وصل کنیم محل q' را بدست می‌آوریم! (-)



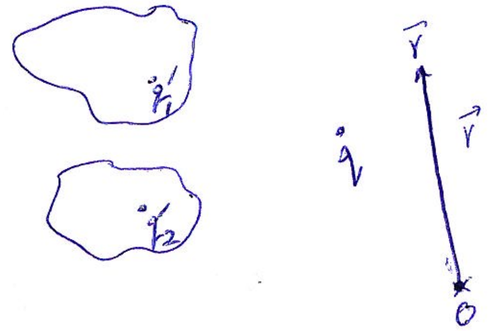
این دو پتانسیل شان روی کره صفر می‌شود

اگر در تمام فضا E داشته باشیم یعنی در ∞ هم بار وجود دارد پس بار جابجا نشده نیست اما اگر توزیع بار جابجا نشده داشته باشیم دیگر در ∞ ها بار وجود ندارد و φ در ∞ صفر در نظر گرفت

هموار و متوازن

جلسه یازدهم

روش تصویر



فرض کنید تعدادی رسانا داشته باشید در فضا و می‌خواهیم پتانسیل را در نقطه $\vec{r}$ تعیین کنیم

رساناها بار دارند بار القایی یا باری که روی آنها قرار گرفته شده

بارهایی که پتانسیل آنها مشخص است مثل $q \rightarrow \varphi_1$ و پتانسیل توزیع بارهایی مثل رساناها که φ آنها مشخص نیست را با φ_2 نشان می‌دهیم

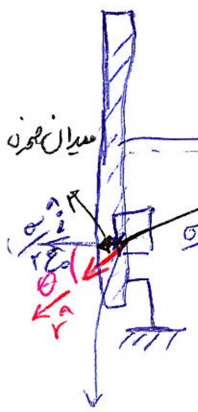
$$\varphi = \underbrace{\varphi_1}_{\text{دانسته شده}} + \underbrace{\varphi_2}_{\text{نمی‌دانیم}} = \varphi_1 + \int \frac{\sigma(\vec{r}')\, da'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|}$$

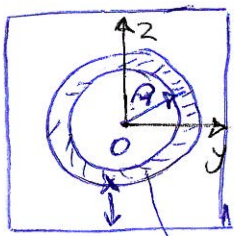
8:30

گاهی در یک شرایط خاص می‌توانیم به جای φ_2 بارهایی را جایگزین کنیم که همان کاری را بکنند که توزیع بار روی رسانا‌ها و در عبارت انتگرالی انجام می‌دهند. اگر بتوانیم جوابی برای معادله لاپلاس پیدا کنیم به هر روشی از جمله روش تصویر که شرایط مرزی را ارضا کند جواب φ همان است.

* روش تصویر کمک می‌کند بارهایی به جای رسانا‌ها جایگزین کنیم که درون رسانا هستند و این بارهای تصویری (این بارها) قطعاً داخل رسانا هستند * پتانسیلی که بدست می‌آوریم برای بیرون این رسانا‌ها است در حالی که بار تصویری هست φ که بدست می‌آوریم (با این روش) درست نیست و بارهای جایگزین به همان شرایط مرزی مسئله را ارضا کنند. بار تصویری حتماً درون رسانا است.

مثال: فرض کنید یک صفحه رسانا تخت بی‌نهایت طویل داریم و بار نقطه‌ای q در فاصله d (از صفحه) و دیگر طرف دیگر که q نسبت رسانا است یا با فاصله هم نسبت. بار کل روی صفحه رسانا $-q$ (القا) برابر q یک چگالی بار سطحی روی صفحه رسانا القا می‌شود. می‌توان چگالی این بار را حساب کرد به صورت σ در بار q می‌توانیم با این چگالی پتانسیل را در یک نقطه فضا بدست آوریم





تمام نقاطی که در این قسمت هستند دارای یک چگالی مشخص اند

$r=\sqrt{\rho^2+d^2}$

در این نقطه چون داخل رسانا است باید میدان صفر باشد

جمع میدان حاصل از q و صفحه باید صفر شود

میدان در نزدیکی صفحه بی‌نهایت طویل $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat i + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat r + \vec E_{\text{صفحه}} = 0 \qquad \hat r \to \hat i\cos\theta + \hat j\sin\theta$$

همچنین میدان چگالی بار حاصل از q روی صفحه صفر نمی‌شود

مؤلفه $\hat i$ $\longrightarrow$ $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = 0$

$E_{\text{صفحه}}$ مؤلفه $\hat i$ ندارد چون میدان صفحه روی سطح صفحه است و راستای x عمود بر صفحه است.

$\cos\theta = \frac{d}{r}$, $\rho^2 = y^2+z^2$

چگالی بار سطحی القایی روی صفحه

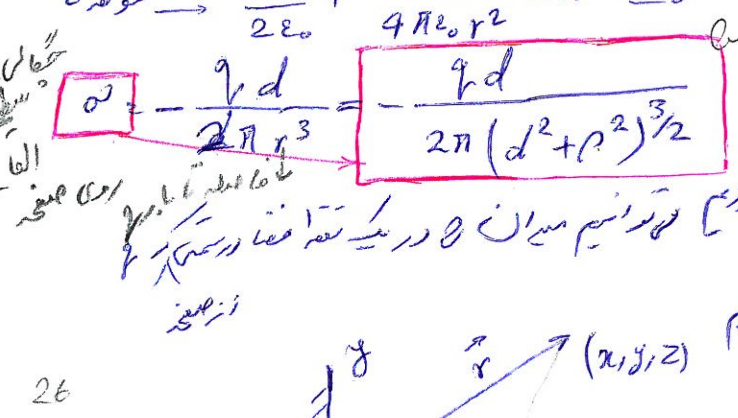
$$\boxed{\sigma} = -\frac{qd}{2\pi r^3} = \boxed{-\frac{qd}{2\pi\left(d^2+\rho^2\right)^{3/2}}}$$

با فاصله ρ از مبدأ

حال σ صفحه که تقارن دایره‌ای روی صفحه دارد را بدست آوردیم است پیدا کنیم. می‌توانیم میدان را در یک نقطه فضا در سمت راست از صفحه

به جای تمام این عملیات‌ها می‌توانیم از روش تصویر استفاده کنیم. اگر یک $q'=-q$ را در سمت دیگر صفحه به جای صفحه در نظر بگیریم پتانسیل روی تمام صفحه همان صفر می‌شود که در مسئله گفته شده بود $V=0$ پس q' شرط مرزی را ارضا کرده چون قضیه یکتایی داریم جواب این روش همان جواب φ است

26



19 در سمت x مثبت

$$\varphi = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}}_{|r-(a,0,0)|} - \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}}_{|r-(-a,0,0)|} \longrightarrow \varphi_2$$

زیرا

$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(x_r - x_{r'})^2 + (y_r - y_{r'})^2 + (z_r - z_{r'})^2}$ = فاصله $\vec{r}$ و $\vec{r}'$ این φ

inference : تذکر ashaming : در فضای سه بعدی

در $x=0$ دو عبارت با هم برابرند همدیگر را خنثی می کنند و $\varphi = 0$ پس کاملاً شرط را ارضا می کند

اگر بخواهیم میدان E را در جهت عمود (x) بدست آوریم

روی سطح رسانا میدان الکتریکی باید عمود بر سطح باشد

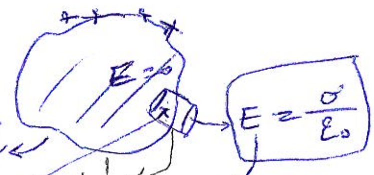
$\sigma = \varepsilon_0 E_x =$

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{-q\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{+a}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{a}{(\quad)^{3/2}}\right]$$

روی سطح رسانا

فیزیک ۲

۳۸:۰۹



$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

سطح رسانا

سطح گاوسی

میدان در نزدیکی رسانا

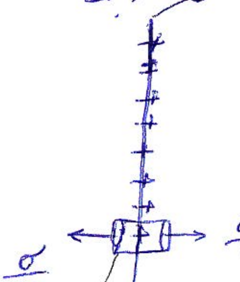
میدان این نقطه مربوط به این المان و بقیه بارها در این نقطه

$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ بیرون رسانا

$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

مجموع این ها صفر می شود داخل رسانا

یک لایه سطح با بار مثبت (طویل



$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

سطح گاوسی

توزیع بارهایی که در سمت راست لایه وجود دارد باید میدان در نقطه سمت چپ سطح را صفر کند

میدان سمت چپ را باید صفرش کنیم

q در نقطه سمت چپ یک میدان ایجاد می کند که جمع آن با $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ باید صفر شود

ادامه سوال

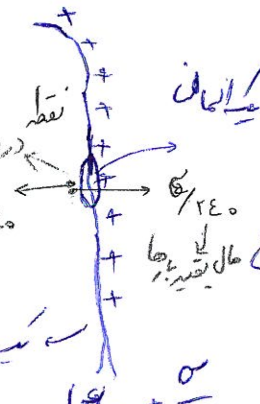
$$\boxed{\sigma = \frac{-qa}{2\pi(a^2+\underbrace{y^2+z^2}_{\rho^2})^{3/2}}}$$

$$Q = \iint_{-\infty}^{+\infty} \sigma \, dy\, dz = -q$$

یعنی باری که سمت چپ القا شده همان بار تصویری $-q$ است. بار تصویری معادل کل باری است که روی صفحه القا شده

بیرون رسانا

میدانی که بقیه بارهای روی رسانا ایجاد می کنند با میدان همان المان برابرند



نقطه در داخل رسانا

$\sigma/2\varepsilon_0$ $\sigma/2\varepsilon_0$

یک المان

مال المان (صفحه طویل)

مال بقیه بارها

یک سطح رسانا

$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

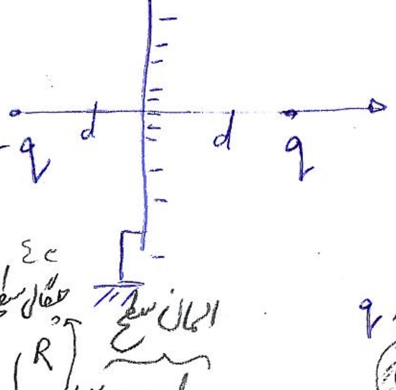
میدان در نزدیکی رسانا وقتی خیلی به سطح رسانا نزدیک شویم مانند این است که سطح رسانا در آن قسمت (المان) یک صفحه طویل با بار مثبت است. میدان در نقطه نزدیک این سطح میدان المان میدانی که بقیه بارها در آن نقطه (نزدیک رسانا) ایجاد می کنند

۴۰:۱۰

۴۱:۲۶

$$\int \frac{\rho\, d\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{z^2+\rho^2}}$$

$$\int_0^L \frac{ds}{(s^2+R^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^2}\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+R^2}}\right)\Bigg|_0^L$$



$-q$ d d q

۴۰

چگالی سطحی

المان سطح

$$\int_0^R \sigma\, \underbrace{2\pi r\, dr}$$

نتیجه : اگر یک بار q روی صفحه رسانایی که به زمین وصل است چگالی بار σ را القا کند. نیرویی که صفحه رسانا به q وارد می کند چقدر است؟ راه ۱ $\sigma \rightarrow E \rightarrow F$

روش ۲ به جای صفحه رسانا یک بار تصویر $-q$ در نظر می گیریم

نیرویی که صفحه رسانا به q وارد می کند دقیقاً برابر نیرویی است که میدان $-q$ به q وارد می کند

dr

المان سطح

اگر چگالی حجمی داشته باشیم برای حساب کردن بار باید المان حجم زیر انتگرال بنویسیم

تذکر مهم : برای محاسبه بار روی صفحه رسانا در یک دایره فرضی به مرکز مبدأ مختصات و شعاع R :

در کل اگر چگالی سطحی داشته باشیم باید المان سطح زیر انتگرال بنویسیم

$$F = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2d)^2} \qquad F = -q\vec{\nabla}\varphi_2 \Big|_{x=a}$$

$x=a$ ← در محلی که q قرار دارد وارد بر q

φ_2 ← میدان ناشی از بار تصویری

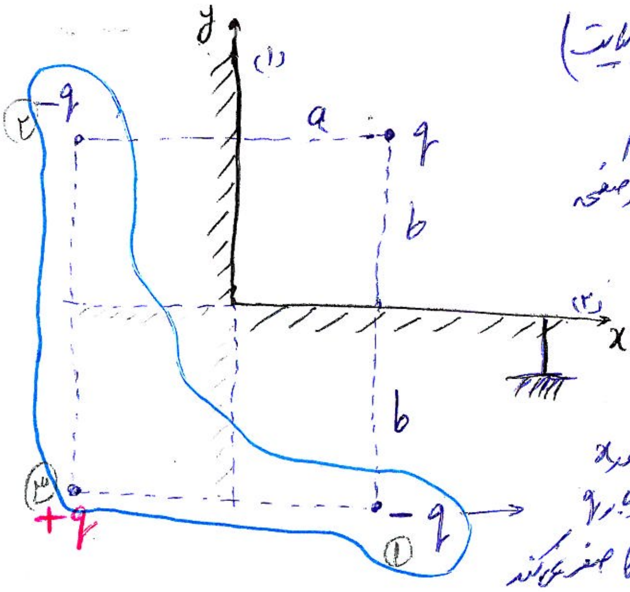
برای بدست آوردن $\vec{\nabla}F$ از نه میدان ناشی از q کل.

$F = qE$ باید E ناشی از بار تصویری $-q$ را حساب کنیم

✱ نکته: اگر صفحه رسانا به زمین وصل نباشد نمی‌توانیم از روش تصویر استفاده کنیم اگر پتانسیل V داشته باشد چون صفحه تا بی نهایت است. با این روش در بی نهایت‌ها به تناقض و مشکلاتی می‌رسیم و این روش دیگر درست نیست. اما برای کره می‌توانیم پتانسیل غیر صفر داشته باشیم چون داریم شعاع را محدود می‌کنیم. در صفحات بی نهایت برای استفاده از روش تصویر، حتماً باید صفحه رسانا به زمین وصل باشد

حتی اگر محدود کنیم و محدود کنیم باز هم نمی‌توان از روش تصویر استفاده کرد

مسئله: دو گوشه رسانا تحت عمود بر هم (نیمه بی نهایت در جهت مثبت و z آن تا بی نهایت)



با تصویر می‌توانیم شرایط مرزی که φ روی رسانا صفر باشد را ارضا کنیم

اگر بار $-q$ را سمت دیگر صفحه روی y قرار دهیم باز هم پتانسیل در صفحه صفر نمی‌شود

دو بار ① و ③ پتانسیل در دو طرف صفحه رسانا y را صفر می‌کند

دو بار q و ② نیز پتانسیل را در دو طرف y صفر می‌کند

به همین طریق برای x

تا پتانسیل صفحه رسانا روی محور x را صفر کند اما این بار و بار q پتانسیل صفحه رسانا روی y را صفر می‌کند

این ۳ بار، بار تصویری نامیده می‌شوند

جمع این سه بار همان بار کل است که در این دو صفحه رسانا القا شده است

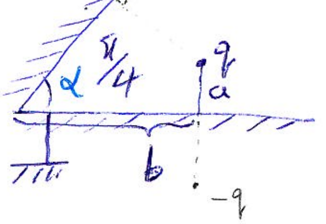
✱ پتانسیل را در یک نقطه از فضا در $\frac{1}{4}$ بالا راست حساب کنید

1) $\varphi = ?$ → φ ناشی از q و ①، ②، ③ را حساب کنید

2) $\sigma_x = \varepsilon_0 E_x \qquad \sigma_y = \varepsilon_0 E_y$ → می‌توانید بار کل را حساب کنید $-\infty < z < +\infty$

$0 < y < +\infty$

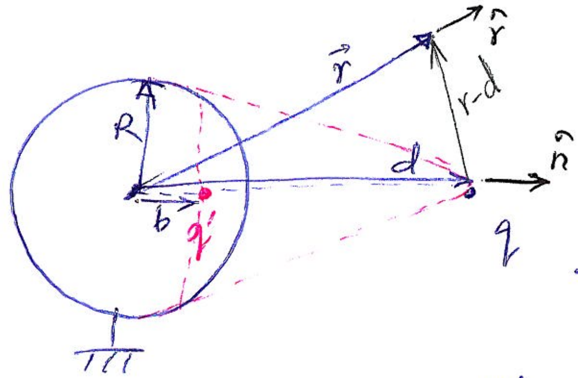
در برخی از مسائل نمی‌توانیم روش تصویر را استفاده کنیم (که اشکال سخت دارند)



در این شکل همان تصویر را که در گوشه‌ها داریم را باید در نظر بگیریم

$n = \frac{360}{\alpha} - 1$ تعداد بارهای تصویری

مسئله: کره رسانا



کره رسانا را بررسی داریم و پتانسیل را در نقطه $\vec r$ ناشی از q و q' بدست می‌آوریم بعد $\vec r$ را به R میل می‌دهیم باید روی کره پتانسیل صفر شود

$$\varphi_{\text{بیرون کره}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |r-d|} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 |r-b|} = \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}}$$

$$|q'| < |q|$$

$$\varphi^{1,2}\Big|_{r=R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R\left|\hat r - \frac{d}{R}\hat n\right|} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 b\left|\frac{R}{b}\hat r - \hat n\right|} = 0 \qquad \boxed{q' = -\frac{q\,b}{R} = -q\frac{R}{d}}$$

برای اینکه دو جمله قرینه شوند و $\varphi = 0$

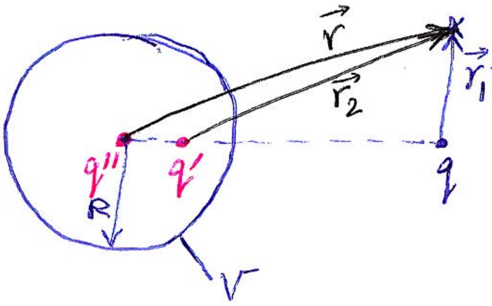
$$\frac{d}{R} = \frac{R}{b} \longrightarrow \boxed{b = \frac{R^2}{d}}$$

اگر در عبارت اول از R و در عبارت دوم از b فاکتور بگیریم به جواب می‌رسیم

چگالی بار سطحی روی کره را می‌توانیم حساب کنیم

بار کل، q' بدست می‌آید

$$E = -\nabla\varphi \longrightarrow \boxed{\sigma = \varepsilon_0 E_r}$$



اگر کره رسانا به زمین وصل نباشد و پتانسیل سطح آن φ باشد

در این صورت علاوه بر بار تصویری q' یک بار تصویری q'' دیگر نیز باید در مرکز کره قرار دهیم تا شرایط مرزی مسئله ارضا شود و پتانسیل رسانا V شود یعنی

$$V = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

بار تصویری q' پتانسیل را روی کره صفر می‌کند حال q'' را در مرکز کره قرار می‌دهیم تا پتانسیل روی کره V شود

طبق همان چیزی که در قسمت قبل بدست آوردیم

$$q' = -q\frac{R}{d}$$

$$q'' = 4\pi\varepsilon_0 R V \Longleftarrow V = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

پتانسیل بیرون کره رسانا

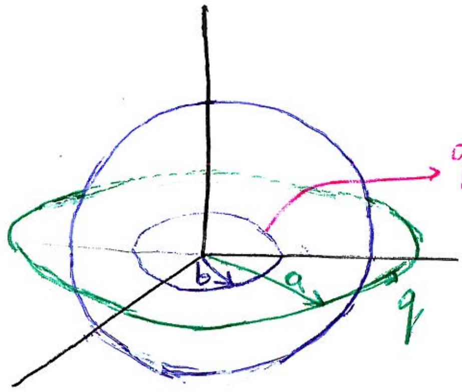
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{q''}{r}\right)$$

چند حالت خاص وجود دارد؟

$$V = 0 \longrightarrow q'' = 0$$

کره بدون بار رسانا $\longrightarrow q'' + q' = 0 \longrightarrow q'' = -q'$

$Q =$ کل بار کره $\longrightarrow q'' + q' = Q$



$$q' = -\frac{qb}{R} = -q\frac{R}{a}$$

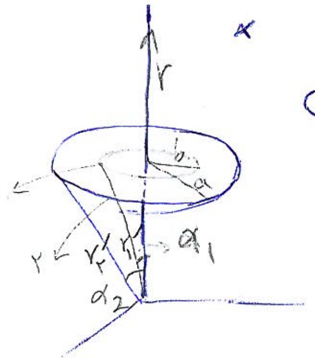
$$\boxed{b = \frac{R^2}{a}}$$

۷/۱ دور (بیرون) کره یک حلقه با بار q داریم می‌خواهیم پتانسیل

شعاع حلقه بیرون a شعاع حلقه داخلی b

روی حلقه b باید بار تصویری q' روی نقطه به نقطه آن داشته باشیم تا مانند مسئله قبل در هر نقطه بار تصویری $-q\frac{b}{R} = q'$ داشته باشیم

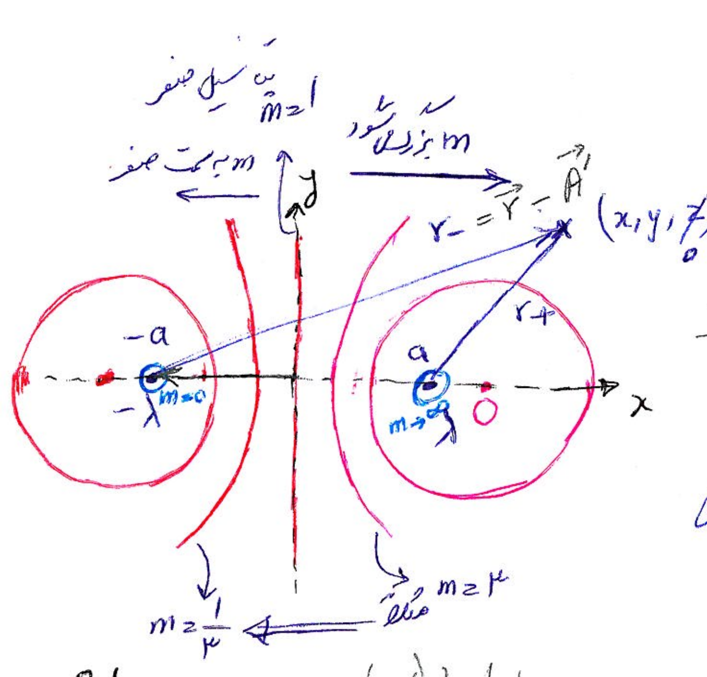
برای محاسبه پتانسیل بیرون کره مانند جلسه قبل φ را در راستای محور z (تقارن ϕ دارد) پیدا می‌کنیم چون در راستای محور z P_n ها همه 1 می‌شوند و به این روش B_n ها و A_n ها را بدست می‌آوریم



$$\varphi = \sum \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta) \longrightarrow \text{برگه 8 جزوه}$$

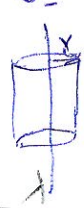
مستقیماً φ را بدست آوریم:

$$\varphi = q' \sum \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos\alpha_1) P_n(\cos\theta) + q \sum \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos\alpha_2) P_n(\cos\theta)$$



۷/۱ فرض کنید دو خط بار بی‌نهایت طویل با چگالی λ و $-\lambda$ که موازی محور z هستند، داریم می‌خواهیم پتانسیل در هر نقطه از فضا بدست آوریم می‌خواهیم سطوح هم‌پتانسیل را بدست آوریم (مکان هندسی نقاطی که پتانسیل ثابت شود)

$$\frac{r_-}{r_+} = m$$



21

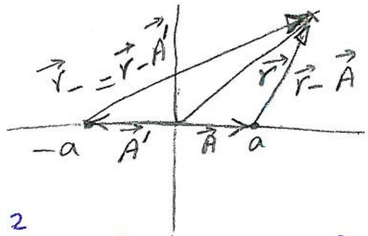
$$\varphi_{-\lambda} = -\frac{(-\lambda)}{2\pi\varepsilon_0} \ln(r_-)$$

$$\varphi_{\lambda} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_+$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad -\int E \cdot dr = \varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r$$

پتانسیل ناشی از دو خط بار در هر نقطه فضا

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)$$



برای اینکه φ ثابت باشد $\longrightarrow \boxed{\dfrac{r_-}{r_+} = m} \longrightarrow \dfrac{r_-^2}{r_+^2} = m^2 \longrightarrow (x+a)^2 + y^2 = m^2 \big[\underbrace{(x-a)^2 + y^2}_{r_+^2}\big]$

$$x^2(m^2-1) + a^2(m^2-1) + y^2(m^2-1) - 2ax(m^2+1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax\frac{m^2+1}{m^2-1} = -a^2 \qquad \left(x - a\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^2 + y^2 = -a^2 + a^2\left(\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^2$$

این معادله یک دایره به مرکز O است

مرکز $O\Big(\underbrace{a\dfrac{m^2+1}{m^2-1}}_{x_0}, 0\Big)$ شعاع $\boxed{R^2 = x_0^2 - a^2}$

مرکز این دایره ها از a بزرگتر است یعنی مرکز این دایره ها دورتر از a است

۱،۴۲ $r_- > r_+$

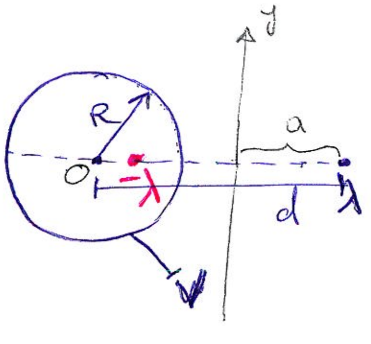
$m > 1$ m های دوایری است که λ را دربر گرفته اند و دوایر با m های کوچکتر از 1 ، $-\lambda$ را دربر می‌گیرند

وقتی O به a نزدیک می‌شود یعنی m به سمت ∞ میل می‌کند (دوایر کوچک و کوچکتر خواهد شد)

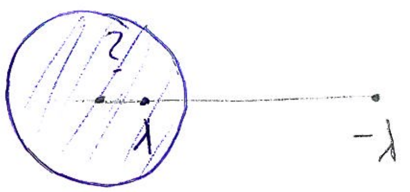
و برعکس دایره‌ای که مرکز آن تقریباً روی $-a$ است m آن به سمت صفر میل می‌کند $m \to 0 \Longleftrightarrow r_+ \gg r_-$

در واقع این‌ها دوایری هستند که بارهای $-\lambda$ و λ در آنها قرار می‌گیرند و مرکز دایره های سمت راست از ∞ حرکت می‌کنند تا مرکز آن روی a قرار گیرد و برعکس دایره های سمت چپ از ∞ دور از صفحه حرکت می‌کنند تا به $-a$ برسند

و این دایره ها در واقع مقطع های استوانه های هم پتانسیل هستند



اگر یک استوانه بی نهایت طویل هم پتانسیل با پتانسیل صفر یا V داشته باشیم که یک خط بار λ موازی با آن کنار آن باشد (به فاصله d از مرکز استوانه) می‌توانیم برای بدست آوردن پتانسیل (اگر m را بدست آوریم پتانسیل بدست می‌آید) بار تصویری را یک خط بار $-\lambda$ درون استوانه در نظر بگیریم. تصویر $-\lambda$ می‌تواند پتانسیل استوانه را ایجاد کند.



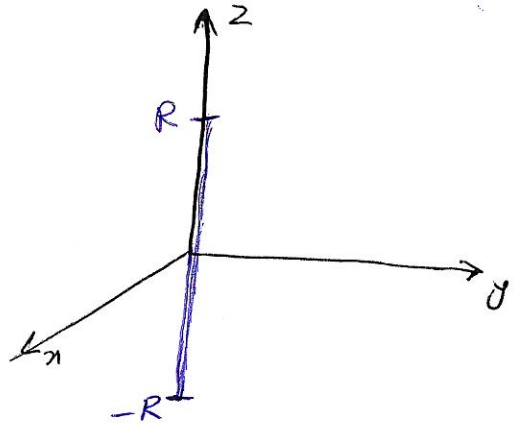
* مسئله معکوس: یک استوانه و یک خط بار طویل در داخل استوانه باشد می‌خواهیم پتانسیل را داخل استوانه بدست آوریم (به مقاومت محدوده استوانه)

در مختصات کروی

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

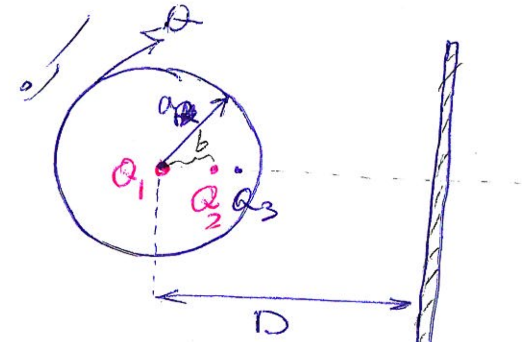
* تذکر: اگر $\vec{B}(x_2, y_2, z_2)$ و $\vec{A}(x_1, y_1, z_1)$ بردارهای دو نقطه از فضا باشند $\longleftarrow$

$$|\vec{B} - \vec{A}| = |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$



سؤال: یک خط بار در امتداد محور z دارای بار در واحد طول $\lambda(z)$ که در فاصله‌ی $-R<z<R$ قرار دارد. نشان دهید تابع φ برای $r>R$ به صورت زیر است

$$\varphi(r)=\sum_{l}\left\{\int_{-R}^{R}dz'\,\lambda(z')\,z'^{\,l}\right\}\frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}$$



سؤال ۲: با استفاده از روش تصویر پتانسیل را در هر نقطه فضا (سمت کره صفحه رسانا طولی که کره قرار دارد) بدست آورید $-Q_2\ -Q_1$

وقتی دو رسانا دارید می‌توانید از روش‌های مختلف حل لاپلاس یا تصویر یا روش جدید را استفاده کنید اینکه کدام روش مفید است ترفند مسئله است
همراه با پتانسیل

$q''+q'=Q$

پتانسیل سطح کره $V=\dfrac{q''}{4\pi\varepsilon_0 R}$

۱- روش تصویر: صفحات رسانا را برداریم و بارهایی به جای آنها بگذاریم که سطوح هم پتانسیلی که صفحات ایجاد کرده بودند را ایجاد کنند. اگر بتوانیم بارهای تصویر را طوری بچینیم که صفحه رسانا و کره رسانا نیز یک سطح هم پتانسیل شوند جواب را پیدا کرده‌ایم. اگر یک بار Q_1 در مرکز کره بگذاریم سطح کره را هم پتانسیل می‌کند اما صفحه را خیر پس باید به فاصله d از صفحه آن طرف صفحه باید یک $-Q_1$ بگذاریم تا صفحه هم، هم پتانسیل شود. یادگرفتیم یک بار Q_2 داخل کره بگذاریم تا با وجود Q_1 و $-Q_1$ کره هم پتانسیل شود. اما کره دیگر هم پتانسیل نیست
اما باز این صفحه‌ی از هم پتانسیل بودن می‌افتد دوباره به فاصله d از $-Q_1$ یک بار $-Q_2$ بگذاریم دوباره کره از هم پتانسیل می‌افتد و اگر این کارها را تکرار کنیم بی‌نهایت بار بدست می‌آید که جمع همه آنها صفر می‌شود

$$Q_2=Q_1\frac{a}{2d}$$

$$r:=\frac{a}{2d}\qquad Q=Q_1+Q_2+\cdots=Q_1\left(1+r+\frac{r^2}{1-r^2}+\cdots\right)$$

$$Q_1=Q_1$$

$$Q_2=Q_1\frac{a}{2d}=rQ_1$$

$$Q_3=\frac{a}{2d-\frac{a}{2d}}Q_2=\frac{\frac{a^2}{2d}}{2d-\frac{a^2}{2d}}Q_1=\frac{r^2}{1-r^2}Q_1$$

$$Q_4=\qquad Q_3=$$

بارهای Q_2، Q_3 ... پتانسیل کره را صفر می‌کنند بنابراین پتانسیل کره فقط ناشی از Q_1 است

$V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}$ پتانسیل کره

کل باری (بار تصویری) که روی صفحه القا می‌شود همان $-Q = (Q_1 + Q_2 + \cdots)$ است. انگار که شما یک خازن دارید که بار یکی از کره‌ها $+Q$ است و روی صفحه دیگر خازن $-Q$ است بنابراین پتانسیل و بار این خازن را دارید پس ظرفیت را می‌توان بدست آورد

استفاده از روش تصویر

ظرفیت $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 a \left(1 + r + \frac{r^2}{1-r^2} + \cdots\right) \quad r = \frac{a}{2d}$

جلسه دوازدهم

۲۱

قبلاً برای یک کره ظرفیت تعیین می‌کردیم وقتی که یکی از رساناهای کروی ∞ می‌رفت ظرفیت برای یک کره $4\pi\varepsilon_0 a$ می‌شد حال اگر این صفحه رسانا به سمت بینهایت برود (که این سری مطابق فیزیک مسئله است) d خیلی بزرگ شود ظرفیت خازن کروی همان $4\pi\varepsilon_0 a$ می‌شود $r \to 0$ میل می‌کند.

$Q_4 = \frac{r^3}{(1-r^2)\left(1-\frac{r^2}{1-r^2}\right)} Q_1$

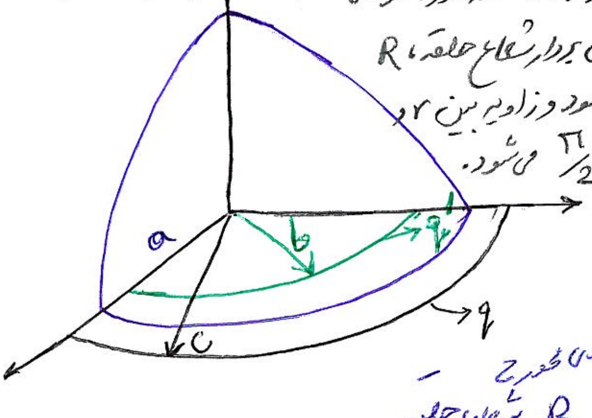
Q_iها کوچک و کوچکتر می‌شوند

~~ادامه مسئله حلقه بار دور یک کره~~

در رابطه $\frac{1}{|r-r'|} = \sum \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos\alpha)$، α زاویه بین r و r' است که وقتی پتانسیل را روی محور z می‌خواهیم $\vec{r}$ را روی محور z از مبدأ در نظر می‌گیریم و $\vec{r'}$ نیز باید از مبدأ به نقطه مورد نظر روی حلقه باشد و در این مسئله چون

ادامه مسئله حلقه بار دور یک کره

مرکز حلقه مبدأ مختصات است $\vec{r'}$ همان بردار شعاع حلقه، R می‌شود و زاویه بین r و r'، $\frac{\pi}{2}$ می‌شود. (حلقه مورد نظر ما روی صفحه x-y است)



$b = \frac{a^2}{c}$

$\varphi = \sum \left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\alpha)$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$

$q' = -q\frac{a}{c}$

$A_n \quad P_n(1) = 1$

$P_0 = 1$

$P_1 = \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$P_2 = \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\pi}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2}$

$P_3 = 0$

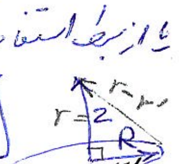
$P_4 = \frac{3}{8}$

$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{1/2}}$ حلقه روی محور z

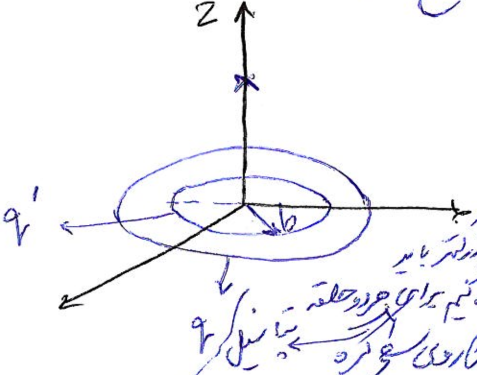
شعاع حلقه R

یا از رابطه استفاده می‌کنید

$z < R \to \varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{z^2}{R^2} + \cdots\right]$



$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad r' = R$



$z > R \to \varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2} + \cdots\right]$

اینجا منظور از z همان r در $\sum A_n r^n + \cdots$ است

پتانسیل برای بیرون حلقه بزرگتر باید از این استفاده کنیم برای مورد حلقه

پتانسیل q

چون پتانسیل را بین کره و حلقه بیرونی را می‌خواهیم بدست آوریم چون میدان خارج سطح کره می‌خواهیم از آن پتانسیل روی کره به کار می‌آید

$n=2$ برای حلقه درونی $r > R$

شعاع حلقه

می‌شود پس ... و برای حلقه بیرونی $C > r$ یعنی $n=2$

r^{-3} دارد پس ضریب $P_2(\cos)$ است

روی محور z

$$\varphi_{\text{حلقه بیرونی}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 C}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{C^2} + \cdots\right) + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{r^2} + \cdots\right)$$

$a < r < c$

$P_0(1)$ ضریب ثابت — ضریب P_2 — φ حلقه درونی $b < r < a$ — $\frac{1}{r}$ $P_0(\cos)$ ضریب — چون r^{-1} است

θ زاویه بین $\vec{r}$ و محور z است

برای حلقه بیرونی

43:28

$$\varphi_{a<r<c}^{\text{کل}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 C}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{c^2}\underbrace{\left[\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)\right]}_{P_2(\cos\theta)} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{b^2}{r^3}\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) + \cdots\right)$$

ضرایب r^n (A_n ها) ظاهر شده و برای حلقه درونی ضرایب $r^{-(n+1)}$ ظاهر شده

روی محور z

$$\varphi_{r>c} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} + \cdots\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{r^2} + \cdots\right)\right]$$

جمله هایی که r دارد مهم اند ... ثابت اند

$$\varphi_{r>c}^{\text{کل}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^3}\times\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) + \cdots\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{b^2}{r^3}\times\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) + \cdots\right)\right]$$

چون پتانسیل خارج از حلقه بیرونی ضرایب $r^{-(n+1)}$ ها ظاهر می‌شود

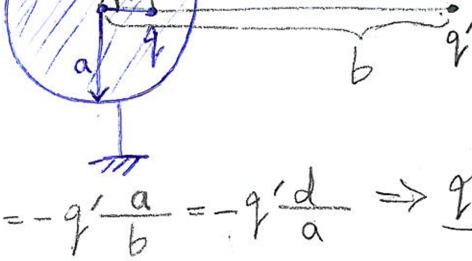
پتانسیل روی کره باید صفر باشد با تقریبی می‌دانیم که صفر است این پتانسیل برای سطح کره و حلقه بیرونی نیز هست

اگر از روی این سه انتگرال بگیریم روی سطح کره بار کل کره بدست می‌آید q' است.

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

میدان E_r شعاعی

$$* \quad \boxed{q' = \int_{\text{کره}} \sigma\, da}$$



(۱۱) مسئله برعکس مسئله قبل یک بار q داخل کره رسانا باشد پتانسیل را داخل کره بخواهیم بدست آوریم یک بار تصویری بیرون کره باید در نظر بگیریم به جای کره رسانا

$$q = -q'\frac{a}{b} = -q'\frac{d}{a} \Rightarrow \underline{q' = -q\frac{b}{a} = -q\frac{a}{d}} \qquad d = \frac{a^2}{b} \rightarrow b = \frac{a^2}{d}$$

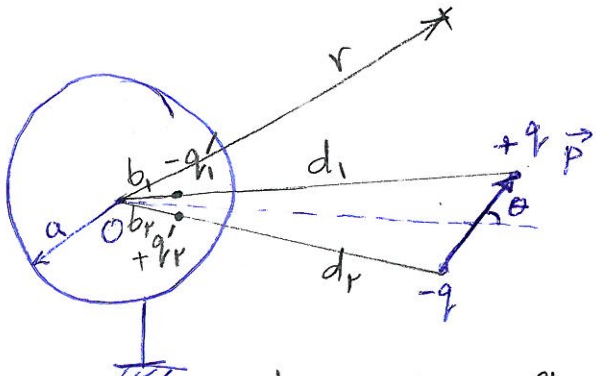
$$\varphi_{\text{درون کره}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |r-d|} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 |r-b|}$$

$\varphi \rightarrow -\nabla\varphi = E$

$\sigma = \varepsilon_0 E_r$

$\int \sigma\, da = q'$

روی سطح بیرونی رسانا بار القا می‌شود



$\boxed{64}$ مسئله: یک پوسته رسانا به زمین وصل باشد یک دوقطبی الکتریکی که امتداد آن با راستای مرکز زاویه θ می‌سازد آنگاه که دو بار $-q$ و $+q$ بیرون کره داریم بارهای تصویری را بدست می‌آوریم

$$q_1' = -q\frac{a}{d_1} = -q\frac{b_1}{a} \qquad q_2' = +q\frac{a}{d_2}$$

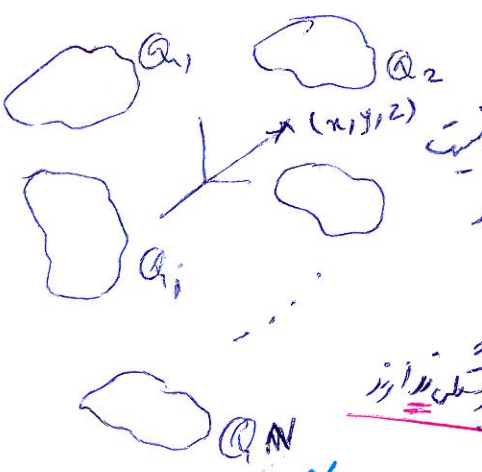
بیرون کره

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|r-d_1|} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0|r-d_2|} + \frac{-q\frac{a}{d_1}}{4\pi\varepsilon_0|r-b_1|} + \frac{q\frac{a}{d_2}}{4\pi\varepsilon_0|r-b_2|}$$

یک نقطه مهم در همه روشهای بدست آوردن پتانسیل مسئله یکتایی است

تذکر: اگر یک باری به عنوان بار تصویری لحاظ می‌شود متفاوت است با باری که روی سطح رسانا القا خواهد شد همیشه حتماً این طور نیست که بار تصویری با باری که روی رسانا القا می‌شود یکسان باشد

روش ضرایب پتانسیل



اگر شکل هندسی رساناها شکل ساده‌ای نباشد روشهای پیشین کارساز نیست

اگر تعدادی رساناهای دلخواه با هر شکلی و تعدادی بارهای $q_1 \dots q_n$ روی آنها باشد پتانسیل φ به صورت زیر می‌توانیم بدست آوریم

P_{ij} ها یک سری کمیت‌های هندسی هستند که به شکل قرارگیری رساناها بستگی دارند اگر شکل هندسی تغییر کند هم P_{ij} ها تغییر می‌کند و P_{ij} ها به بار بستگی ندارند

پتانسیل روی رسانای i ام یک ترکیب خطی از بارهای روی آن است

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} Q_j$$

پتانسیل رسانای i ام

ضرایب پتانسیل

اثبات: فرض کنید همه رساناها بجز رسانای j ام بدون بار باشند

$$Q_i = 0 \quad i \neq j$$

فرض کنید: $\varphi_0^{(1)}(x,y,z)$

بار رسانای j ام را λ برابر کنیم

$$Q_j = \lambda Q_{j0}$$

تذکر: پتانسیل در فضا را نمی‌توان با این فرمول بدست آورد.

ادعا می‌کنیم تیپ پتانسیل در فضا: $\lambda\varphi_0^{\text{دوتا}} = \varphi^{\text{دوتا}}_{\text{جدید}}$ چون دوتا φ در معادله لاپلاس صدق می‌کرد

و این φ جدید شرایط مرزی ما را نیز می‌دهد. و این یعنی پتانسیل یک رابطه‌ای با Q ها دارد اگر Q ها را λ برابر کنیم پتانسیل‌ها هم λ برابر می‌شود یعنی یک رابطه خطی بین φ و Q وجود دارد

حال اگر همه بارها را مضاعف کنیم باز هم

$$\varphi_i = P_{ij} Q_j \qquad i = 1, 2, \ldots$$

اگر بارها را λ برابر کنیم پتانسیل در فضا λ برابر خواهد شد

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} Q_j$$

* ماتریس P یک ماتریس متقارن است

پتانسیل رساناها

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1N} \\ P_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ P_{N1} & \cdots & & P_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$$

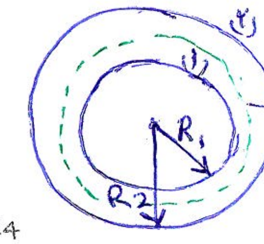
بار روی رسانای ۱

* P_{ii} ها مثبت هستند عناصر قطری

* ضرایب پتانسیل با ضرایب خازن رابطه دارند

بار کل روی هر رسانا صفر می‌شود با این فرمول

1:14
1:17



$E = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ میدان داخل کره (۲)

اگر شکل هندسی ساده باشد P_{ij} ها را دستی می‌توان حساب کرد در غیر این صورت با اندازه‌گیری آزمایشگاهی یا عددی به دست می‌آید

فرض کنید دو کره به شعاع R_1 و R_2 داشته باشیم و می‌خواهیم P_{ij} ها را تعیین کنیم کافی است که فرض کنیم Q_1 را روی کره ۱ می‌ریزیم و E بین دو کره را پیدا می‌کنیم (از قانون گاوس) بعد φ کره را به دست می‌آوریم

1:24

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

$$\varphi = -\int_{\infty}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr \Rightarrow \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$ پتانسیل روی کره (۲) $P_{11}\ P_{12}\ P_{21}\ P_{22}$

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = P_{11} \overset{Q_1}{\cancel{q_1}} + P_{12} \overset{0}{\cancel{q_2}} \longrightarrow P_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

1:26 $$\varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = P_{21} \overset{Q_1}{\cancel{q_1}} + P_{22} \overset{0}{\cancel{q_2}} \longrightarrow P_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = P_{12}$$

برای نشان دادن این مسئله (۲) را باردار می‌کنیم (۱) را صفر می‌کنیم (یا جاها را عوض کنید)

$$\varphi_1 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = P_{11} q_1 + P_{12} q_2$$

یک کره باردار پتانسیل داخلش در همه نقاط داخلش ثابت است اما روی کره داخلی هم مقدار پتانسیل داخل کره برابر پتانسیل کره (۲) است

$$\varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = P_{21} \overset{0}{\cancel{q_1}} + P_{22} \overset{Q_2}{\cancel{q_2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}}$$

در این شکل این کره‌ها داریم P_{12} و P_{22} برابر شده‌اند

** در وضعیت‌هایی که یک رسانا یک رسانای دیگر را کاملاً می‌پوشاند ضرایب مربوط به رسانای پوشش دهنده P_{22} آن برابر ضریب پتانسیل متقابل بین ۱ و ۲ است (یعنی P_{12} و P_{21})

24

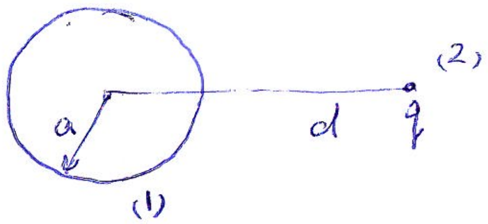
if بزرگه پوشش دهنده (2) $P_{22} = P_{12} = P_{21}$

پوشش دهنده (1) $\rightarrow P_{11} = P_{12} = P_{21}$

مثال: اگر دو کره رسانا کاملاً مجزا باشند طور دیگری است

اگر یک کره رسانا و یک بار q بیرون آن داشته باشیم

می‌خواهیم پتانسیل را روی کره رسانا و بار q از طریق ضرایب پتانسیل بدست آوریم



$$\varphi_1 = P_{11} q_1 + P_{12} \cancel{q_2}^{\,0} \quad \text{کره}$$

$$\varphi_2 = P_{21} q_1 + P_{22} \cancel{q_2}\, 0$$

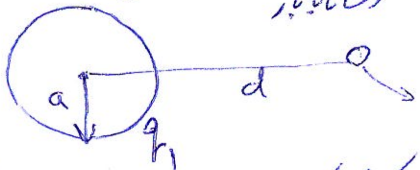
1:32

$$\begin{cases} \varphi_1 = P_{11} q_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} \\ \varphi_2 = P_{21} q_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$P_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

یک کره بدون بار رسانا با بار q_1 در نظر بگیریم به کره بار q_1 می‌دهیم و بار کوچک q را صفر در نظر بگیریم (یک رسانای بدون بار) رسانا با بار



بدون بار

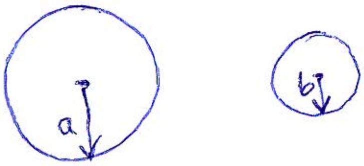
پتانسیل در فاصله d از مرکز یک کره رسانا با بار q_1 $= \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d}$

مسئله معکوس مسئله‌ای را می‌دانستیم (که کره بار q_1 داشته باشد) اما مسئله اصلی‌مان (پیدا کردن پتانسیل روی کره با وجود دیگر q ای) را با روش‌ها نمی‌توانستیم حل کنیم. حالا بار $P_{21} = P_{12}$ چون $q = q_2$ را روی رسانای کوچک q می‌بریم و کره را بدون بار می‌گیریم

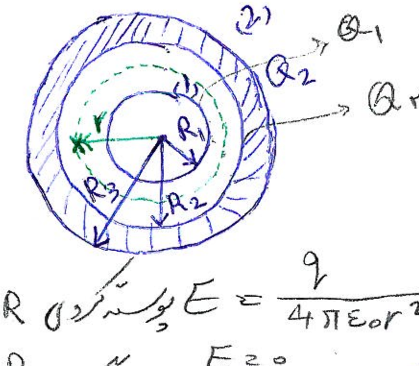
$$P_{12} = P_{21} \qquad \varphi_1 = P_{11}\cancel{q_1}^{\,0} + P_{12}\cancel{q_2}^{\,q}$$

$$\boxed{\varphi_1 = P_{12}\, q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}\, q}$$

* اگر دو کره داشته باشیم نزدیک هم چون اثر متقابل روی هم می‌گذارند (وقتی بار یکی صفر و بار دیگری غیر صفر باشد) از روش ضرایب پتانسیل می‌توان استفاده کرد



* روش ضرایب پتانسیل فقط برای رساناهاست.



اگر در مسئله قبلی رساناهای دوری اگر حجم دهیم رسانای ۲ پوسته نیست ضخامت دارد حال می‌خواهیم P_{ij} ها را بدست آوریم

یک Q_1 روی کره ۱ و Q_2 روی کره ۲ در نظر بگیرید و φ های بنویسید

از قانون گاوس E را در قسمت‌های مختلف بین ۱ و ۲ و داخل پوسته (۲) بدست آورید و بعد از آن‌ها انتگرال بگیرید و φ ها را بدست آورید و بعد معادلات ضرایب پتانسیل را بنویسید

$$\varphi_1 = P_{11} q_1 + P_{12} q_2$$

12:26

$$r \geq R \quad \text{بیرون پوسته کره} \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r < R \quad \text{〃} \quad E = 0$$

$$P_{11} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$(1) \rightarrow Q_1$$

$$(2) \rightarrow Q_2$$

$$P_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$P_{12} = P_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \qquad \text{(۱) داخل پوسته کره}\quad \varphi = -\int_\infty^{R_3} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

?

$$Q_2 = 0 \begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_3} - \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = P_{11}\overset{Q_1}{q_1} + P_{12}\cancel{q_2} \\ \varphi_2 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = P_{21}\underset{Q_1}{q_1} + P_{22}\cancel{q_2}^{\,0} \Rightarrow P_{21} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \end{cases}$$

$Q_1 = 0 \quad Q_2 = q_2$

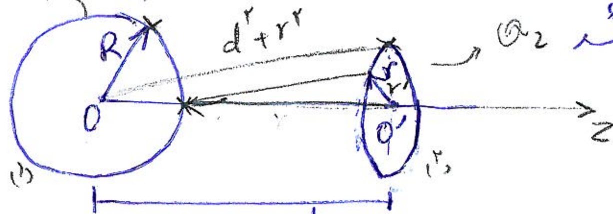
$\varphi_2 = P_{21}\cancel{q_1} + P_{22} q_2$

$$\begin{cases} \varphi_2 = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = P_{22}\, q_2 \to Q_2 & P_{22} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \\ \varphi_1 = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = P_{11}\cancel{q_1} + P_{12}\, q_2 \Rightarrow & P_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \end{cases}$$

جلسه سیزدهم

حلقه با شعاع r روی محور z: $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}}$

مسئله: یک کره و یک حلقه که محور آن خط واصل مرکز کره و مرکز حلقه باشد
برای چنین سیستمی P_{ij} ها را بدست آورید به روش ضرایب پتانسیل
یک بار، بار روی کره بگذارید و Q_1 و Q_2 را خواهید داشت



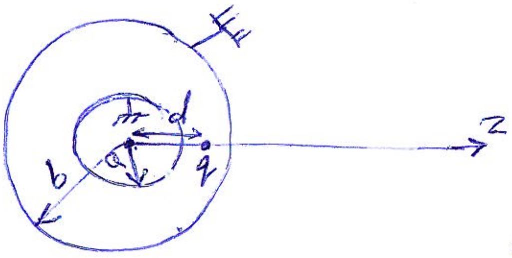
Q_1
$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} = P_{11}\, q_1 + P_{12}\cancel{q_2} \Rightarrow P_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

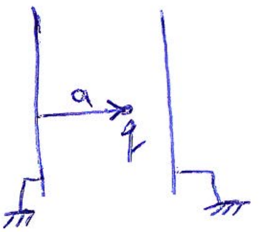
$$\varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 (d^2+r^2)} = P_{21}\, q_1 + P_{22}\cancel{q_2} \Rightarrow P_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 (d^2+r^2)}$$

$$P_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 (d-R)}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{(d-R)^2} + \cdots\right]$$

زاویه بین r و r': $\alpha = \frac{\pi}{2}$
زاویه r با محور z: $\theta = 0$

$$Q_2 \begin{cases} \varphi_{1\,\text{کره روی محور z}} = Q_2 \sum \dfrac{r^n (d^2+r^2)}{(d-R)^{n+1}} P_n(\cos\alpha) = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 (d-R)}\left[1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{r^2}{(d-R)^2} + \cdots\right] = P_{11}\cancel{q_1} + P_{12}\, q_2 \\ \varphi_{2\,\text{حلقه}} = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = P_{21}\cancel{q_1} + P_{22}\, q_2 \Rightarrow P_{22} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$$





تمرین به ۲ روش

مسئله: فرض کنید دو رسانای کروی که به زمین وصل اند داریم
اگر یک بار نقطه ای بین آن دو صفحه بگذاریم بار القایی روی آن دو کره ایجاد می‌شود!
یا مثلاً دو رسانای تخت که یک بار q بین آنها بگذاریم چه مقدار بار القایی
روی آن دو صفحه‌ها می‌نشیند است (در این مسئله)
یک روش به روش تصویر است یا روش لاپلاس محور z را راستای
واصل q و مرکز دو کره در نظر بگیریم در راستای محور z تقارن سمتی
دارد پتانسیل را بنویسید در همه نقاط به جز در نقطه ای که q است در نقطه q معادله پواسون
روش ضرایب پتانسیل ← q را یک رسانای کوچک وسط دو کره در نظر بگیرید باید نوشت
۳ معادله و P_{ij} ها خواهید داشت

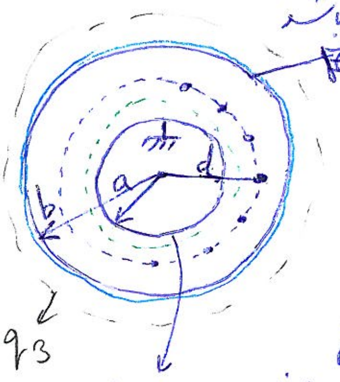
$$\nabla^2 \varphi = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{q\,\delta(z-d)}{\varepsilon_0} \leftarrow \text{فقط در نقطه } q$$

معادلاتی که تا الان نوشتیم روشهای راستا ندارد بود ولی اما گاهی یک چیزهایی به ما کمک می‌کنند مسئله را راحت تر حل کنیم

در مسئله قبلی می‌توانیم بار q را که نمی‌دانیم یک کره‌ای بین دو کره دیگر داریم که بار کل Q روی آن است

در این صورت پتانسیل را در تمام نقاط فقط از قانون گاوس بدست می‌آوریم به جای آن فرض کنیم فرض کنید n بار نقطه‌ای

31 خیلی نزدیک به هم روی سطح کره فرضی می‌گذاریم . اگر N تعداد بارها در واحد سطح باشد



بار کل روی کره فرضی

$$4\pi d^2 N q = Q \longrightarrow$$

بنا به تقارنی که مسئله دارد تک تک این بارها یک بار روی کره القا می‌کنند مقدار القای آنها با هم برابرند

$E_{r<a} = 0$ چون داخل رسانا است

$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad a<r<d$$

$$E = \frac{Q+q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad d<r<b$$

$$E = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad r>b$$

① $r<a$ $\varphi = C_1$ چون $E=0$

② $a<r<d$ $\varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 \longrightarrow \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d} \neq C_2$

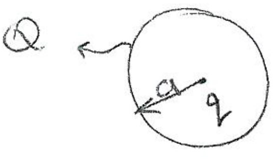
③ $d<r<b$ $\varphi = \frac{Q+q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_3$

④ $r>b$ $\varphi = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_4 \to 0$ $\boxed{q_3 = 0}$

$r \to \infty$ پتانسیل باید صفر شود

$\Leftarrow C_4 = 0$

در حالتی که الکتریسیته پیوسته کره‌ها را برای کره بزرگتر در نظر بگیریم باید میدان در این پیوسته صفر باشد میدان که صفر شد یعنی q_3 باید صفر باشد چون φ کره بزرگتر صفر بود



$\varphi_{\text{داخل کره}} \neq \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

inference : اگر داخل یک کره رسانا بار q به شعاع a و روی سطح آن بار Q داشته باشیم

در $r=b$ باید پتانسیل صفر شود ⇐

$$③ \rightarrow C_3 = -\frac{q_1+Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

چون پتانسیل پیوسته است در $r=d$ ② و ③ باید برابر باشند ⇐ C_2 بدست می‌آید

$$② \rightarrow \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} + C_2 = \frac{Q+q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} - \frac{q_1+Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

در $r=a$ پتانسیل صفر است ⇐ $C_1=0$
گفته ایم

بنابراین پتانسیل ما بین a و b بدست آورده‌ایم

q_1 تعیین می‌شود ① و ② باید پیوسته باشند

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + C_2 = 0 \xrightarrow{\text{با تعیین کردن } C_2} q_1 \text{ بدست می‌آید}$$

σ بار القایی روی کره کوچکتر ⇐

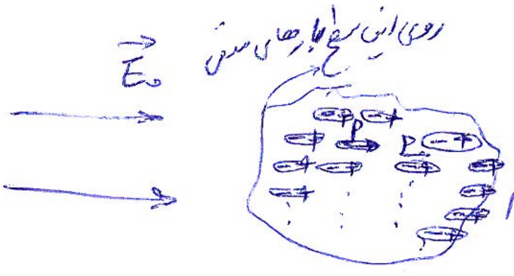
بار القایی روی کره کوچک $\boxed{q_1' = \frac{q_1}{4\pi d^2 N}}$

ناشی از یک بار

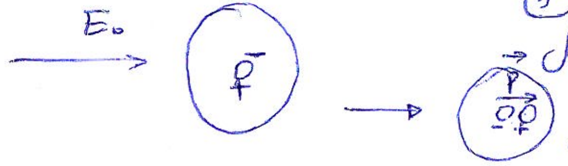
این روش حل σ را به ما نمی‌دهد

برای یک بار بار القایی تابعی از θ خواهد شد برای σ باید از روش لاپلاس بریم.

دی الکتریک



مواد از یک سری مولکول و اتم تشکیل شده‌اند و معمولاً در حالت عادی یک اتم ~~در حالت~~ مرکز بارهای مثبت و منفی روی هم قرار گرفته‌اند یعنی توزیع بار برای آنها در نظر می‌گیریم اگر یک میدان الکتریکی اعمال شود کمی جابجا می‌شوند و یک دوقطبی به علت میدان خارجی در اتم $\vec{p}$ به وجود می‌آید



- و +

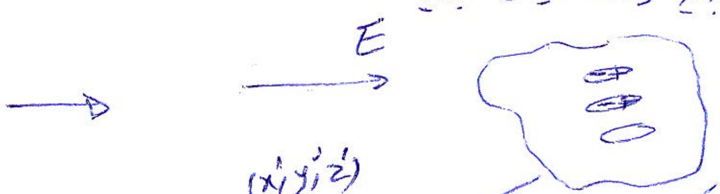
روی سطح ~~...~~ سمت راست شکل بارهای مثبت و یک بار سطحی روی ماده ایجاد می‌شود

در ماده یک چگالی بار حجمی ناشی از دوقطبی‌هایی کناری که آنها یک میدان خودشون در ماده ایجاد کرده‌اند به وجود می‌آید

دوقطبی‌ها خودشان یک میدان ایجاد می‌کنند این تکرار می‌شود تا به یک تعادل برسد

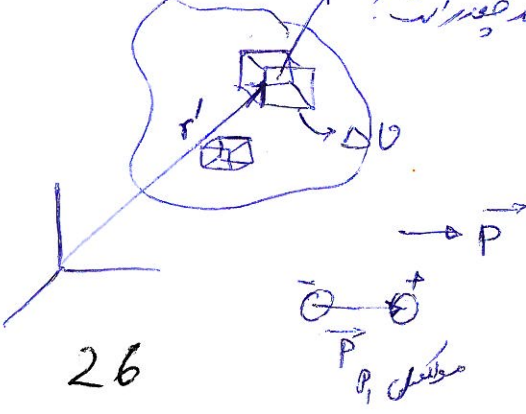
دوقطبی‌های جدید ← میدان جدید

بعد از مدتی سیستم حالت تعادل پیدا می‌کند
فعلاً حالت تعادلی را در نظر می‌گیریم



می‌خواهیم بررسی کنیم میدان درون خودش و میدانی که در بیرون ایجاد می‌کند چقدر است.
اگر دی الکتریک باشد میدانها خود بخود دیگر می‌شود

ΔV یک حجمی به وجود آمده که قطبیده شده یک حجم با اندازه کافی کوچک در نظر می‌گیریم یک مولکول در آن حجم P می‌نامیم در این حجم تعداد زیادی از این مولکول‌ها وجود دارد



$$\vec{P} = \int \vec{r}\, dq$$

اگر به طور متوسط گشتاور هر دوقطبی ها را p در نظر بگیریم

$$\Delta\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_N = N\vec{P}$$

متوسط گشتاور دوقطبی یک مولکول

عنصر حجمی که معادل گشتاور دوقطبی حجم آن خلاء است. می‌توان Δv را به سمت صفر میل دهیم در این صورت گشتاور دوقطبی عنصر را که تقسیم بر حجم آن کنیم قطبش بدست می‌آید

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta v_{(x',y',z')}}} \quad \left(\frac{C}{m^2}\right)$$

$N\vec{P}$

گشتاور دوقطبی در واحد حجم

قطبش Polarization

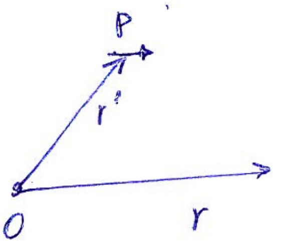
این عنصر در هر نقطه از فضا یک پتانسیل ایجاد می‌کند

$$\varphi_{\text{دوقطبی}} = \frac{\vec{P}\cdot(\vec r-\vec r')}{4\pi\epsilon_0|r-r'|^3}$$

$$\varphi_{\text{دوقطبی عنصر}} = \frac{\Delta\vec{P}\cdot(\vec r-\vec r')}{4\pi\epsilon_0|\vec r-\vec r'|^3} = \frac{\vec{P}\cdot(\vec r-\vec r')\,dv}{4\pi\epsilon_0|\vec r-\vec r'|^3}$$

قطبش

در نقطه (x',y',z') بستگی به r' دارد

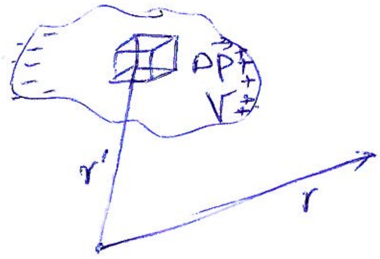


از طبقات با یک انتگرال می‌گیریم تا پتانسیل را در $\vec r$ بدست آوریم

قطبش کل

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{P_{(r')}\cdot(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\,dv$$

انتگرال گیری نسبت به پریم هاست



$$\frac{\vec r-\vec r'}{|r-r'|^3} = \nabla'\left(\frac{1}{|r-r'|}\right) \Rightarrow \vec{P}_{(r')}\cdot\frac{r-r'}{|r-r'|^3} = \overset{\vec A}{\vec P_{(r')}}\cdot\nabla\overset{f}{\left(\frac{1}{|r-r'|}\right)}$$

مشتق گیری نسبت به پریم

به یادآوری: $\vec\nabla\cdot(f\vec A) = \vec\nabla f\cdot A + f\vec\nabla\cdot\vec A$

$$= \vec\nabla'\cdot\left(\vec P\,\frac{1}{|r-r'|}\right) - \frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\vec\nabla\cdot\vec P$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \vec\nabla'\cdot\left(\frac{\vec P}{|r-r'|}\right)dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{-\vec\nabla'\cdot\vec P}{|\vec r-\vec r'|}\,dv$$

قضیه دیورژانس

تابعی از r'

$$\boxed{= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{\overset{\sigma_p}{\vec P\cdot\hat n}\,da'}{|r-r'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\overset{\rho_p}{-\vec\nabla'\cdot\vec P}}{|r-r'|}\,dv'}$$

روی ماده

$\vec r$ نقطه ای است که پتانسیل را در آن می‌خواهیم

σ_p: چگالی بار سطحی مربوط به قطبش

اگر قطبش ها متفاوت باشند داخل و چگالی بار حجمی نیز به وجود می‌آید

اگر P ها متفاوت باشند

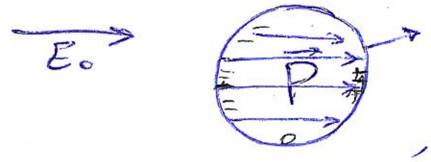
پس می‌توان ماده قطبیده را این طور در نظر گرفت که یک چگالی حجمی دارد و یک چگالی سطحی

$$\vec{r} = \underbrace{|r|\cos\alpha}_{\vec{r}\cdot\hat{x}}\,\hat{x} + \underbrace{|r|\cos\beta}_{\vec{r}\cdot\hat{y}}\,\hat{j} + \underbrace{|r|\cos\theta}_{\vec{r}\cdot\hat{z}}\,\hat{z}$$

مؤلفه $\vec{r}$ در راستای بردار $\hat{z}$ = $\vec{r}\cdot\hat{z} = |r|\cos\theta$

θ زاویه بین $\vec{r}$ و $\hat{z}$ — اندازه مؤلفه $\vec{r}$ که در هر راستا می‌خواهیم $\vec{r}$ را در بردار یکه همان راستا ضرب نقطه‌ای می‌کنیم.

قطبش ثابت یعنی قطبیدگی P که ما می‌خواهیم ثابت در مورد یک دی‌الکتریک کره‌ای باشد یک میدان یکنواخت در چنین محیط ایجاد می‌شود که این میدان یکنواخت یک قطبش یکنواخت ایجاد می‌کند اگر یک میدان خارجی E_0 داشته باشیم و یک استوانه طویل که محورش عمود بر راستای E_0 باشد یک قطبش در این راستا ایجاد می‌شود یک $\vec{P}$ ثابت ایجاد می‌شود اکثر مسائلی که ما با آن‌ها سروکار داریم ←



$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} \qquad \rho_p = 0$$

$$\text{if}\quad \vec{P} = P_0\,\hat{z} \longrightarrow \sigma_p = P_0\cos\theta$$

این کره شکل دوقطبی خودش عمل می‌کند

جلسه چهاردهم

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_p\, dv'}{|r-r'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdots$$

$\vec{P}$ به E وابسته است

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_p\, dv'(\vec{r}-\vec{r}')}{|r-r'|^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma_p\, da'(\vec{r}-\vec{r}')}{|r-r'|^3}$$

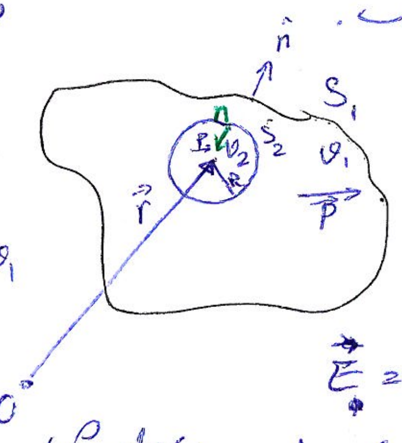
↓ برای بیرون و درون ماده درست است

φ دوقطبی‌ای که قبلاً بدست آوردیم با این فرض بود که ابعاد دوقطبی خیلی کوچکتر از $\vec{r}$ است و این φ یی که بدست آوردیم برای بیرون ماده درست است.

حال می‌خواهیم: چرا همین $E(r)$ برای داخل نیز درست است.

کره‌ای را در نظر می‌گیریم که از نظر میکروسکوپی بزرگ از نظر ماکروسکوپی کوچک است

می‌خواهیم میدان را در مرکز این کره به شعاع R بدست آوریم که شامل E_1 (ناشی از محیط ۱) و E_2 (ناشی از محیط داخل) است ~~...~~



v_2: حجم کره
v_1: حجم کل
$v_2 \ll v_1$

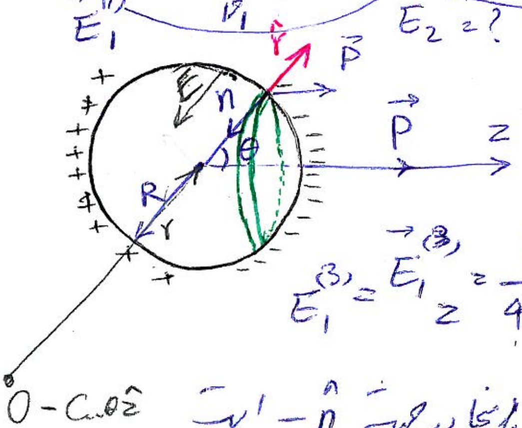
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

برای S_2

$$E_1 = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v_1} \frac{\rho_p\, dv'}{r^2}\hat{r}}_{\vec{E}_1^{(1)}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_1} \frac{\sigma_p\, da'}{r^2}\hat{r}}_{\vec{E}_1^{(2)}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma'_p\, da'}{r^2}\hat{r}}_{\vec{E}_1^{(3)}}$$

دو چگالی بار سطحی S_1 و S_2 داریم

$E_2 = ?$



$$\sigma'_p = \vec{P}\cdot\hat{n} \longrightarrow$$

بردار یکه عمود بر سطح به سمت بیرون محیط

$$\vec{P} \quad z$$

$$\sigma'_p = -P\cos\theta$$

بنا به تقارنی که المان‌ها دارند میدان فقط در امتداد z باقی می‌ماند مؤلفه‌های دیگر در طرف المان یکدیگر را خنثی می‌کنند

$$E_1^{(3)} = \vec{E}_{1z}^{(3)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma'_p\, da'}{R^2}\,(-\hat{r})\cos\theta\,\hat{z}$$

$\hat{r} = \cdots + \cos\theta\,\hat{z}$

$O - \cos\theta\,\hat{z}$

از آنجا به نقطه‌ای که می‌خواهیم در آن میدان را حساب کنیم $\vec{r}$ است و $\vec{r}$ در اینجا در جهت $-\hat{n}$ است

در فرمول E داریم $\hat{r}$ که $\hat{r} = -\hat{n}$ ؛ E در راستای z ، مؤلفه z

$$\begin{cases} \vec{P}\cdot\hat{n} = \sigma_p \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \rho_p \end{cases}$$

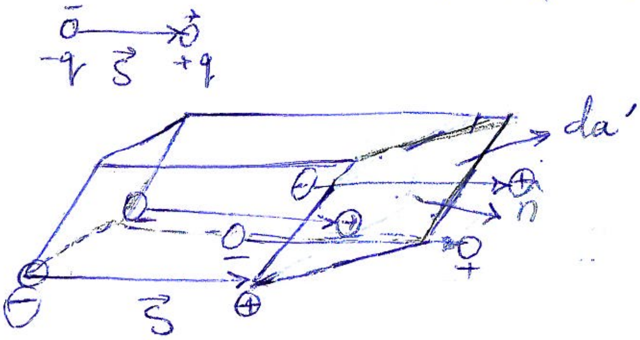
(1, 21)

گفته شده که ~~[illegible]~~ اعمال کردیم دو قطبی‌ها را (مولکول) به وجود آمدند

هر کدام از مولکول‌های عنصر حالا دو شکلی را که در نظر می‌گیریم

$$\vec{P} = q\vec{S}$$

به طور متوسط به اندازه S از هم جدا شده باشند (الکترون‌ها و یون‌ها) و به طور متوسط یک $\vec{P}$ ایجاد کرده باشد



$$d\vec{a}' = \hat{n}\,da'$$

~~[illegible]~~

وقتی میدان اعمال می‌شود یک سری مولکول‌ها با بار مثبتشان از سطح da' عبور می‌کنند

طول عنصر را به اندازه جدایی مولکول‌ها گرفتیم همه مولکول‌ها جدا می‌شوند

فرض کنید da' همان سطح بیرونی جسم باشد تعداد بارهایی که از سطح da' زده اند بیرون همان بارهای سطح جسم می‌شوند اگر N تعداد مولکول‌ها در واحد حجم باشد

المان حجم = المان سطح × طول عنصر

المان سطح

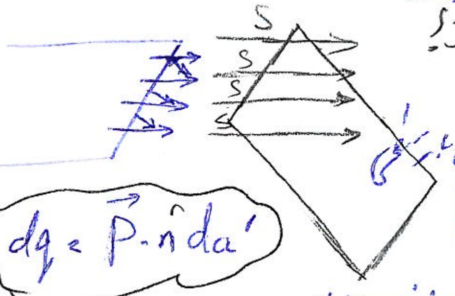
$$dN = N\,dv = N\vec{S}\cdot d\vec{a}'$$

$$dq = q\,dN = Nq\vec{S}\cdot d\vec{a}' = \vec{P}\cdot d\vec{a}' \longrightarrow$$ مقدار باری که از سطح مرزی زده بیرون

$\vec{P}$ برای یک مولکول

این بارها در ضخامتی روی سطح مرزی که همان ضخامت مولکول هست جمع شده اند

ضخامت سطح مرزی $\hat{n}\cdot\vec{S}$ هست



باری که از این سطح داره عبور می‌کند چقدر است؟

$\vec{S}\cdot d\vec{a}'$ می‌شود

چگالی بار سطحی

$$\boxed{\sigma_p = \frac{dq}{da'} = \vec{P}\cdot\hat{n}}$$

$$dq = \vec{P}\cdot\hat{n}\,da'$$

عنصر حجم را هر جایی در ماده

چه در سطح مرزی چه درون ماده فرقی ندارد از هر سطح عنصر حجم همین اندازه بار می‌زند بیرون

همان مقدار باری که از سطوح این عنصر حجم بیرون زده با علامت منفی درون خودش باقی مانده چون از نظر بار الکتریکی ماده خنثی بود باری که از این عنصر زده بیرون: Q

$$Q = \oint_S \underbrace{\vec{P}\cdot d\vec{a}'}_{dq}$$

باری که داخل باقی مانده

$$Q' = -Q = -\oint_S \vec{P}_{(r')}\cdot d\vec{a}' = -\int_{\Delta V} \vec{\nabla}'\cdot\vec{P}\,dv' =$$ منفی بارهایی که از سطح زده بیرون

داخل

$$\int_{\Delta V} \rho_p\,dv' \Longrightarrow \boxed{\rho_p = -\nabla'\cdot\vec{P}}$$

چگالی بار حجمی

پتانسیل یک ماده قطبیده شده بیرون از این ماده مانند این است که اصلاً خود ماده را کنار بگذاریم

و به جای آن یک سری بار سطحی و حجمی در نظر بگیریم و میدان الکتریکی را بدست آوریم فقط برای انتگرال‌گیری‌ها در نظر بگیریم

$$\int_V \rho_p\,dv' + \int_S \sigma_p\,da' = 0$$

انتگرال روی کل ماده

دی‌الکتریک از نظر بار الکتریکی خنثی است

بدون بار آزاد

قطبش یک رابطه مستقیم ~~[illegible]~~ با E کلی که در محیط (که همه چیز در تعادل رسیده اند) است پیدا

$$\Rightarrow \underline{E_1^{(3)}} = \frac{\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} + P\cos^2\theta \, \overbrace{R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}^{da'}$$

$da' \rightarrow$ المان سطح

$0 < \theta < \pi$

$0 < \varphi < 2\pi$

$\hat{r}$ را تصویر کردیم روی z

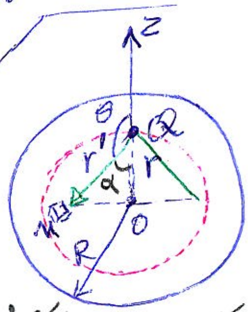
بردار قطبش در کره ماکروسکوپی

$$= \frac{\hat{z}P}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \boxed{\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}}$$

$\rightarrow$ میدان ناشی از توزیع بار سطحی روی کره کوچک (داخل کره)

$$-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma' P da'}{R^2}$$



یک کره داریم که تعدادی بار در آن هست که یک دوقطبی تشکیل داده‌اند. فرض کنید یک بار نقطه‌ای Q درداخل کره ای به شعاع R قرار دارد.

می خواهیم میدان E متوسط را درداخل حجم این کره بدست آوریم.

میدان ناشی از Q را در یک نقطه از کره یا میدان ناشی از آن در نقاط متقابلش نسبت به محور z تقارن دارد و فقط مؤلفه z آنها باقی می ماند.

این کره را به دو قسمت تقسیم می کنیم میدان را در کره بیرونی (بیرون کره) و در داخل جمع می کنیم (میدان بیرون کره فرضی صفر است)

میدان در دو قسمت رنگ شده برابرند اما در خلاف جهت یکدیگر ند پس

میدان کره خط چین صفر است (فیزیک پایه ۲) فقط میدان داخلی ها باقی می ماند برای بیرونی های حجم متوسط آنها را بدست آوریم

$$\bar{E}_z = \frac{1}{V}\int E_z \, dv \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

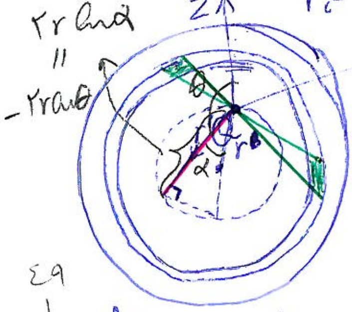
اگر $\cos$ بگذاریم باید یک منفی کنارش باشد تا جهت شکل ۲ در جهت $\hat{z}$ - صادق باشد

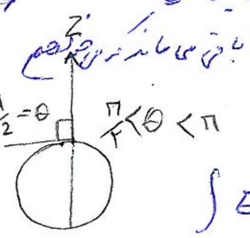
$$E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\cos\theta \qquad \cos\theta = -\cos\alpha$$

مؤلفه $\hat{r}$ و $\hat{z}$

اگر θ را زاویه بزرگتر بین r' و $\hat{z}$ بگذاریم خود $\cos$ منفی می شود که در جهت $\hat{z}$ - باشد بهتر است که این مبدا است

$2r\cos\alpha = -2r\cos\theta$





$$\frac{\pi}{2} = \theta \qquad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$$\int E_z \, dv = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{-2r\cos\theta}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\cos\theta \, \overbrace{r'^2\sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr'}^{\text{المان حجم}}$$

حجم داخلی

برای تعیین کردن محدوده انتگرال دو پارامتر را ثابت می کردیم در یک θ و φ ثابت خط می کشیم، r' از کجا تا کجا می رود

$$\Rightarrow = \frac{2\pi Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\theta\sin\theta\, d\theta\int_0^{-2r\cos\theta}dr' = \frac{-2Qr}{2\varepsilon_0}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{-Qr}{3\varepsilon_0}$$

$$-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{3}$$

گشتاور دوقطبی تک بار

$$\bar{E}_z = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\left(\frac{-Qr}{3\varepsilon_0}\right)$$

گشتاور دوقطبی بار Q نسبت به O مرکز دایره کوچک

$$\vec{P} = \int \vec{r}\, dq$$

قضیه ای داشتیم: اگر یک توزیع بار داشته باشیم که خنثی نباشد P بستگی به مبدأ دارد نسبت به اینکه از چه نقطه ای را به عنوان مبدا گشتاور انتخاب کنیم تغییر می کند اما اگر توزیع بار خنثی باشد نسبت به هر نقطه ای P آن یکسان است

در اینجا اگر روی خود تک بار P را حساب کنیم صفر است اما در نقاط دیگر غیر صفر

اگر یک کره داشته باشیم که یک بار Q یک نقطه داخل روی آن است

میدان الکتریکی متوسط آن برابر است با

$$\Rightarrow \bar{E}_z = \frac{-\vec{P}_z}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{-\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

داخل

(عنصر حجم)

چون در هر عنصر حجمی که در دی الکتریک در نظر بگیریم یک بار Q داخل آن باقی می ماند در کره بالا یک Q در نظر گرفتیم

$$P = \frac{\Delta p}{\Delta v} \longrightarrow \overset{\text{گشتاور دوقطبی کره}}{\Delta p} = \vec{P}\overset{\text{حجم کره}}{\Delta v}$$

دوقطبی های داخل کره یکنواخت هستند (چون ازنظر ماکروسکوپی کوچک است) ⟸ میدان در مرکز این کره برابر است با متوسط میدان در این کره.

گشتاور دوقطبی کره — قطبش ضرب در حجم

$$\vec{E}_2 = \frac{-\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = -\frac{\vec{P}\,\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

این دوقطبی ها $\vec{E}_2 = -E_1^{(3)}$

متوسط میدان دوقطبی های این کره

$$\Longrightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v_1} \frac{\rho_p\, dv'}{r^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S_1} \frac{\sigma_p\, da'}{r^2}\hat{r}$$

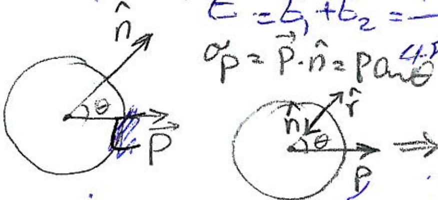
v_1: کل حجم به غیر از کره کوچک

به تقریب

$$\Longrightarrow \vec{E} = E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_p\, dv'}{r^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S_1} \frac{\sigma_p\, da'}{r^2}\hat{r}$$

$v_1 + v_2$

میدان الکتریکی داخل یک دی الکتریک مشابه است با میدان الکتریکی خارج آن



$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = P\cos\theta$

تذکر: $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = -P\cos\theta$

تعمیم اطلاق: هر جایی که بخواهیم میدان الکتریکی را حساب کنیم ρ_p و σ_p را حساب می‌کنیم و از آنها از فرمول بالا میدان الکتریکی را بدست می‌آوریم.

در اینجا ρ_p و σ_p را واقعاً نداریم چون $\vec{P}$ را نداریم حدس می‌زنیم و روش iteration داریم.

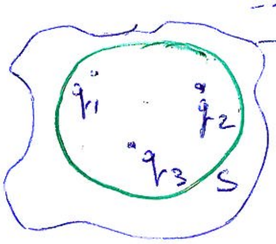
* در آزمایشگاه پی می‌بریم که یک رابطه‌ای به نام ساختمندی (مستقیم) بین $\vec{E}$ و $\vec{P}$ وجود دارد.

(۱) پس باید یک کمیت مناسب را تعریف می‌کنیم به نام بردار جابجایی $\vec{D}$

$$\vec{P}, \vec{E}, \vec{D}$$

برای بدست آوردن E یک سطح گاوسی در نظر می‌گیریم و بارهای درونش را حساب می‌کنیم

ماده دی الکتریک



قانون گاوس $\longrightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q + Q_p)$

Q: بارهای واقعی — Q_p: بارهای قطبش

چون بارهای قطبش را نداریم ρ_p را نداریم

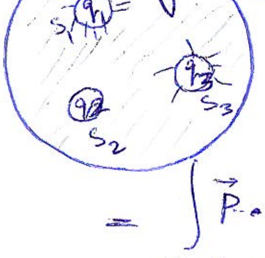
وقتی بارهای قطبش را وارد می‌کنیم انگار که دی الکتریک را کنار گذاشته‌ایم. Q_p جایگزین دی الکتریک می‌شود

$$Q = q_1 + q_3 + \cdots$$

$$Q_p = \int_{S_1+S_2+S_3} \vec{P}\cdot\hat{n}\,da + \int_V (-\nabla\cdot\vec{P})\,dv$$

روی سطوح

* وقتی بارهای قطبش وارد کردید دیگر دی الکتریک وجود ندارد و محیط خلأ می‌شود و دیگر جای دی الکتریک این بارهای قطبش را داریم (بنابراین اگر دی الکتریک در نظر گرفته شود بدون بارهای قطبش ε می‌گذارید اگر بارهای قطبش را گرفتید دیگر دی الکتریک وجود ندارد و خلأ است ε_0 می‌گذارید)



$$= \int_{S_1+S_2+S_3} \vec{P}\cdot\hat{n}\,da - \int_{S_1+S_2+S_3+S} \vec{P}\cdot\hat{n}\,da = -\oint_S \vec{P}\cdot\hat{n}\,da$$

(۲) بار اینجا فقط بارهای واقعی هستند بار قطبش نداریم

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q - \oint_S \vec{P}\cdot\hat{n}\,da\right) \Longrightarrow \boxed{\oint_S (\underbrace{\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}})\cdot d\vec{a} = Q}$$

رابطه بسیار مهم برای دی الکتریک

$\vec{D}$: بردار جابجایی — یک میدان برداری

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{a} = Q} = \int \rho\, dv \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho}$$

قانون گاوس برای بردار جابه‌جایی

$\int \nabla\cdot D\, dv$ قانون دیورژانس

بار آزاد که داخل حجم (سطح گاوسی) وجود دارد.

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$ مهم

$\vec{D}$ فقط به بار واقعی بستگی دارد، ρ و Q واقعی هستند. بارهای مقید اصلاً در این رابطه وجود ندارد.

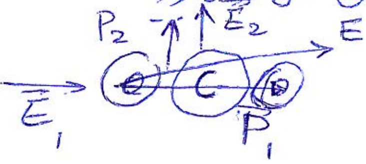
خطی

$$\boxed{\vec{P} = \chi(\vec{E})\, \vec{E}}$$ رابطهٔ ساختمندی

پذیرفتاری الکتریکی

Susceptibility

مثال: همه می‌گویند که χ علاوه بر اینکه تابعی از E می‌تواند باشد شاید به جهت هم وابسته است. یک مولکول خطی را در نظر بگیرید.



$$\vec{P}_2 = \chi_2 \vec{E}_2$$
$$\vec{P}_1 = \chi_1 \vec{E}_1$$

ماده ناهمسانگرد

$\vec{P}$ و $\vec{E}$ همواره هم‌جهت نیستند ممکن است هم‌جهت نباشند.

به ماده‌ای که χ آن وابسته به جهت میدان باشد به آن محیط ناهمسانگرد گوییم (برای جهت‌های مختلف مقادیر متفاوتی برای χ بدست می‌آید) اما اگر محیطی داشته باشیم که χ آن به جهت میدان بستگی نداشته باشد به آن ماده همسانگرد گوییم. مادهٔ خطی ماده‌ای است که χ تابعی از E نباشد. محیط خطی می‌تواند همسانگرد نباشد.

معمولاً ما با محیط‌های همسانگرد و خطی کار داریم و محیط همگن کار می‌کنیم $\Leftarrow$ برای ما اندازهٔ χ ثابت است.

محیط همگن: محیطی که در هر نقطه از آن χ مقدار یکسانی داشته باشد. اما اگر χ در نقاط مختلف تغییر کند محیط ناهمگن است.

$$E = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$$
$$\vec{P} = \chi_1 \vec{E}_{\parallel} + \chi_2 \vec{E}_{\perp}$$

$$P_x = \chi_{11} E_1 + \chi_{12} E_2 + \chi_{13} E_3$$
$$P_y = \chi_{21} E_1 + \cdots$$
$$P_z = \cdots$$

χ یک ماتریس (تانسور) است که می‌توانید آن را قطری کنید.

در حالت کلی $\vec{P}$ در راستای $\vec{E}$ نیست.

در حالتی که ما بررسی می‌کنیم محیط همگن، همسانگرد و خطی است و داریم

$$\vec{P} = \chi \vec{E}$$
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \underbrace{(\varepsilon_0 + \chi)}_{\varepsilon} \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$$
$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi$$

1:39

permitivity گذردهی الکتریکی

اگر ماده وجود نداشته باشد $\chi = 0$ دو قطبی نداشته باشیم $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ (خلاء)

اگر محیط وجود داشته باشد $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

هم از یک جنس (ابعادی) یکسان اند.

$$K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0}$$

گذردهی محیط

گذردهی خلاء

ثابت دی‌الکتریک

ثابت دی‌الکتریک 1 است وقتی محیط مادی نداشته باشیم ($\chi = 0$) باشد.

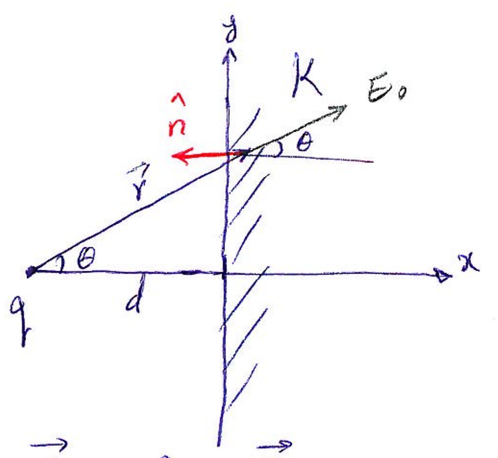
وضعیت‌هایی که ما بررسی می‌کنیم الکترواستاتیک است (همه چیز ساکن است) و ثابت دی‌الکتریک، ε، χ مثبت اند $K > 1$

K می‌تواند منفی هم بشود (نوسانی)

1:44

$$\vec{P} = \chi \vec{E}$$
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$
$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = \varepsilon_0 (K-1)\vec{E}$$

جلسه پانزدهم



مثال: شیمباری که از روش تکرار بدست می‌آید با نتیجه‌ای که از روش ابتدایی بدست می‌آید یکسان است.

فرض کنید یک محیط دی الکتریک نیمه بی‌نهایت داشته باشید و یک میدان $\vec{E}$ روی این محیط ایجاد می‌کنید مثلاً یک بار q در فاصله d آن قرار دارد. در ابتدا در نقطه r فقط میدان ناشی از q است و این میدان باعث یک P ای می‌شود

$$\vec{E}_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

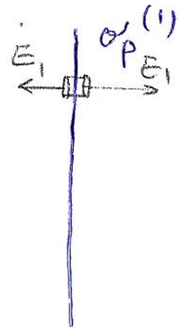
$$\vec{P}^{(1)}=\varepsilon_0(K-1)\vec{E}_0$$

روی x: $\sigma_p=\vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_{x=0}=\vec{P}\cdot(-\hat{i})=-\varepsilon_0(K-1)\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}$

$$\rho_p=-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}=\phi \Leftarrow \nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=0$$

حال می‌توانیم جای این دی الکتریک ρ_p و σ_p را بگذاریم

حال یک صفحه بی‌نهایت طویل با چگالی سطحی $\sigma_p^{(1)}$ وجود دارد که یک میدان جدید غیر از میدان ناشی از q را ایجاد می‌کند.



چون دیگر دی الکتریکی وجود ندارد

$$\vec{E}_1=\frac{\sigma_p^{(1)}}{2\varepsilon_0}=-\frac{(k-1)qd}{8\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}\hat{i}$$

در فواصل دور تکه تکه بار خواهد بود چون $\nabla\cdot\frac{r}{r^3}=0$ و ما میدان را در نزدیکی صفحه بدست آوردیم

$$\vec{P}^{(2)}=\varepsilon_0(k-1)\vec{E}_1=-\frac{(k-1)^2qd}{8\pi|\vec{r}|^3}\hat{i}$$

$$\sigma_p^{(2)}=\vec{P}^{(2)}\cdot\hat{n}\Big|_{x=0}=\vec{P}^{(2)}\cdot(-\hat{i})=\frac{(k-1)^2qd}{8\pi|\vec{r}|^3}$$

$$\vec{E}_2=\frac{\sigma_p^{(2)}}{2\varepsilon_0}=\frac{(k-1)^2qd}{16\varepsilon_0\pi|\vec{r}|^3}\hat{i}$$

میدان نهایی جمع میدان‌های $\vec{E}_1$، $\vec{E}_2$ ... است

$$\vec{E}_2\to P^{(3)}$$

هدف ما میدان الکتریکی مربوط به قطبش است که جمع E_1، E_2 ... است.

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}_p$$

$$\vec{E}_p=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots=\frac{qd(k-1)\hat{i}}{8\pi\varepsilon_0|r|^3}\left(-1+\frac{k-1}{2}+\cdots\right)$$

تصاعد هندسی با فرض $K<\cancel{1}$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{E}_p=\frac{qd(k-1)}{8\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}\frac{-1}{1+\frac{k-1}{2}}=\frac{qd(1-K)}{4\pi\varepsilon_0|r|^3(K+1)}\hat{i}}$$

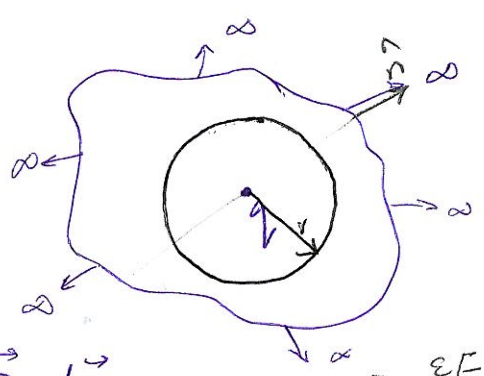
چون $K>1 \leftarrow \vec{E}_p$ منفی است

اگر $\varepsilon>\varepsilon_0$ این وضعیت پیش می‌آید چون بار q مثبت است

چگالی ρ_p که جای ماده دی الکتریک قرار می‌گیرد طوری است که دیورژانس قطبش صفر می‌شود چون تابعیت آن به صورت $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ است چون $\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right)=0$ اگر $\vec{P}$ صفر باشد که واضح است $\rho_p=0$ اگر تابعیت $\frac{\vec{r}}{|r|^3}$ داشته باشد ρ_p صفر می‌شود و هیچ چگالی حجمی ندارد و دیگر آنچه به وجود می‌آید روی سطح است و مسطح است که مسئله را روشن می‌کند

$\boxed{VI}$ این مسئله را با یک روش ساده تر نیز می‌توان حل کرد: (با شرایط مرزی)

وقتی یک دی الکتریک وسط یک خازن باشد $\vec{E}$ نسبت به وقتی دی الکتریک بین خازن نیست تضعیف می‌کند یا وجود دی الکتریک بین صفحات خازن $\vec{E}$ کم می‌شود



۷۱ فرض کنید دی الکتریک ما تا بی‌نهایت رفته است و یک بار نقطه‌ای آزاد q داخل دی الکتریک قرار داده‌ایم می‌خواهیم بدانیم در محیط داخل این دی الکتریک $\vec{E}$ چقدر است؟

اگر محیط همگن باشد یعنی ε ($\varepsilon_0 + \chi$) تابعیت مکانی نداشته باشد دیورژانس از ε گرفته نمی‌شود و داریم:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = q \qquad \varepsilon E$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \xrightarrow{\text{آزاد}} \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}}$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0}$$

معمولاً وقتی اندیس نمی‌گذاریم یعنی بار آزاد است، $\rho_p \leftarrow$ یعنی قطبش

اگر به جای ρ ، ρ_p بگذاریم باید $\frac{\rho_p}{\varepsilon_0}$ بگذاریم چون دیگر دی الکتریک نداریم و خلاء است

$$\frac{\rho}{\varepsilon} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\rho_p = \varepsilon_0 \rho \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right)}$$

در محیط خطی همگن همیشه این رابطه را داریم

اگر بار آزاد نداشته باشیم (از بیرون به زور وارد نکرده باشیم) حتماً چگالی بار قطبش نیز صفر است

((اگر محیط همگن نباشد یعنی ε تابعیت مکان داشته باشد $\chi \neq 0$ در $\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho$ ، دیورژانس از ε هم گرفته می‌شود و دیگر این رابطه درست نیست و با صفر شدن ρ ، ρ_p صفر نخواهد شد

$$\left(\left(\vec{\nabla}\varepsilon \cdot \vec{E} + \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \right. \longrightarrow$$

با این محیط‌ها سروکار نداریم ما

برای این دی الکتریک تا اینجا رفتیم برای بدست آوردن $\vec{E}$ بهتر است از رابطه قانون گاوس برای $\vec{D}$ ، $\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = q$ استفاده کنیم چون فقط بار آزاد q را لازم دارد چون ما اصلاً بار قطبش را نمی‌دانیم... به علت تقارنی که مسئله دارد $\vec{D}$ همه نقاط روی کره به مرکز q و شعاع r یکی هستند $\vec{D}$ آنها برابر است بنابراین می‌توانیم برای این کره قانون گاوس را بنویسیم و میدانیم که $\vec{D}$ چه جهت است. $\vec{D}$ تابعیت θ و φ ندارد فقط تابع شعاع است

مساحت کل کره

$$D 4\pi r^2 = q \rightarrow \vec{D} = \frac{q \hat{r}}{4\pi r^2}$$

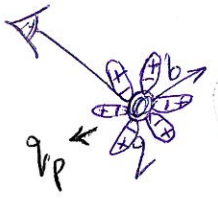
$$\boxed{\vec{E} = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{\varepsilon_0 K} \Rightarrow \frac{q \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 K r^2}} \qquad , \boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 (K-1)\vec{E} = \frac{q(K-1)}{4\pi K r^2}\hat{r}}$$

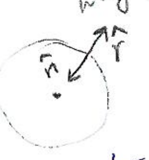
با وجود دی الکتریک میدان E کاهش پیدا کرده در $\frac{1}{K}$ ، $(K>1)$ ضرب شده

با وجود q درون دی الکتریک یک $\vec{P}$ به وجود آمده به جان دی الکتریک ρ_p و σ_p می‌گذاریم $\vec{P}$ تابعی از $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ است پس $\rho_p = 0$

بار نقطه‌ای از نظر ما خیلی بزرگ است

$\hat{n}$ در سمت بیرون دی الکتریک است بنابراین در جهت $-\hat{r}$ است why?





$$\hat{r} \cdot (-\hat{r}) = -1$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot (-\hat{r}) = \frac{(-1) q (K-1) \hat{r}}{4\pi K r^2} = \frac{-q(K-1)}{4\pi K b^2}$$

بار قطبش

$$\boxed{q_p} = 4\pi b^2 \sigma_p = \boxed{-\frac{q(K-1)}{K}}$$

بار منفی $\leftarrow$

$$Q = q + q_p = \frac{q}{K}$$

محیط یک حفره است یک بار q دی الکتریک داریم و یک بار q_p قطبش روی مرز داریم که چشم ما نمی‌بیند q یک بار پوشیده شده و ما $q + q_p$ را می‌بینیم

پس ما در حالتی هستیم و یک باری به اندازه $\frac{q}{k}$ داریم می خواهیم میدان $\vec{E}$ این بار را بدست آوریم:

$$Q = q + q_p = \frac{q}{k} \qquad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} \quad \frac{\vec{r}}{|r|^3}$$

بار منفی q_p ، بار مثبت را پوشش می دهد

[۷] چگونه به رابطه هایی که داریم بدون روش iteration برسیم ؟ شرایط مرزی را مشخص می کنیم در پتانسیل ها میدان ناپیوسته بود اما φ پیوسته بود اما در دی الکتریک ها

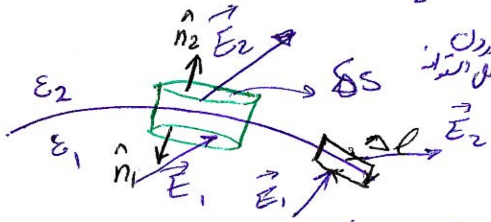
از مرز که عبور کنیم روی مولفه های میدان چه اتفاق می افتد فرض کنید دو دی الکتریک ε_1 و ε_2 در دو طرف صفحه را داشته باشیم

قانون گاوس را برای $\vec{D}$ می نویسیم یک استوانه کوچک با سطح DS برای بدست آوردن بار داخل استوانه

یک چگالی بار حجمی + یک چگالی بار سطحی که روی سطح این استوانه است

در این استوانه وجود دارد اگر حجم این استوانه را به صفر میل دهیم دیگر

چگالی حجمی بار داخل استوانه صفر است



1.9 $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{a} = q \qquad \vec{D}_2\cdot\hat{n}_2\,\delta s + \vec{D}_1\cdot\hat{n}_1\,\delta_s = \sigma\,\delta_s$$

بار آزاد — بار حجمی و سطحی دارد — بار سطحی آزاد

$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\hat{n}_2 = \sigma$ بار سطحی آزاد

این n به سمت محیط (۲) است $\hat{n}_2$

یعنی $\vec{D}_1\cdot\hat{n}_2$ و $\vec{D}_2\cdot\hat{n}_2$ مولفه های عمودی $\vec{D}_2$ و $\vec{D}_1$ در راستای $\hat{n}_2$ هستند (n عمود بر سطح محیط (۲))

$$\Rightarrow \boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$$

مولفه عمودی بردار جابجایی ناپیوسته است مگر اینکه بار آزاد سطحی نداشته باشیم

$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma$ مولفه عمودی

مولفه عمودی $\sigma = D_{1n} - D_{2n}$ اگر n به سمت محیط ۱ باشد

برای محیط های دی الکتریک ، خاصیت میدان الکتریکی $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ است

چون $\nabla\times E = 0$ قضیه استوکس

1.12 بار آزاد $\sigma = 0 \longrightarrow D_{2n} = D_{1n}$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

بنابراین اگر یک مسیر بسته روی مرز دو دی الکتریک در نظر بگیریم با ارتفاع خیلی کم که به صفر میلش می دهیم

dl پایین و بالا مرز منفی یکدیگرند

$\vec{E}$ را در امتداد مماس تصویر کنیم

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

$$\Rightarrow \vec{E}_2\cdot\Delta\vec{l} - \vec{E}_1\cdot\Delta\vec{l} = 0 \quad * \boxed{E_{2t} = E_{1t}}$$

* مولفه مماسی میدان الکتریکی پیوسته است

$$\frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \varphi_2}$$

پتانسیل پیوسته

معنایش این است که پتانسیل وقتی از روی مرز عبور می کند پیوسته است

چون $\vec{E}$ که داریم محدود است ∞ نمی شود

وقتی dl را به صفر میل دهیم $\int E\cdot dl$ به صفر میل می کند

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$-E\cdot dl = \infty$$

[۷] اگر یک توزیع بار در دی الکتریک داشته باشیم چطور می توانیم $\vec{E}$ را تعیین کنیم؟

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ بار آزاد

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}\\ E = -\nabla\varphi\end{array}\right\} \Rightarrow \nabla^2\varphi = \frac{-\rho}{\varepsilon}$$

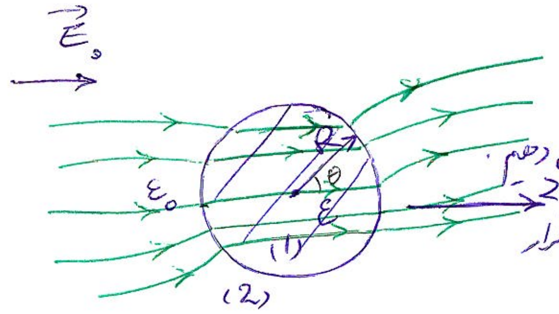
محیط خطی $\Rightarrow E$

معادله پواسون

همان رابطه ای که برای خلاء داشتیم

$$\text{if } \rho = 0 \longrightarrow \nabla^2\varphi = 0$$

معادله لاپلاس



پس کافی است برای دی الکتریک‌هایی که بار آزاد نباشد $\nabla^2 \varphi = 0$

همان مثالها و کارهایی که برای رساناها داشتیم را دوباره برای دی الکتریک اجرا می‌دهیم

اگر یک $\vec{E}_0$ یکنواخت در کل فضا در امتداد z داشته باشیم (قبلاً اگر یک رسانا قرار دهیم در محیط خنثی باشد) حال یک کره غیر رسانا دی الکتریک در محیط ε_0 قرار داده‌ایم می‌خواهیم بدانیم $\vec{E}$ چه می‌شود. حالا که تقارن سمتی ϕ دارد می‌توانیم از هماهنگ‌ها برای لاپلاس استفاده کنیم یکی در داخل یکی در بیرون. محیط داخل چون $r=0$ شاملش می‌شود پس $r^{-(n+1)}$ نباید داشته باشد

$$\begin{cases} \text{داخل}\quad \varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \\ \text{بیرون}\quad \varphi_2 = \underset{?}{-E_0 r\cos\theta} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)}_{\text{در } \infty \text{ صفر است}} \end{cases}$$

برای بیرون چون شامل ∞ هم می‌شود فقط r^n نباید داشته باشد اما چون E در بی‌نهایت باید E_0 شود

$E = \vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ در بی‌نهایت

$\varphi_2 = -\vec{E}_0 \cdot \hat{z} = -E_0 r \cos\theta$ در $r = \infty$?

$-\nabla \varphi_2 = \vec{E}_0$

در سطح کره $r=R$ باید φ پیوسته باشد

$r = R \quad \varphi_1 = \varphi_2 \longrightarrow$

$\cos\theta$ را از دو طرف تساوی ساده کرده‌ایم

$$* \begin{cases} A_1 R = -E_0 R + B_1 R^{-2} & n=1 \\ A_n R^n = B_n R^{-(n+1)} & n \neq 1 \end{cases}$$

چون P_n ها متعامدند ← برای جملات دیگر نیاز جملات با ضریب $\cos$ باید دو $\sum$ برابر باشند

$$n \neq 1 \Rightarrow \boxed{B_n = A_n R^{2n+1}} \quad n \neq 1$$

روی مرز بار آزاد نداریم $\Leftarrow$ $D_{1n} = D_{2n}$

مؤلفه عمودی بردار جابجایی در راستای r

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

$$-\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \qquad \varepsilon_1 \sum n A_n r^{n-1} P_n(\cos\theta) = \varepsilon_2 \Big[-E_0 \cos\theta - \sum (n+1) B_n r^{-(n+2)} P_n(\cos\theta) \Big]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 A_1 = -\varepsilon_2 \left(E_0 + 2 B_1 R^{-3} \right) & n=1 \\ \varepsilon_1 n A_n R^{n-1} = -\varepsilon_2 (n+1) \dfrac{B_n}{R^{n+2}} & n \neq 1 \longrightarrow \varepsilon_1 n A_n R^{n-1} = -\varepsilon_2 (n+1) A_n \dfrac{R^{2n+1}}{R^{n+2}} \; R^{n-1} \end{cases}$$

$$A_n \left(\varepsilon_1 n + \varepsilon_2 (n+1) \right) = 0 \Rightarrow \boxed{A_n = 0} \longrightarrow \boxed{B_n = 0}$$

پس تنها جملات $n=1$ باقی می‌ماند

$$* \longrightarrow A_1 = -E_0 + \frac{B_1}{R^3} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(E_0 + \frac{2 B_1}{R^3} \right)$$

$$\frac{B_1}{R^3} \left(1 + \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) = E_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \Rightarrow \boxed{B_1 = E_0 R^3 \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \right)}$$

$$\Rightarrow A_1 = E_0 \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} - 1 \right) \longrightarrow \boxed{A_1 = \frac{-3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0}$$

φ_1 فقط جمله A_1 دارد $n=1$

$$K_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = K_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$$ شرط مرزی در فصل مشترک دی الکتریک

$$\vec{E}_0 = E_0\hat{z}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{-3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2} E_0 \overbrace{r\cos\theta}^{z} \\ \varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + \dfrac{E_0 R^3}{r^2}\left(\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\right)\cos\theta \end{cases}$$

داخلی $\vec{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = \dfrac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_0} E_0\hat{z} = \dfrac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\vec{E}_0$

E_1 چون فقط تابعیت z دارد در امتداد z خواهد شد

بیرون $\vec{E}_2 = -\nabla\varphi_2$

E_2 هم تابعیت r و هم تابعیت θ دارد

میدان داخلی ها در راستای z است

اگر محیطی که داشتیم رسانا بود (بار آزاد داشت) در دی الکتریک بارها جابجا می‌شوند و قطبیدگی به وجود می‌آمد بارهای آزاد به بیرون فراری‌اند که در محیط وجود دارد به ∞ میل می‌کند بنابراین یک E به راحتی فاصله زیادی از هم می‌گیرند یعنی

** یک دی الکتریک وقتی $\begin{cases} \varepsilon \to \infty \\ \text{or} \\ \chi \to \infty \\ \text{or} \\ k \to \infty \end{cases}$ ε یا k یا χ آن به ∞ میل کند می‌شود رسانا

در مسئله ε به ∞ میل می‌کند E_1 صفر می‌شود و چیزی که برای رسانا داشتیم بدست می‌آید

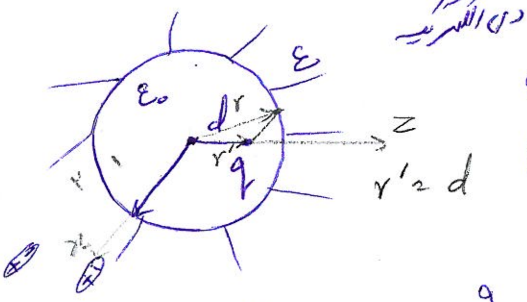
جلسه شانزدهم

مسئله: یک حفره داشته باشیم که درون آن بار q و بیرون آن دی الکتریک با شدت ε و حفره ε_0 (خلاء) (یک دی الکتریک ε داریم که از داخل آن یک حفره در آورده‌ایم و داخل حفره بار q قرار داده‌ایم به فاصله d از مرکز)

پتانسیل را در داخل حفره؟

$\varphi_{in} = ?$

برعکس این مسئله را نیز حل کنید



در φ داخل $r^{-(n+1)}$ ظاهر می‌شود

$$\varphi_1 = \varphi_{in} = \sum A_n r^n P_n(\cos\theta) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_2 = \varphi_{out} = \sum B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$ ← هیچ بار آزادی در محیط بیرون حفره نیست

شرایط مرزی

$$\varphi_1\big|_{r=R} = \varphi_{out}\big|_{r=R} \longrightarrow \sum\left(A_n R^n + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d^n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) = \sum \frac{B_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

مولفه عمودی D پیوسته است

در راستای z !!

$$D_{in} = D_{2n} \longrightarrow \cancel{\varepsilon_0}\frac{\partial\varphi_{in}}{\partial r}\Big|_{r=R} = \overset{K}{\cancel{\varepsilon}}\frac{\partial\varphi_{out}}{\partial r}\Big|_{r=R}$$

$$\sum\left[A_n n R^{n-1} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d^n}{R^{n+2}}(-(n+1))\right]P_n(\cos\theta) = K\sum \frac{-(n+1)B_n}{R^{n+2}} P_n(\cos\theta)$$

$$A_n, B_n \longrightarrow E_1, E_2 \longrightarrow D_1, P_1 \longrightarrow \sigma_p\ ?$$

$$A_0 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{B_0}{R} \longrightarrow B_0 = A_0 R + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\left(A_1 R + \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)\cos\theta = \frac{B_1}{R^2}\cos\theta \rightarrow B_1 = A_1 R^3 + \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}$$

در بی نهایت فرض می‌کنیم φ=0 چون بار آزاد نداریم و بار قطبشی فقط روی سطح وجود دارد و در فواصل دور P هست ولی σ_p صفر می‌شود چون P تابعی از E بدست می‌آید و E

پتانسیل که تعیین شد ← E بدست می‌آید ← D و قطبش P

بعضی از مواد قطبیدگی ذاتی دارند

$$B_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R K} = A_0 R + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$$

اگر در یک محیط بصورت عمدی ρ آزاد نداشته باشیم بدان معناست که ρ_p صفر می‌شود.

$$\nabla\cdot \cancel{D} = \rho \xrightarrow{\text{آزاد}} \qquad \longrightarrow \rho_p = \rho\varepsilon_0\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right)$$

$$\rho_p = -\nabla\cdot P$$

اگر ε تابعی از مکان نباشد

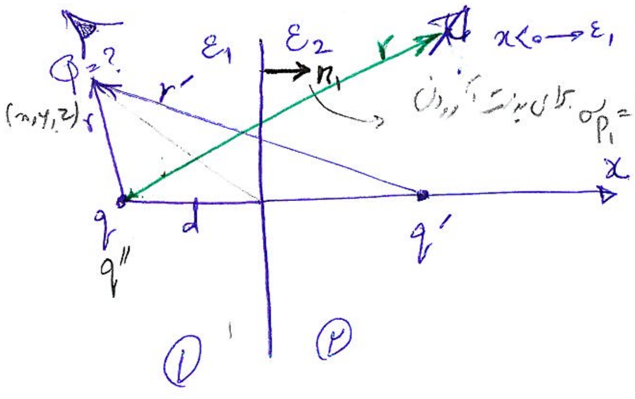
if $\rho = 0 \Rightarrow \rho_p = 0$

اما اگر محیط همگن نباشد ρ_p برحسب ρ یک جمله دیگری دارد و نمی‌توان گفت اگر $\rho = 0$ آنگاه ρ_p حتماً صفر می‌شود.

$B_1 =$

روش تصویر در دی الکتریک

در دی الکتریک‌ها در یک شرایط خاص می‌توانید از روش تصویر استفاده کنید آن هم به روش سعی و خطا باید حدس بزنید بارهای تصویری را (حدس می‌زنیم) و اگر شرایط مرزی را ارضا کرد بارهای تصویری که روش تصویر جواب نمی‌دهد



$x<0 \to \varepsilon_1$, $x>0 \to \varepsilon_2$

در این مسئله می‌توانید با تصویر کردن بار الکتریکی مسئله را حل کنید و شرایط مرزی را ارضا کنید و چه باری را در محیط ۲ اضافه کنید تا شرایط مرزی ارضا شود.

برای بیان کردن $\sigma_{p_1} = P_1\cdot\hat{n}_1$

به جای بار قطبش که روی مرز هست q' را قرار می‌دهیم

به جای کل محیط یک بار q و q' قرار می‌دهیم وقتی در محیط ۱ هستیم

اگر چشم مشاهده کننده در محیط ۲ باشد و در مکان در محیط ۲ به جای q را بدست آوریم چون محیط دی الکتریک است خود بار q را نمی‌بیند از محیط ۲

یک بار دیگری به نام q'' در جای q می‌بیند و می‌گوید

$$= \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2}\frac{1}{r}\text{ پتانسیل}$$

این بار q'' در واقع مجموع بارهای قطبش و q هست من حدس زدیم که به جای بار قطبش و q یک q'' می‌توانم بگذاریم و q'' کاملاً حدسی است (از آسمان!)

حال بررسی می‌کنیم اگر این q و q' و q'' شرایط را ارضا کردند حدس ما درست بوده

* همیشه در فیزیک مسئله‌ها را با کره حل کنید (مثلاً حتی اگر حرکت اسب را می‌خواهید بررسی کنید اسب را به صورت کره در نظر بگیرید تا به حل مسئله نزدیک شده اید و سپس سر و بقیه اجزای اسب را به کره اضافه کنید!!)

در اینجا هم همین طور. مسئله قبلی که q درون حفره داخل دی الکتریک بود اصلاً از روش تصویر قابل حل نیست

اگر در محیط ۱ باشیم $\frac{q}{4\pi\varepsilon_1}$ اگر در محیط ۲ باشیم $\frac{q}{4\pi\varepsilon_2}$ می‌نویسیم که می‌توانیم به جای $q_1\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}$ بنویسیم

اگر در محیط ۲ باشیم در $\underline{r}$ بار آزاد نداریم و فقط q'' را می‌بینیم

در محیط ۱
$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha_1\left(\dfrac{q}{r} + \dfrac{q'}{r'}\right) \\ \varphi_2 = \alpha_2\left(\dfrac{q''}{r}\right) \end{cases}$$

$$r = \sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}$$
$$r' = \sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}$$

$$\varphi_1\Big|_{x=0} = \varphi_2\Big|_{x=0} \longrightarrow \boxed{\alpha_1(q+q') = \alpha_2 q''}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \longrightarrow -\varepsilon_1 \overbrace{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}}^{E_x}\Big|_{x=0} = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \longrightarrow \varepsilon$$

$$\longrightarrow \alpha_1 \varepsilon_1 \left[\frac{+q}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{-q'}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] = \varepsilon_2 \alpha_2 \frac{q''}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{q'' = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(q-q')} \quad (*)$$

$$q'' = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(q+q')$$
$$\Rightarrow \cancel{\alpha_1}(q+q') = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\cancel{\alpha_1}(q-q')$$

$$\Rightarrow q'\left(1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) = q\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-1\right) \Rightarrow \boxed{q' = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q} \longrightarrow$$ q در محیط ۱ را

$$(*) \Rightarrow q'' = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} q \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

بنابراین شرایط مرزی ارضا شدند

$$\text{So} \quad \varphi_1 = \alpha_1\left(\frac{q}{r} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{q}{r'}\right) \quad \& \quad \varphi_2 = \frac{\varepsilon_1}{\cancel{\varepsilon_2}}\alpha_1 \frac{2q}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{r}$$

حال $\alpha_1 = ?$ و $\alpha_2 = ?$

فرض کنید $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Leftarrow$ تمام فضا ε_1 باشد در این صورت توقع داریم فرمول های φ همچنان درست باشند

$$\varphi_1 = \alpha_1 \frac{q}{r}$$ وقتی فضا کلاً ε_1 باشد $$\longrightarrow \varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}$$

اگر کل محیط ε_2 باشد $\Leftarrow$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\dfrac{q}{r} + \dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{q}{r'}\right) \\ \varphi_2 = \dfrac{\cancel{\varepsilon_1}}{\cancel{\varepsilon_1}4\pi\varepsilon_2}\dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{q}{r} \end{cases}$$

یک ε_2 در صورت یک ε_2 در مخرج حذف داریم $\longrightarrow$

اگر میدان های الکتریکی را تعیین کنیم و از روی آنها P ها و بعد چگالی بار را تعیین کنیم می‌خواهیم ببینیم جواب
این میشه همان جوابی که با روش iteration بدست آوردیم هست یا نه؟

n برای محیط ۱ به سمت بیرون محیط ۱ است

$$\vec{E}_1 = -\vec{\nabla}\varphi_1 \longrightarrow E_{1x} = \frac{-\partial\varphi_1}{\partial x}$$

پس سؤال فقط در جهت $\hat{i}$ را لازم داریم برای $\nabla\varphi$

$$\vec{E}_2 = -\vec{\nabla}\varphi_2 \longrightarrow E_{2x} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}$$

$$\vec{P}_1 = (\varepsilon_1-\varepsilon_0)\vec{E}_1 \longrightarrow \sigma_{P_1} = \vec{P}_1\cdot\hat{i} = (\varepsilon_1-\varepsilon_0)\vec{E}_1\cdot\hat{i}$$

$$\vec{P}_2 = (\varepsilon_2-\varepsilon_0)\vec{E}_2 \longrightarrow \sigma_{P_2} = \vec{P}_2\cdot(-\hat{i}) = -(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\vec{E}_2\cdot\hat{i}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\vec{E}_1 = -\vec{\nabla}\varphi_1 \Rightarrow \vec{E}_{1x}\Big|_{x=0} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{1}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

$$\vec{E}_2 = -\vec{\nabla}\varphi_2 \longrightarrow \vec{E}_{2x}\Big|_{x=0} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_2}\,\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\frac{d}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Longrightarrow \sigma_{p_1} = (\varepsilon_1-\varepsilon_0)\vec{E}_1\cdot\hat{i} = (\varepsilon_1-\varepsilon_0)\frac{q\,\varepsilon_2}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\,\frac{d}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\sigma_{p_2} = -(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\vec{E}_2\cdot\hat{i} = \frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$-\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\varepsilon_0-\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

$$\sigma = \sigma_{p_1}+\sigma_{p_2} = \frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left[\frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{\varepsilon_1}\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right]$$

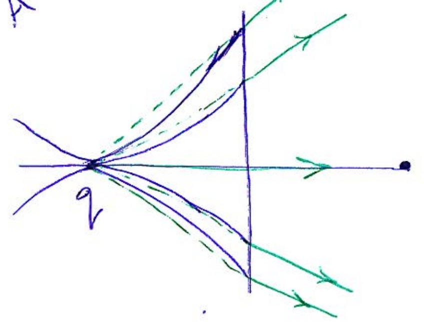
$$\boxed{\sigma = \frac{qd\varepsilon_0}{2\pi\varepsilon_1(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)}$$

q در محیط ε_1 است

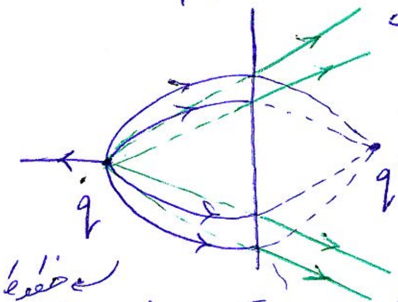
اگر $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \Leftarrow q'>0$ if $q>0 \Leftarrow$ به عبارتی q و q' هم علامتند

اگر بخواهیم خطوط میدان دو بار هم علامت را رسم کنیم

A



$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$



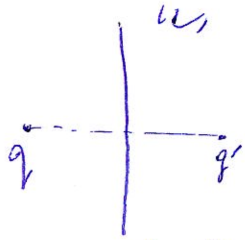
* "q همیشه هم علامت با q است

اگر $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \leftarrow q'<0$ یعنی $\Leftarrow$

اگر طرف راست رسانا باشد فرضه $\varepsilon_2 \rightarrow$ صفحه رسانای بی نهایت طولی که به زمین وصل بود و یک بار q سمت چپ آن

$\Leftarrow$ تبدیل سمت راست همان بود می شود

خطوط میدان بار q پیوسته نیستند



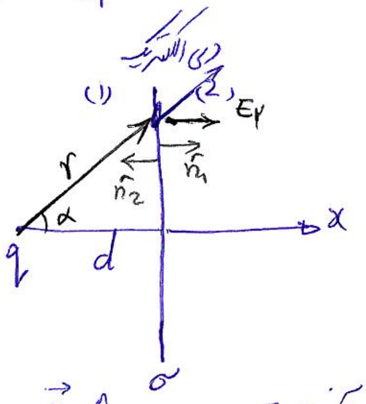
حالت های خاص مسئله بالا به همان $\varphi_2 = 0$ و $q' = -q$ همان بار تصویری که برای رسانا داشتیم.

☐ این مسئله را اگر به شکل دیگر بالا نگاه کنیم منجر می شود.

در مسئله رسانا از دو طریق σ را بدست آوردیم

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

$$D_{1t} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}D_{2t}$$



E مربوط به قطبش است که روی دی الکتریک ایجاد شده σ

$\hat{r} = \dots + \cos\alpha\,\hat{i}$

علاوه میدان E بقیه چیزهایی که در محیط است (E')

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma_p}{2\varepsilon_0}\hat{i} + \vec{E}' \longrightarrow E_{2x} = \frac{\sigma_p}{2\varepsilon_0} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{d}{r}$$

$\cos\alpha$ ... ε_1

~~وقتی بارهای قطبش را در نظر گرفتیم دیگر دی الکتریک را دور می اندازیم و محیط خلاء است~~

$$\vec{E}_1 = \frac{-\sigma_p}{2\varepsilon_0}\hat{i} + \vec{E}'$$

σ

در این روش اصلاً کاری نداریم از چه محیطی داریم نگاه می کنیم آنچه هست را بررسی می کنیم

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$$

$$\sigma_{p_1} = P_1\cdot\hat{i} \longrightarrow \sigma_p = (\vec{P}_1-\vec{P}_2)\cdot\hat{i} = \left[(\varepsilon_1-\varepsilon_0)E_1 - (\varepsilon_2-\varepsilon_0)\vec{E}_2\right]\cdot\hat{i}$$

$$\sigma_{p_2} = P_2\cdot(-\hat{i})$$

سپس کافیست مؤلفه $\hat{i}$، E_1 و E_2 را بنویسیم

میدان الکتریکی قطبش ها روی صفحه مؤلفه $\hat{i}$ ندارد همش روی صفحه است و مؤلفه $\hat{i}$ ندارد تمام بارهای قطبش روی صفحه قرار می گیرند

دور بار q یک بار قطبش است که مقدار آن $\frac{q}{k_1}$ است پس پتانسیل ناشی از q میشه

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_1} = \frac{q/k_1}{4\pi\varepsilon_0}$$

کره کوچک

$+q$

$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma_p}{2\varepsilon_0}\hat{i} + \vec{E}' \longrightarrow E_{1x} = \frac{-\sigma_p}{2\varepsilon_0} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_1}\frac{d}{r^3}$$

$$4.\quad \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} = \left[(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\left(\frac{-\sigma_p}{2\varepsilon_0} + \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) - (\varepsilon_2-\varepsilon_0)\left(\frac{\sigma_p}{2\varepsilon_0} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_1}\frac{d}{r^3}\right)\right]$$

σ_p را ساده کنید

σ_p ها را یک طرف ببرید

$$q_p = \left(-q + \frac{q}{k_1}\right)$$

ε_0

q

هر چی بار داریم را در نظر بگیریم یک بار قطبش روی صفحه و بار قطبش

در این روش بدون بدست آوردن φ ، σ_p را حساب کردیم q وجود q را داریم حالا دیگه

راه دیگر: نیرویی که به q وارد میشود فقط توسط میدان ناشی از q است. محیط پیوسته خلاء

با در نظر گرفتن بار قطبش q میدان E ناشی از q در نقطه ای روی سطح بارهای قطبش

باید با لحاظ بار قطبش و بار خود q حساب شده که میشه: $\frac{q}{4\pi\varepsilon_1}$

از طرف بار تصویری موضوع چیز دیگری ست

$$Q = q + q_p = \frac{q}{k}$$ قبلاً داشتیم

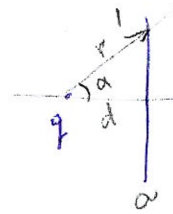
$$q_p = -q\frac{(k-1)}{k}$$

$\boxed{7}$ اگر یک بار نقطه ای در داخل یک دی الکتریک باشد و فصل مشترک دو دی الکتریک به همان شکلی که گفته شد باشد

با توجه به اینکه یک بار قطبش روی صفحه دی الکتریک ایجاد میشود یک بار قطبش روی صفحه داریم

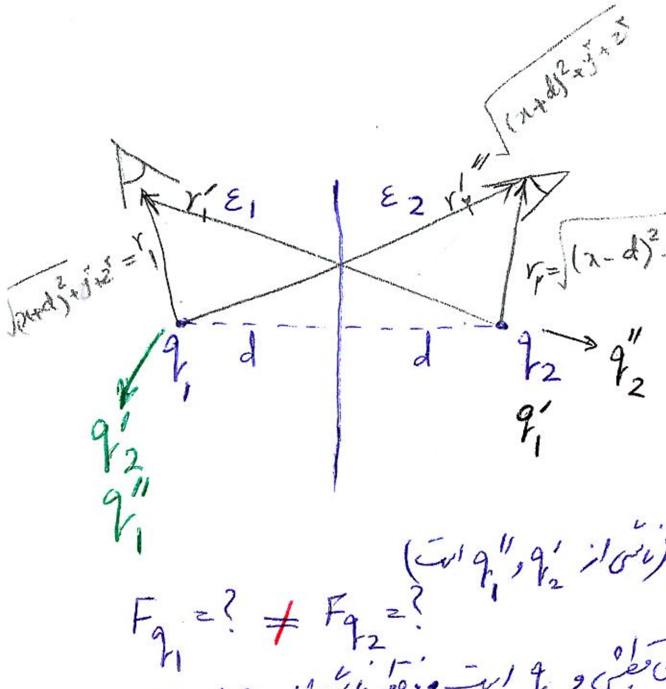
نیرویی که از این صفحه به بار q وارد میشود را میتوانیم بدست آوریم

$r = \dots + \cos\alpha\,\hat{i}$



$$E_{1x} = \frac{-\sigma_p}{2\varepsilon_0}\hat{i}$$

$$F = E_{1x} q$$



$\boxed{7}$ مسئله: در واقع چهار تا بار جایگزین

در محیط $\mathbf{1}$ که باشیم یک بار تصویری از خود q_1 (q_1') داریم و q_2 را به صورت یک q_2'' میبینیم. (در محل q_2)

در محیط $\underline{2}$ که باشیم به همین ترتیب یک q_2' و q_1'' داریم

نیرو وارد بر q_2 را میتوانیم از طریق q_2' و q_1'' بدست آوریم (ناشی از q_2' و q_1'' است)

$$F_{q_1} = ? \cancel{=} F_{q_2} = ?$$

F_{q_1} با F_{q_2} برابر نیست چون نیرویی که به q_1 وارد میشود از بارهای قطبش و q_2 است و فقط ناشی از q_2 نیست

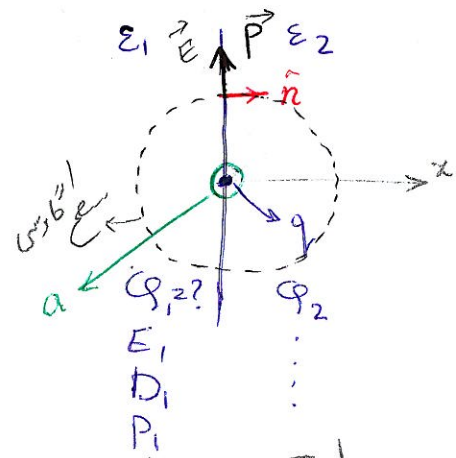
$$\varphi_1 = q_1\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_1' + q_2''}{r_2}\right)$$

$$\varphi_2 = q_2\left(\frac{q_2}{r_2} + \frac{q_2'}{r_1} + \frac{q_1''}{r_1}\right)$$

$$\varphi_1\big|_{x=0} = \varphi_2\big|_{x=0}$$

جلسه 17

مثال: (۲۱)



$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha_1 \dfrac{q}{r} + C_1 = \alpha \dfrac{q}{r} \\ \varphi_2 = \alpha_2 \dfrac{q}{r} + C_2 = \alpha \dfrac{q}{r} \end{cases}$$

شرایط مرزی را بنویسید

چون $r \to \infty$ باید φها صفر شود

C_1 و C_2 ثابت ها باید صفر شوند

همیشه به مسئله نگاه ساده داشته باشید

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$D_{1n} = D_{2n}$$

روی مرزی با یک $\vec{r}$ مشخص باید φ_1 و φ_2 برابر باشند

$$\varphi_1\Big|_{x=0} = \varphi_2\Big|_{x=0} \longrightarrow \alpha_1 \frac{q}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{\alpha_2 q}{\sqrt{y^2+z^2}} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

در هر دو محیط یک شکل پتانسیل داریم

بررسی کنید ببینید از چه رابطه‌ای استفاده کنید (از بین روابطی که گفته شده)

پتانسیل که پیوسته باشد روی مرز یعنی $E_{1t} = E_{2t}$ (میدان مماسی) α هم در P ، E و هم در D است. قانون گاوس اگر برای E می‌نوشتیم هم بارهای قطبیده و هم بارهای آزاد را در نظر می‌گرفتیم اما اگر برای D قانون گاوس را بنویسیم فقط بارهای آزاد را در نظر می‌گیریم چون بارهای آزاد را خود مشخص می‌دانیم q است پس بهترین رابطه مربوط به D است که استفاده کنیم

$$E = \frac{\alpha q}{r^2}$$

$$\oint_S D \cdot \hat{n}\, da = q$$

$$① \longrightarrow \vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 = -\varepsilon_1 \nabla\varphi_1 = +\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\hat{r} = \alpha \frac{\varepsilon_1 q}{r^2}\hat{r}$$

$$② \longrightarrow \vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2 = -\varepsilon_2 \nabla\varphi_2 = \frac{\alpha \varepsilon_2 q}{r^2}\hat{r}$$

مساحت نیم کره

Eهای دو محیط یکسان است اما Dها متفاوتند

نصف کره را (به شعاع r)

$$\longrightarrow \frac{\alpha \varepsilon_1 q}{\cancel{r^2}} 2\pi \cancel{r^2} + \frac{\alpha \varepsilon_2 q}{\cancel{r^2}} 2\pi \cancel{r^2} = q$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}} \longrightarrow \boxed{\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{q}{r}}$$

$$\boxed{\vec{P}_i = (\varepsilon_i - \varepsilon_0)\vec{E}_i = (\varepsilon_i - \varepsilon_0)\frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{\hat{r}}{r^2} \qquad i=1,2}$$

$$E_i = \nabla\varphi$$

چون بار آزاد روی مرز کره نداریم مؤلفه عمودی پیوسته می‌شود و مؤلفه عمودی $\vec{D}$ صفر است روی مرز کره؟

$\hat{r}$ در جهت شعاعی است و مؤلفه عمودی ندارد و مؤلفه‌های شعاعی Dها پیوسته نیستند روی مرز اگر E را در یک نقطه بخواهیم تعیین کنیم باید آن عنصر را حذف کنیم اثر بقیه بارها را روی آن نقطه حساب کنیم

$\hat{D} \cdot \hat{r}$

معمولاً هر چیز که نامشخص باقی می‌ماند مانند ρ در اینجا با استفاده از روابط گفته شده بدست می‌آید مانند رابطه قانون گاوس
خود $\vec{P}$ که بدست آوردیم مشخص می‌کند که بارهای قطبش همه جا صفر است هم روی مرز هم نقاط دیگر هم روی مرز هم روی صفحه

۲۸:۴۷

ρ_p روی تمام مرزهایی که وجود دارد صفر است فقط دور کره به شعاع کوچک مثلاً a

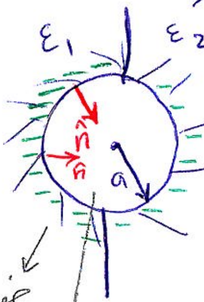
$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$

صفر است $\vec{P}$ روی مرز m شعاعی است

$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = 0 \longrightarrow$ $\vec{P}$ بر $\hat{n}$ عمود است

σ_p روی تمام مرزها صفر است بجز از خود کره که دو تا σ دارد یکی روی نیم کره سمت چپ دیگری روی نیم کره سمت راست

روی کره $\sigma_p' = \vec{P}\cdot\hat{n}$ $\to -r$



وقتی مرز برای این محیط‌ها تعیین می‌کنیم n آنهایی به سمت بیرون می‌شود (محیط ما بیرون از کره است) $\hat{n}$ شعاعی در جهت $-\hat{r}$ است

$$\sigma_{p_1}' = \vec{P}_1\cdot(-\hat{r}) = (\varepsilon_1-\varepsilon_0)\frac{q\,\cancel{(\hat{r})(-\hat{r})}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$$

چون $E = \frac{qq}{a^2}\hat{r}$ ، $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$

$$\sigma_{p_2}' = \vec{P}_2\cdot(-\hat{r}) = (\varepsilon_2-\varepsilon_0)\frac{q\,\cancel{(\hat{r})(-\hat{r})}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$$

خود محیط

داخل کره بیرون محیط است

بسته به اینکه ε_1 بزرگتر باشد یا ε_2 توزیع بار روی مرز کره تعیین می‌شود (روی مرز کره در ε_1 بیشتر باشد)
اگر کل بار قطبش روی کره بخواهیم باید انتگرال $\hat{\sigma}_p$ بگیریم هر سمت در $2\pi a^2$ ضرب می‌شه

$$\boxed{q_p} = \int \sigma_p\, da$$

اگر همه محیط خلاء باشد $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$ می‌شه و q_p صفر می‌شه

$$= \frac{-q(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - 2\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = \boxed{\left(\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}-1\right)q}$$

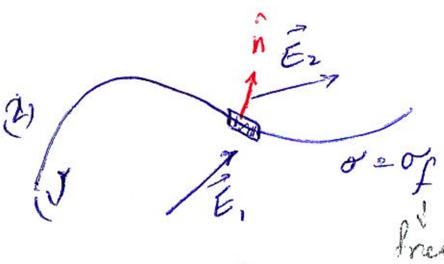
بار q از نظر ماکروسکوپی کوچک است و از نظر میکروسکوپی بار خیلی بزرگ است

۳۷

و میدان نهایی را بدست می‌آوردیم ماکروسکوپی بودند (یعنی بار آزمون q از نظر ماکروسکوپی کوچک است)

گاهی یک محیطی داریم و می‌خواهیم بدانیم نیرویی که بر بخشی از بارهای محیط وارد می‌شود چقدر است؟ و تاکنون گفته‌ایم خود بار را حذف کنیم و میدان ناشی از بقیه بارها را بدست آوریم

فرض کنید محیط ۱ و ۲ را داریم با بار قطبش هم اگر باشه باید برای میدان E در نظر بگیریم
فرض کنید σ را داریم در محیط، می‌خواهیم بدانیم نیرویی که به یک عنصری از σ وارد می‌شود چقدر است؟ شرایط مرزی که گفته بودیم در اینجا صادق است برای E و D باید ببینیم میدانی که از بقیه بارها روی این محیط است چقدر است؟ عنصر سطحی را بر می‌داریم در نزدیکی این عنصر میدان ناشی از خود عنصر E_{12} و E_{22} ناشی از بقیه بارهاست $E_{(0)}$



$\sigma = \sigma_f + \sigma_p$

free

در نزدیکی عنصر، عنصر شبیه یک صفحه می‌شود
وقتی da را برداریم میدان در نزدیکی آن da کمی بالا و پایین... da یکسان است. هدف یافتن E_0 (میدان بقیه روی da) است
E_0 متوسط میدان بالایی و پایینی است میدانی که عنصر می‌بیند است. E ناپیوسته است

$dq = \sigma\, da$

$$\vec{E}_2 = E_{12} + E_{(0)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n} + \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{11} + \vec{E}_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{n}) + E_0$$

در محیط ۱ عنصر (۱)

$$\begin{cases} \vec{E}_0 = \frac{1}{2}(\vec{E}_1+\vec{E}_2) \\ \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} \end{cases}$$

$$d\vec{F} = \overbrace{\sigma\, da}^{dq}\,\vec{E}_0 = \frac{1}{2}(\vec{E}_1+\vec{E}_2)\,\sigma\, da$$

نیرویی که به عنصر وارد می‌شود

برای بدست آوردن نیروی وارد بر یک عنصر روی یک پوسته کروی میدان را بیرون و درون کره بدست می‌آوریم جمع و تقسیم بر ۲ می‌کنیم و $\vec{F}$ را حساب می‌کنیم

مثلاً اگر محیط ۱ رسانا و ۲ خلاء $E_1 = 0$

که محیط
اگر داخل رسانا : $\vec{E}_1 = 0 \longrightarrow E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$

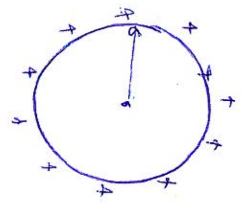
$\hat{n}$ عمود بر سطح یعنی خود به خود $\vec{E}_2$ در راستای $\hat{n}$ خواهد شد

نیروی وارد بر عنصر $d\vec{F} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sigma\, da = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} da\,\hat{n}$

اگر فشار ناشی از بار را بخواهیم

$$P_{\text{فشار}} = \frac{dF}{da} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

کره‌ای که بار دارد روی هر عنصر آن از طرف بقیه بارها نیرویی به سمت بیرون به آن عنصر وارد می‌شود



نیروی کلی که به تمام کره وارد می‌شود صفر است ولی فشار آن صفر نیست. جمع برداری همه dF ها روی کره صفر می‌شود اما دقت کنید که P (فشار) اسکالر است و صفر نمی‌شود.
لذا اسکالر

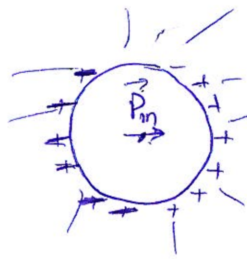
نظریه میکروسکپی دی‌الکتریک‌ها
ماکروسکپی

قبلاً برای بدست آوردن $\vec{E}$ نیروی وارد بر بار آزاد که از نظر ماکروسکپی کوچک بود را بدست می‌آوردیم.

در دی‌الکتریک‌ها دوقطبی‌ها را که مربوط به مولکول که ابعاد اتمی دارد در نظر می‌گیریم باید ببینیم P ناشی از چه میدانی است (میدانی که مولکول دارد حس می‌کند) که این میدان ماکرو ای که ما حساب کردیم نیست. دوقطبی شدن مولکول ناشی از میدانی است که خود مولکول آن را حس می‌کند

میدان میکروسکپی را به میدان ماکرو ربط می‌دهیم و بعد به قطبش ربط می‌دهیم

1:14 قبلاً داخل دی‌الکتریک را در نقطه‌ای که می‌خواستیم $\vec{E}$ آنجا یک حفره خالی می‌کردیم و بدست آوردیم



میدانی که قطبش سطحی روی کره ایجاد می‌کند منفی میدان داخل کره بود (E_2 ، $E_1^{(3)}$ برگه ۲۸) حال که مولکول‌های کره را دوباره داخلش قرار دادیم و میدان داخل را حساب کردیم فقط میدان ناشی از P_m و P_p می‌ماند.

1:18 اگر دور یک تک مولکول $\vec{P}_m$ کره‌ای در نظر بگیریم میدان مولکولی یعنی مولکول را برداریم و بقیه میدان‌ها را در محل آن حساب کنیم با کره یک دوقطبی می‌شود که میدان آن $\frac{+\vec{P}}{3\varepsilon_0}$ داخل کره دور مولکول می‌شود

میدان مولکول‌های داخل کره علاوه بر میدان ناشی از دوقطبی‌های مرز کره صفر می‌شود اما در اینجا مولکول در مرکز را داریم برمی‌داریم

میدانی که مولکول ایجاد می‌کند $\frac{-\vec{P}_m}{4\pi\varepsilon_0}$ است و چون دیگر این مولکول در کره نیست $\frac{-P}{3\varepsilon_0}$ این

میدان روی مرز ناشی از دوقطبی‌ها با میدان این مولکول حذف نمی‌شود و میدان دوقطبی‌های روی مرز $\frac{P}{3\varepsilon_0}$ تنها می‌ماند

میدان میکروسکپی به اندازه $\frac{P}{3\varepsilon_0}$ از میدان ماکروسکپی بزرگتر است

چون قبلاً بارهای داخل کره را در نظر می‌گرفتیم (که $\vec{E}$ آنها $-\frac{P}{3\varepsilon_0}$ می‌شد) حالا تاثیر آن را برداشته‌ایم. چیزی که مولکول در مرکز حس می‌کند و به آن نیرو وارد می‌کند $\vec{E}_m$ است.
میدان کره

$$\boxed{\underbrace{\vec{E}_m}_{\text{میدان میکروسکپی}} = \underbrace{\vec{E}}_{\text{میدان ماکروسکپی}} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}}$$

قطبش کلی در واحد حجم

$$\vec{P}_m = \alpha \vec{E}_m$$

قطبیدگی تک مولکول که به E_m ای که مولکول حس می‌کند بستگی دارد

قطبش پذیری مولکول
یک کمیت میکروسکپی

$$\vec{P} = N\vec{P}_m = N\alpha\vec{E}_m$$

$$\vec{P} = N\alpha\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{P}\left(1 - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}\right) = N\alpha\underbrace{\vec{E}}_{\text{ماکروسکپی}} \qquad \vec{P} = \left(\frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}}\right)\vec{E}$$

$$= (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$$

قطبش با میدان ماکروسکپی متناسب است

$\chi = \varepsilon - \varepsilon_0$ یک کمیت ماکروسکپی است

با این رابطه یک کمیت میکروسکپی α را به کمیت ماکروسکپی $\vec{E}$ ربط دادیم

$$\Rightarrow \boxed{\frac{3N\alpha}{3\varepsilon_0 - N\alpha} = (K-1)}$$

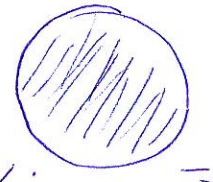
یک کمیت ماکروسکوپی

معادله کلاوسیوس موسوتی

$$\Rightarrow \alpha[3N + N(K-1)] = 3\varepsilon_0(K-1) \longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{3\varepsilon_0(K-1)}{N(2+K)}} \longrightarrow$$ القایی

مولکولها ناپیوسته اند فضای آزاد در بین آنها وجود دارد.

حجم یک مولکول ← $v_m \sim \frac{1}{N}$ → تعداد مولکولها در واحد حجم



میدان داخل کره: $\vec{E} = \frac{-\vec{p}}{\underbrace{\frac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{3}}_{v_m}\times 3} = \frac{-\vec{P}}{3\varepsilon_0} = \frac{-\vec{P}}{3v_m\varepsilon_0} = \frac{-\vec{P}}{3\underbrace{Nv_m}_{1}\varepsilon_0}$ (مولکول)

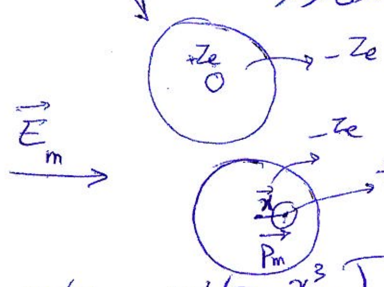
به شرطی که تمام فضا را بار در برگرفته باشد تا از نمایش به 3 در مخرج رسیده ایم

※ مواد معمولاً دو دسته اند 1 دسته خود به خود قطبیده اند قطبیدگی ذاتی دارند مثلاً آب قطبی

1) قطبی

2) غیر قطبی

مواد غیر قطبی یک میدان خارجی باعث القای یک قطبیدگی در آنها می شود و در حالت عادی مراکز قطب مثبت و منفی آنها روی هم قرار گرفته مانند H_2، N_2 (از اتم های مشابه تشکیل شده اند)



$\vec{P}_m = Z_e\vec{x}$

نیرویی که بار ناشی از E_m حس می کند برابر نیرویی که ابر الکترونی به آن وارد می کند است

نیرویی که ابر کره خط چین به بار وارد می کند که به سمت داخل است

با نیرویی که E_m به ابر وارد می کند برابر است

بار کره داخل حجم است

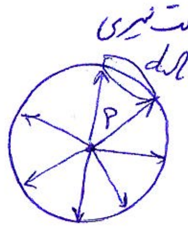
$$\cancel{Z_e}E_m = \frac{\cancel{Z_e}\left(Z_e\frac{x^3}{R^3}\right)}{4\pi x^2\varepsilon_0} \longrightarrow \boxed{\underbrace{Z_e x}_{\vec{P}_m} = (4\pi\varepsilon_0 R^3)E_m} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

اگر شعاع اتم را بدانیم α را تعیین می کنیم اگر R مولکول را ندانیم می توانیم با K و α را بدست آوریم و از آن شعاع مولکول را تعیین کنیم.

جلسه 18

معمولاً مولکول اتم های قطبی از اتم های متفاوت تشکیل شده اند. در حالت عادی سمت گیری دوقطبی های یک ماده قطبی کاملاً رندم است. اگر یک کره بکشیم و امتداد هم دوقطبی ها را از مرکز بکشیم کاملاً یکنواخت روی کره پخش شده اند

قطبی



تعداد مولکولهایی که P آنها در یک جهت خاص است متناسب با $d\Omega$ است

$$d\Omega = 2\pi\sin\theta\, d\theta$$

$$\frac{dN}{N} = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{dA}{4\pi R^2}$$

اگر یک میدان الکتریکی $\vec{E}$ خارجی روی آن اعمال کنیم هر کدام از مولکولها میدان $\vec{E}_m$ را حس می کند اگر E خارجی شدید باشد بر این دوقطبی ها یک گشتاور اعمال می کند و همه را هم سو می کند اما اگر E خارجی شدید نباشد (که معمولاً این E ها را داریم) جهت مندی ها از یک اصلی که از مکانیک آماری داریم تبعیت می کند احتمال اینکه یک ذره ای دارای انرژی کل W باشد از یک تابع ویژه بولتزمن تبعیت می کند. متناسب با

$$dN = e^{-\frac{W}{kT}}\, dW$$

تعداد ذراتی که انرژی w تا $w+dw$ هستند

ثابت بولتزمن $k = 1.38 \times 10^{-23}\ J/K$ کلوین

عدد آووگادرو $\times\, k = R$

اگر انتگرال بگیریم روی تمام انرژی ها N تعداد کل بدست می آید

W انرژی که ما برای ذرات در سیستم دی الکتریک داریم

$$W = \frac{1}{2} m v^2 + U = \frac{1}{2} m v^2 - \vec{P}_m \cdot \vec{E}_m$$

انرژی پتانسیل $w = -P_m E$

وقتی یک دوقطبی را در میدان $\vec{E}_m$ قرار دهیم انرژی آن $-\vec{P}_m \cdot \vec{E}_m$ است

فرض می کنیم مقدار همه P_m ها P_0 است اندازه همه آنها برابر P_0 است اما جهت آنها رندم است. بین هر مولکول و جهت مشخص که با $\vec{E}_m$ دارد زاویه θ است پس W تابعی از θ است.

$$\boxed{U = -\vec{P}_0 \cdot \vec{E}_m} = -P_0 E_m \cos\theta$$

$$\Longrightarrow dW = -P_0 E_m\, d\cos\theta$$

تعدادی که دارای جهت خاص $\vec{P}_0$ هستند

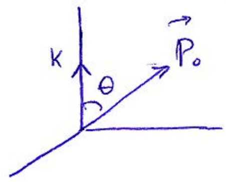
$\vec{P}_0$ متوسط

$$\langle \vec{P}_0 \rangle = \frac{1}{N_t} \int \vec{P}_0\, dN = \frac{\int \vec{P}_0\, dN}{\int dN} \longrightarrow \langle \vec{P}_0 \rangle = \frac{+\int_{-1}^{+1} \vec{P}_0\, e^{-\frac{W}{kT}} P_0 E_m\, d\cos\theta}{+\int_{-1}^{+1} e^{-\frac{W}{kT}} P_0 E_m\, d\cos\theta}$$

N_t تعداد کل

$0 < \theta < \pi \Rightarrow -1 < \cos\theta < +1$

برای اینکه انتگرال از 1- تا 1+ باشد علامت را در منفی ضرب می کنیم



$$\vec{P}_0 = P_0 (\cos\theta\, \hat{k} + \sin\theta \cos\varphi\, \hat{i} + \sin\theta \sin\varphi\, \hat{j})$$

$$= \frac{\int_{-1}^{+1} \vec{P}_0\, e^{+P_0 E_m \cos\theta / kT}\, d\cos\theta}{\int_{-1}^{+1} e^{+P_0 E_m \cos\theta / kT}\, d\cos\theta}$$

$$= \frac{P_0 \int_{-1}^{+1} (\cos\theta\, \hat{k} + \sin\theta\cos\varphi\, \hat{i} + \sin\theta \sin\varphi\, \hat{j})\, e^{x\cos\theta}\, d\cos\theta}{\int_{-1}^{+1} e^{x\cos\theta}\, d\cos\theta}$$

$$\frac{P_0 E_m}{kT} = x$$

$$\boxed{\langle \vec{P}_0 \rangle = P_0 \hat{k} \left(\coth x - \frac{1}{x} \right)}$$

E_x شدید باشد $\longrightarrow x \gg 1 \Longrightarrow$ همه $\vec{P}_0$ ها هم جهت می شوند

$\vec{P}_0$ ها در امتداد $\hat{z}$ هستند

$x \gg 1$: $P_0 \hat{k}$

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$ است

$x \ll 1$ معمولاً در اکثر موارد

مثلاً باری که در یک قطبی حرکت می کند یک الکترون باشد

$P = Sq$ جابجایی

$T = 300K$ معمولا x خیلی کوچک است حتی اگر E_m خیلی بزرگ باشد

هرچه محیط را گرم کنیم P ها بیشتر رندم می شوند

بعد

$$\frac{\overbrace{(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots)}^{e^x} + (1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \cdots)}{(1 + x + \cdots) - (\quad)}$$

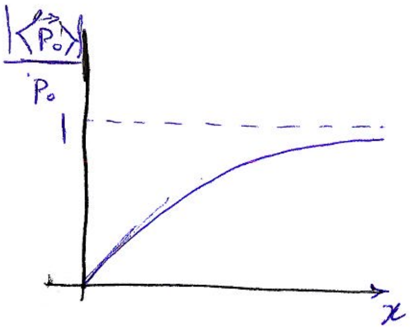
چون $x \ll 1$ از جملات بالاتر صرف نظر می کنیم

$$= \frac{2 + x^2 + \cdots}{2x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots} = 2\left(1 + \frac{x^2}{2} + \cdots\right) \frac{1}{2x} \left(1 + \frac{1}{6}x^2 + \cdots\right)^{-1} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)$$

$x \ll 1$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x \Longrightarrow \langle \vec{P}_0 \rangle = \frac{P_0 x \hat{k}}{3} = \frac{P_0^2 E_m}{3kT}$$

متوسط $\vec{P}_0$ تابعیت خطی از P_0 می شود



ما در محدوده $x \gg 1$ نگاه می‌کنیم ⟸

چون E_m در راستای $\hat k$ بود

$$\langle \vec P_0 \rangle = \frac{P_0^2 \overbrace{E_m \hat k}^{\vec E_m}}{3kT} = \alpha \vec E_m$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{P_0^2}{3kT}}$$

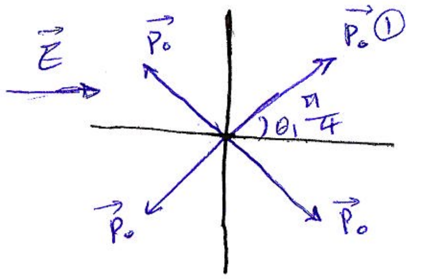
معادله لانژوین

$$\boxed{\alpha = \alpha_0 + \frac{P_0^2}{3kT}}$$

ثابت قطبش‌پذیری مولکول — القایی — ذاتی ماده

با اعمال یک E خارجی یک میدان قطبیدگی القایی نیز به وجود می‌آید و آنچه ما گفتیم فقط مربوط به بخش قطبیدگی ذاتی ماده بود معمولاً چون α خیلی بزرگتر از α_0 است از α_0 صرف نظر می‌کنند.

وقتی تعداد مولکولها بسیار زیاد می‌شود از آن نسبت بدون صرف نظر می‌کنیم. که با معادله کلاوسیوس ماسوتی یکسان است.



مثال: یک ماده قطبی داشته باشیم که مولکولهای دوقطبی‌اند یک سمت خاصی هستند و مؤلفه z بستگی نداشته باشند

در حالت عادی جمع $\vec P_0$ ها صفر می‌شود $\vec P_0 = 0$ هیچ قطبیدگی نخواهد داشت اما اگر یک E خارجی داشته باشیم $\vec P_0$ ها جهت می‌گیرند

$$i = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

1:V $U = -\vec P_0 \cdot \vec E_m = -P_0 E_m \cos\theta_i$

1:

اگر U در استداد ① باشد $e^{P_0 E_m \cos\frac{\pi}{4}/kT}$

در استداد $\frac{3\pi}{4}$ باشد ⟵ $e^{P_0 E_m \cos\frac{3\pi}{4}/kT}$, $e^{-U/kT}$

$$\langle \vec P_0 \rangle = \frac{\sum \vec P_0\, e^{-U/kT}}{\sum e^{-U/kT}} = \frac{\sum_{i=1}^{4} P_0(\cos\theta_i\, \hat i + \sin\theta_i\, \hat j) e^{P_0 E_m \cos\theta_i/kT}}{\sum_{i=1}^{4} e^{P_0 E_m \cos\theta_i/kT}} = \frac{P_0}{\sqrt2} \tanh\left(\frac{P_0 E_m}{\sqrt2\, kT}\right)\hat i$$

مجموع احتمال‌ها

مؤلفه‌های $\hat j$ حذف می‌شوند

~~گاهی با بعضی مواد کار داریم که بدون~~

71 گاهی با موادی کار داریم که بدون حضور هیچ میدان E مولکولها قطبیدگی ذاتی دارند و های قطبیده خود به خود جهت مند می‌شوند. میدان مولکولی = میدان خارجی + $\frac{P}{3\varepsilon_0}$

در بعضی مواد بدون میدان الکتریکی خارجی $\vec P$ متناسب با E نیست

هر مولکول میدان $\frac{\vec P}{3\varepsilon_0}$ را حس می‌کند و متقابلاً آنها می‌توانند خود به خود جهت‌مند شوند.

$$\vec E_m = \cancel{\vec E} + \frac{\vec P}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec E_m = \frac{\vec P}{3\varepsilon_0}$$

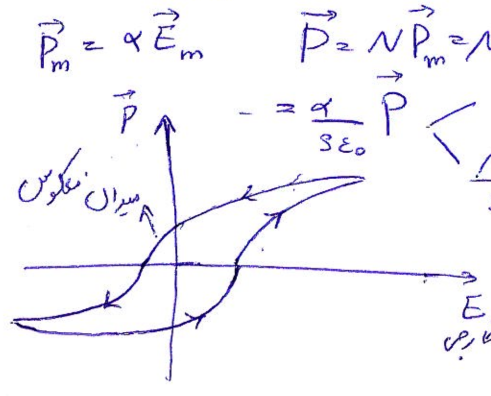
$$\vec P_m = \alpha \vec E_m \qquad \vec P = N \vec P_m = N\alpha \vec E_m$$

$$= \frac{\alpha}{3\varepsilon_0}\vec P \quad \left\langle \begin{array}{l} \vec P = 0 \\ \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} = 1 \end{array}\right.$$

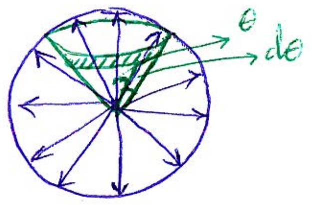
$BaTiO_3$

در اکثر موادی که با آنها برخورد داریم $\frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} \ll 1$ که همان دی‌الکتریک‌های معمولی‌اند

موادی که $\frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} = 1$ مواد فروالکتریک گفته می‌شوند



منحنی پسماند هیسترزیس



جلسه 19

تعداد ذراتی که انرژی W دارند فقط با $e^{-W/kT}$ مشخص نمی‌شود و به اینکه چه سطحی از کره را در نظر می‌گیریم نیز بستگی دارد. اگر یک زاویه مشخص θ را در نظر بگیریم سطحی که در نظر می‌گیریم سطح محدود است. اگر θ زیاد شود سطحی که شامل می‌شود بیشتر می‌شود یعنی ذراتی که در منطقه قرار گرفته اند تعداد بیشتری مولکول در این منطقه قرار گرفته اند

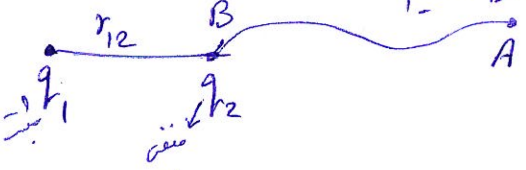
$$dN \propto e^{-W/kT}\, d\Omega \longrightarrow \langle \vec{P}_0 \rangle$$

انرژی الکترواستاتیک

در مکانیک خیلی از اوقات استفاده از انرژی مسئله را راحت می‌کند در اینجا نیز همان طور است. تاکنون میدان E (که یعنی نیرو) را بدست می‌آوردیم برای حرکت ذرات باردار باید به نیرو (میدان E ...) متوسل شویم. وقتی با حرکت ذرات باردار کار داریم بهترین کار این است که انرژی تعریف کنیم و وضعیت مکانیکی ذرات باردار را از طریق انرژی بررسی کنیم

انرژی الکترواستاتیک انرژی گردآوردن ذرات باردار در وضعیت نهایی است (انرژی که صرف می‌کنیم که ذرات باردار را از پتانسیل صفر به وضعیت نهایی برسانیم) انرژی است که در سیستم ذخیره شده و ما آن را انجام می‌دهیم.

فرض کنید یک ذره‌ای را از بی‌نهایت (نقطه A) به فاصله r_{12} (نقطه B) از بار q_1 قرار دهیم اگر q_2 را بگذاریم که با شتاب به q_1 نزدیک شود و تحت نیروی معکوس قرار دهیم به طوری که سرعت آن ثابت و شتاب آن صفر است برایند نیروی وارد بر q_2 صفر است نیرویی که ما به q_2 وارد می‌کنیم برابر نیرویی که q_1 به آن وارد می‌کند باشد



کاری که روی q_1 ، q_2 انجام می‌دهد $= W = q_2 \Delta\varphi = q_2(\varphi_B - \varphi_A)$

$$W = \int F \cdot dr = \int q_2 E_1 \cdot d\vec{r} = -q_2 \int_A^B \underbrace{\nabla\varphi \cdot dr}_{d\varphi} = -q_2\left(\varphi_B - \varphi_A\right)$$

کار شخص به انرژی پتانسیل سیستم تبدیل می‌شود

$$W_{\text{شخص}} = -q_2(\varphi_B - \varphi_A)$$

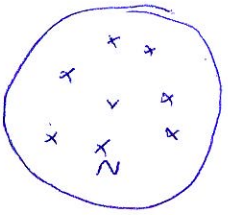
انرژی جنبشی ثابت

$$\text{کار کل} = 0 \xrightarrow{\text{پایستگی انرژی}}$$

$$\Delta U = W_{\text{شخص}}$$

انرژی که به سیستم نسبت می‌دهیم انرژی است که شخص انجام داده تا به آن وضعیت برساند

اگر N ذره باردار داشته باشیم در یک پیکربندی چه انرژی در آن پیکربندی ذرات ذخیره شده؟ کار الکتریکی لازم نبود انجام داده شود برای بار q_1



$$W_1 = 0 = (0 + \cdots + 0)$$

$$W_2 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{12}} + 0 + \cdots + 0\right)$$

$$W_3 = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right) + 0 + \cdots + 0)$$

ناشی از میدان 1 و ناشی از میدان 2

$$W_4 = \frac{q_4}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}}\right) + 0$$

$$\vdots$$

$$W_N = \frac{q_N}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{1N}} + \cdots + \frac{q_{N-1}}{r_{N-1,N}}\right)$$

q_N

کار کلی که شخص انجام می‌دهد تا این پیکربندی را بسازد مجموع این W حالات

$$U = \sum_{j=1}^{N} W_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{j-1} \frac{q_k}{r_{jk}}$$

یک ماتریس $N \times N$

$$\begin{pmatrix} 0 & & \phi & \\ \frac{q_1}{r_{12}} & 0 & & \\ \frac{q_1}{r_{13}} & \frac{q_2}{r_{23}} & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

اگر ستون اول را به سطر اول اضافه کنیم و ستونی که q_2 دارند ستون دوم را به صفرهای سطر دوم اضافه کنیم و به همین ترتیب تا ستون N ام بدست می‌آید

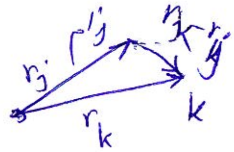
$$W_1' = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(0 + \frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} + \frac{q_4}{r_{14}} + \cdots + \frac{q_N}{r_{1N}}\right)$$

$$W_2' = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{12}} + \cancel{0} + \frac{q_3}{r_{23}} + \frac{q_4}{r_{24}} + \cdots + \frac{q_N}{r_{2N}}\right)$$

$$W_N' = \frac{q_N}{4\pi\varepsilon_0}\left(\text{خودش} \right)$$

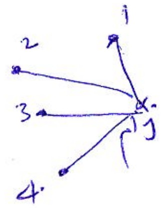
$$2U = \sum_{j=1}^{N} W_j' = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} \frac{q_k}{r_{kj}} \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} \frac{q_j q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{kj}}}$$

$$r_{kj} = |\vec{r}_k - \vec{r}_j|$$



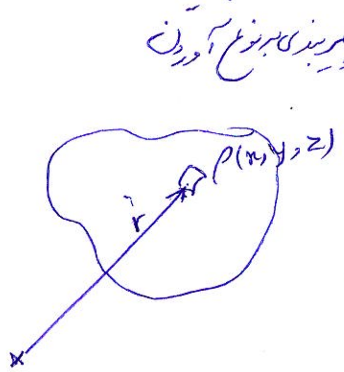
$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{kj}} = \varphi_j \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} q_j \varphi_j}$$

پتانسیل در نقطه j ناشی از همه بارها غیر از خود بار j
انرژی پتانسیل کلی ای که در سیستم ذخیره شده



پتانسیل در نقطه j را نشان می‌دهد
جمع پتانسیل ناشی از 1 تا N غیر از خود بار j ام

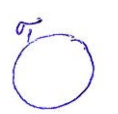
// این روابط را می‌توانیم برای یک توزیع پیوسته دلخواه تعمیم دهیم.
اگر یک سیستم پیوسته با چگالی مشخص $\rho(x,y,z)$ داشته باشیم برای ساختن این پیکربندی چقدر انرژی لازم است؟
آیا این پیکربندی به اینکه چگونه این ذرات را کنار هم بیاوریم اول ذره N ام یا مثلاً ذره j ام بعد بقیه را بستگی دارد؟
* هیچ اثری ندارد. پیکربندی به نوع آوردن آنها بستگی ندارد. چون محیط کاملاً خطی است.
اگر همین پیکربندی را در یک دی‌الکتریک می‌ساختیم رابطه U به همین شکل باقی می‌ماند فقط $\varepsilon_0 \to \varepsilon$ تبدیل می‌شد.
اگر غیر خطی باشد محیط یعنی ε به مکان وابسته باشد دیگر این U درست نیست. ذرات بستگی خواهد داشت. و انرژی پیکربندی به نوع آوردن
برای سیستم‌های پیوسته نیز همین طور است.



اگر وقتی هنوز پیکربندی تشکیل نشده، بار δq را بخواهیم در محلی قرار دهیم که در آن زمان $\varphi(x,y,z)$ باشد کاری که باید انجام شود

$$\varphi(x,y,z)\,\delta q = \delta W$$

فرض کنید محیطی داریم که چگالی نهایی بار حجمی و سطحی داشته باشد
می‌خواهیم بدانیم چقدر انرژی در این سیستم ذخیره شده
به همه این‌ها همزمان یک چگالی بار اضافه می‌کنیم
عنصر

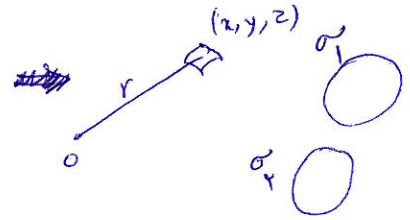


$$\rho(\vec{r}) = \rho(x,y,z)$$
$$\sigma(\vec{r}) = \sigma(x,y,z)$$
چگالی بارهای نهایی

$$\rho(t,x,y,z) = \alpha\rho(x,y,z)$$
$$\sigma(t,x,y,z) = \alpha\sigma(x,y,z)$$

در یک زمان خاص α ضریبی از ρ نهایی باشد

$$\begin{cases} \delta\rho = \delta\alpha\,\rho(x,y,z) \\ \delta\sigma = \delta\alpha\,\sigma(x,y,z) \end{cases}$$



σ ها و ρ های به اندازه کوچک $\delta\alpha$ به همه اضافه می‌کنیم

باری که روی حجم اضافه می‌کنیم ←

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta q = \delta\alpha\, \rho(x,y,z)\, \delta V \\ \delta q = \delta\alpha\, \sigma(x,y,z)\, \delta a \end{cases}$$

پتانسیل در لحظه t

پتانسیل در لحظه t در هر نقطه: $\varphi(\alpha; x,y,z) \rightarrow U = W = \varphi(\alpha; x,y,z)\,\delta q =$

$$\int_0^1 \int_V \varphi(\alpha; x,y,z)\, \delta\alpha\, \rho(x,y,z)\, \delta V + \int_0^1 \int_S \varphi(\alpha; x,y,z)\, \delta\alpha\, \sigma(x,y,z)\, \delta a$$

در ابتدا هیچ باری نبود $\rho\,\delta\alpha$ اضافه می‌کنیم بعد $2\delta\alpha\rho$ ... . انتگرال روی α و حجم و سطح می‌گیریم
حال عبارت بالا را حل می‌کنیم

تعریف پتانسیل $\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$ است و $dq = \overset{\alpha\rho}{\uparrow}{\rho}\, dV$

$$\varphi(\alpha; x,y,z) = \alpha\, \varphi(x,y,z)$$

α بیرون می‌آید

$$\Rightarrow U = \underbrace{\int_0^1 \alpha\, d\alpha}_{1/2} \int_V \varphi(x,y,z)\, \rho(x,y,z)\, dV + \underbrace{\int_0^1 \alpha\, d\alpha}_{1/2} \int_S \varphi(x,y,z)\, \sigma(x,y,z)\, da$$

در هر نقطه از فضا اگر چگالی حجمی و سطحی و پتانسیل را داشته باشیم U بدست می‌آید

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}\int_V \varphi(\vec r)\, \rho(\vec r)\, dV + \frac{1}{2}\int_A \varphi(\vec r)\, \sigma(\vec r)\, da}$$

پتانسیل در نقطه $\varphi(\vec r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int \frac{\rho(\vec r\,')\, dV}{|\vec r - \vec r\,'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec r\,')\, da}{|\vec r - \vec r\,'|}$

این رابطه برای بارهای گسسته هم نیز که به صورت نقطه‌ای می‌باشند برقرار است

$$\rho(\vec r) = \sum_{j=1}^{N} q_j\, \delta(\vec r - \vec r_j)$$

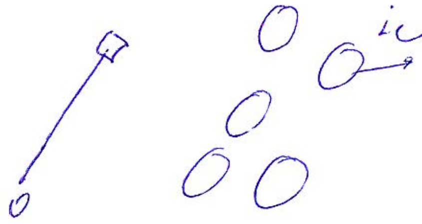
$$\rho(\vec r\,') = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} q_k\, \delta(\vec r\,' - \vec r_k)$$

در یک محل $\vec r$

در رابطه‌ای که برای U نوشتیم در $\rho(\vec r)$ همه نقطه‌ها را می‌گذاریم
اما برای بدست آوردن پتانسیل در هر محل همه نقاط غیر از نقطه‌ای
که پتانسیل را در آن نقطه می‌خواهیم بدست آوریم را می‌گذاریم یعنی r' در رابطه
مربوط به بدست آوردن φ باید مخالف r باشد. برای

* برای توزیع‌های پیوسته در رابطه $\varphi(\vec r)$ نگرانی برای نقطه‌ای که $\vec r\,' = \vec r$ را در رابطه φ بگذاریم نداریم چون اگرچه در مخرج
صفر می‌شود اما dV از واگرایی انتگرال جلوگیری می‌کند بنابراین برای بارهای پیوسته اصلاً مهم نیست که $\vec r\,' = \vec r$ شود و می‌توانید
برای φ روی کل محیط انتگرال بگیرید. اما برای نقطه‌ای خیر
سطوح می‌توانند رسانا نباشند می‌توانیم اجسام دیگری که روی آن‌ها بار باشد داشته باشیم

اگر برخی از سطوح در سیستم رسانا باشند سهم آنها را در فرمول U می‌توان جدا کرد و در این صورت عبارت ساده‌تر می‌شود.



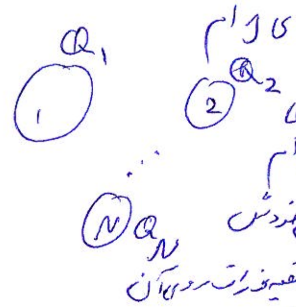
$$U=\underbrace{\frac{1}{2}\int_V \varphi\rho\,dv+\frac{1}{2}\int\varphi\sigma\,da}_{\text{کل اجسام سطحی که روی آنها بار قرار گرفته}}+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j Q_j}_{\text{رسانا}}$$

اگر n تا از اجسام رسانا باشند φ آنها ثابت است $\sigma da=$ بار روی رسانا

اگر در یک سیستم فقط رسانا داشته باشیم

$$\boxed{U=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j Q_j}$$

شبیه نقطه‌ای



Q_j: بار رسانای j ام

φ_j: پتانسیل رسانای j ام

ناشی از پتانسیل خودش علاوه پتانسیلی که بقیه ذرات روی آن ایجاد کرده‌اند

Note: اگر یک رسانا فقط داشته باشیم انرژی آن $U=\frac{1}{2}\varphi_1 Q_1$ است

اما اگر یک بار داشته باشیم انرژی پتانسیل آن صفر است (یک بار را آورده‌ایم در یک نقطه‌ای از فضا قرار داده‌ایم $U=0$) در واقع رسانا خود انرژی دارد چقدر انرژی لازم داریم تا بار را روی رسانا قرار دهیم هیچ انرژی‌ای در آن ذخیره نشده)

در روابط مربوط به نقاط خودانرژی را دور ریخته شده چون برهمکنش‌های برای ما مهم است.

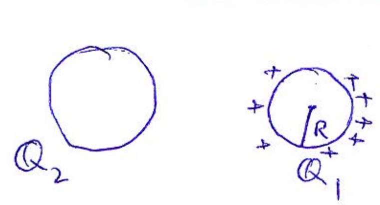
$$\varphi_j=\varphi_j^{(1)}+\varphi_j^{(2)}$$

$\varphi_j^{(1)}$: ناشی از خودش — $\varphi_j^{(2)}$: ناشی از بقیه رساناها

$$U_{\text{برای رساناها}}=\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(1)}Q_j}_{\text{مربوط به خودانرژی رساناها}}+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(2)}Q_j}_{\text{بخش intraction}}$$

آنچه بین رساناها در نیروها وارد می‌شود بخش intraction است و بخش دیگر اهمیتی ندارد (خودانرژی هیچ اهمیتی ندارند)

توجه کنید که پتانسیل خود انرژی یک رسانا به این معنا نیست که به نیروی ما هیچ اهمیتی ندارد چون وقتی رساناهای دیگر نباشند توزیع بار و پتانسیلی که آن توزیع روی رسانا ایجاد می‌کند یک چیز مشخص است. $\varphi=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}$ اما وقتی رسانای دیگری در نزدیکی آن قرار می‌گیرد توزیع بار را روی رسانای اول به هم می‌زند و یک پتانسیل دیگری ایجاد می‌کند که دیگر $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}$ نخواهد بود. اگر رسانای دیگر نباشد خودانرژی وابسته به محیط هم هست



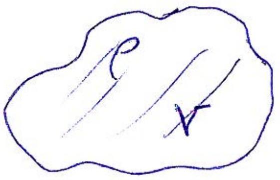
جلسه 20

انرژی پتانسیل در حالت کلی:

$$U=\frac{1}{2}\int_V\rho(\vec r)\varphi(\vec r)\,dv+\frac{1}{2}\int_S\sigma(\vec r)\varphi(\vec r)\,da+\frac{1}{2}\int_C\lambda(\vec r)\varphi(\vec r)\,dl+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\text{رسانا}}\varphi_i Q_i$$

$$U=\frac{1}{2}\int_V\rho(\vec r)\varphi(\vec r)\,dv$$

فرض می‌کنیم بار جاگیزیده است یعنی بار تا بی‌نهایت نرفته (در یک بخش محدود از فضا بار داریم)
آزاد
محدود



$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\,\varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{D}) - \vec{D}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{D}) + \vec{D}\cdot\vec{E}$$

$$\Longrightarrow\quad U = \frac{1}{2}\int_{\cancel{V}\ \text{تمام فضا}} \left(\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{D}) + \vec{D}\cdot\vec{E}\right) dv$$

زیر V را می‌توانیم به تمام فضا تعمیم دهیم
چون برای فضاهای غیر از V چگالی بار نداریم جاهایی که بار نداریم $\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})$ صفر است.
چون حجم کل فضا را در نظر گرفتیم
S به ∞ می‌رود

قضیه دیورژانس

$$= \frac{1}{2}\cancel{\int_S \varphi\vec{D}\cdot d\vec{a}}^{\,0} + \frac{1}{2}\int_{\text{تمام فضا}} \vec{D}\cdot\vec{E}\, dv$$

اگر φ را در فضا می‌خواستیم بدست آوریم اگر بار کل غیر صفر بود φ متناسب با $\frac{1}{r}$ تغییر می‌کرد اگر بار صفر می‌شد (دوقطبی، چهار قطبی ...) φ متناسب با $\frac{1}{r^3}$، $\frac{1}{r^4}$، $\frac{1}{r^5}$ بود

۳۵

بنابراین اگر محیط ما از نظر بار خنثی نباشد یعنی φ متناسب با $\frac{1}{r}$ است و $\vec{D}$ متناسب با $\frac{1}{r^2}$ است
da متناسب با r^2 است وقتی سطح به سمت ∞ میل کند $(r\to\infty)$ $\varphi\vec{D}\cdot d\vec{a}$ صفر می‌شود

$$\varphi\vec{D}\cdot d\vec{a} \propto \frac{1}{r}\,\frac{1}{r^2}\,r^2 = \frac{1}{r}$$

فقط جمله دوم (انتگرال دوم) در U باقی می‌ماند D و E را که دارید می‌نویسید باید در تمام فضا بگیرید
انتگرال قبلی که برای پتانسیل نوشتیم فقط روی محیط V بود ولی در این انتگرال باید روی تمام فضا گرفته شود
اگر محیط خلاء باشد $D=\varepsilon_0 E$ اگر غیر خلاء $D=\varepsilon E$

محیط خطی

$$\longrightarrow \boxed{U = \cdots = \frac{1}{2}\varepsilon\int_{\text{تمام فضا}} E^2\, dv} = \int u\, dv$$

$$\boxed{u(r) = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

چگالی انرژی
(انرژی در واحد حجم)

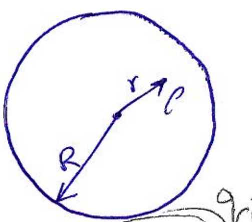
چگالی انرژی الکتریکی

☑ برای کره‌ی بارداری که داشتیم از این روش U را بدست می‌آوریم:

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\int_0^R \left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr\right]$$

پس به سه روش U را بدست آوردیم: انتگرال روی محیط و حجم V، کاری که انجام دادیم، انتگرال روی کل فضا

☐ در روش آخر ρ چگالی بار آزاد است به همین دلیل $\nabla\cdot D = \rho$ انرژی پتانسیل در محیط ما ناشی از بارهای حقیقی است محیط در ابتدا هیچ بار قطبی ندارد اما همین که یک بار q در محیط قرار دهیم بار قطبی ایجاد می‌شود اما با توجه به اینکه $\rho_p = -\nabla\cdot P = 0$ و $E \propto \frac{r}{r^3}$ ($P \propto \frac{r}{r^3}$) نیست
بارهای آزاد
بار قطبی
بنابراین ρ ای که اینجا داریم کلاً بارهای آزاد است اصلاً بار قطبی
اثرات قطبش محیط در ε و E فرمول U لحاظ شده.



مثال: یک کره باردار با چگالی ثابت ρ داریم می‌خواهیم بدانیم انرژی پتانسیل این سیستم چقدر است؟

r می‌تواند تا ∞ برود چون از فاصله‌های دورتر از R، چگالی صفر است

قانون گاوس E و ρ در داخل کره برای ما معلوم می‌کرد

جهت آن شعاعی

$$\oint E \cdot da = q$$

$$E_{in} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \boxed{\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r} \qquad q_{in}$$

$$E_{out} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \boxed{\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}}$$

$$\varphi_{in} = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0} \frac{r^2}{2} + C \qquad \varphi_{out} = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + c'$$

در ∞ باید φ صفر شود $\leftarrow c' = 0$

$$\varphi_{in}\Big|_{r=R} = \varphi_{out}\Big|_{r=R} \rightarrow \boxed{C = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{R}\right) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}}$$

$$\rightarrow \boxed{\varphi_{in} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-r^2}{3} + R^2\right)}$$

φ_{out} به درد ما نمی‌خورد چون ρ بیرون کره صفر است و در $\int$ اهمیتی ندارد

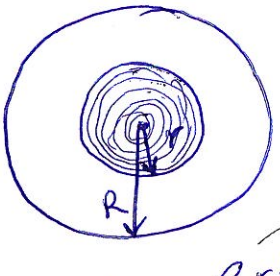
$$U = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{\rho^2}{3\varepsilon_0}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right) \overbrace{4\pi r^2 dr}^{dv} = \frac{\rho^2 \pi}{\varepsilon_0}\left(\frac{R^2 r^3}{3} - \frac{r^5}{15}\right)\Big|_0^R = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0} R^5$$

سوال ارشد ۹۰

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \longrightarrow \boxed{U = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

انرژی پتانسیل کره باردار با چگالی ثابت ρ

۲/ یک روش خوب‌تر دیگر این است که کره‌ای که داریم تشکیل می‌دهیم اول یک q ای قرار می‌دهیم بعد دوباره یک q دیگر تا به پیکربندی نهایی برسیم. فرض کنید در حالتی که شعاع آن r است یک المان حجمی dv را روی آن قرار می‌دهیم برای این چقدر انرژی صرف می‌کنیم.



پتانسیل کره‌ای به شعاع r را بدست آوردیم که

$$dW = \varphi(r)\underbrace{dq}_{\rho dv} = \varphi(r)\,\rho\, 4\pi r^2 dr$$

در اینجا فرقی ندارد کدام شعاع r یا R را در فرمول پتانسیل قرار دهیم چون $d\varphi$ فقط به ابتدا و انتها بستگی دارد

$$dW = F \cdot dr = \nabla\varphi \cdot dr = d\varphi$$

کاری که انجام می‌دهیم اختلاف پتانسیل از ∞ تا شعاع r کره است

۱۸

$$\longrightarrow dW = \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0} \rho\, 4\pi r^2 dr \qquad \varphi_{out}$$

23

$$W = \int_0^R \frac{\rho^2 4\pi r^4}{3\varepsilon_0} dr = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho^2 \frac{R^5}{5} \longrightarrow$$

انرژی پتانسیل ذخیره شده در کره E_{q_r}

۳/ شکل دیگر بیان انرژی پتانسیل آن است که همه جاهایی که میدان الکتریکی وجود دارد انرژی پتانسیل وابسته دارد و ذخیره شده

۲۸

در حالت کلی اگر یک محیط دی‌الکتریک داشته باشیم (خلأ هم دی‌الکتریکی با $\varepsilon_0 = \varepsilon$ است) بدست آوردیم:

$$\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \longrightarrow U = \frac{1}{2}\int_V \rho_f(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\,dv = \frac{1}{2}\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\,\varphi(\vec{r})\,dv$$

ρ در هر نقطه فضا — V کل فضا — f آزاد

در دی الکتریک ها بارهای سطحی را می توانید به صورت چگالی سطحی بنویسید اگر رسانا باشد متفاوت است

اگر در محیط یک رسانا نیز داشته باشیم برای U جمله مربوط به رسانا را می نویسیم S' سطح رسانا باشد انتگرال مربوط رسانا و انتگرال ای که روی S' خلاف جهت همدیگر می شوند همدیگر را خنثی می کنند و همان رابطه نهایی که برای U ها بدست آوردیم درست خواهد بود. (مربوط به)

* انرژی پتانسیل جایی ذخیره خواهد شد که میدان الکتریکی E وجود داشته باشد بنابراین داخل رساناها انرژی الکتریکی ذخیره نخواهد شد چون در رساناها $E=0$ است. بیرون رساناها انرژی ذخیره می شود.

اگر $E=0$ ⟸ چگالی انرژی نداریم

چگالی بار جایگزیده یعنی در بخشی از فضا بار آزاد داریم در تمام فضا می تواند چگالی بار قطبش وجود داشته باشد محیط ما اگر خطی باشد چگالی بار قطبش جایی وجود دارد که چگالی بار آزاد وجود داشته باشد خود $\vec{P}$ را نه ولی می توانیم داشته باشیم.

$$\text{if } \rho_f = 0 \Rightarrow \rho_p = 0$$

free ها

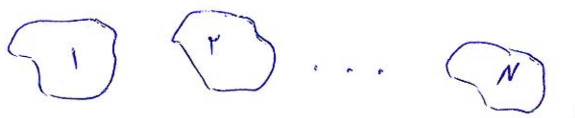
بار جایگزیده نباشد ⟵ یعنی نباید بار آزاد وجود داشته باشد.

[1] در اینجا $U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \varphi_j Q_j$ نشان دادیم

پتانسیل رسانا j ام $\varphi_j = \sum_{i=1}^{N} P_{ji} Q_i$

$$\Longrightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} P_{ji} Q_i Q_j}$$

خواص P_{ij} ها



1) $P_{ij} = P_{ji}$

2) $P_{ij} \geqslant 0$ سخت

3) $P_{ii} \geqslant P_{ij}$

اثبات (1)

فرض کنید به رسانای k ام dq اضافه کنیم $dU = ?$

فقط جملاتی که اندیس k دارند شامل $Q_1 Q_k$ ، $Q_2 Q_k$ ... یا $Q_k Q_1$ ، $Q_k Q_2$ ... $Q_k Q_N$ غیر صفر می شوند

$$dU = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j P_{ji}\left(\underbrace{\frac{\partial Q_i}{\partial Q_k}}_{\delta_{ik}} + \underbrace{\frac{\partial Q_j}{\partial Q_k}}_{\delta_{jk}}\right) dQ_k$$

اگر $i \neq k$ $\frac{\partial Q_i}{\partial Q_k} = 0$ ، $\frac{\partial Q_1}{\partial Q_2} = 0$ معنی ندارد

k اندیس نخوردی است

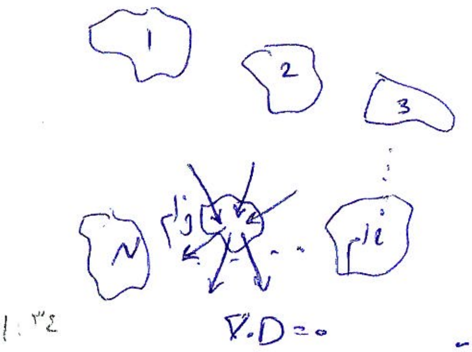
$$= \frac{1}{2}\sum_j Q_j P_{jk}\, dQ_k + \frac{1}{2}\sum_{\cancel{i}\, j} Q_{\cancel{i}\, j} P_{k\cancel{i}\, j}\, dQ_k$$

$$\boxed{dU = \frac{1}{2}\sum_j Q_j \left(P_{jk} + P_{kj}\right) dQ_k}$$

[2] روش دیگر برای محاسبه تغییر انرژی پتانسیل: وقتی dQ_k را از بینهایت روی رسانای k ام می آوریم پتانسیل بینهایت صفر است

$$\varphi_k = \sum P_{kj} Q_j \longrightarrow dU = \varphi_k\, dQ_k = \sum_j P_{kj} Q_j\, dQ_k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(P_{jk} + P_{kj}\right) = P_{kj} \longrightarrow P_{ik} = P_{ki}$$

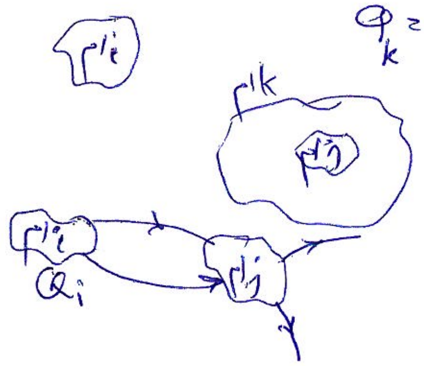


۱:۳۴

اثبات (۳) فرض کنید بار همه رساناها به جز رسانای iام صفر باشد
چون بار خالص روی رساناها صفر است $\Leftarrow \oint_S D\cdot da = \nabla\cdot D = \rho = 0$
بنابراین خطوط بردار جابه‌جایی که به آن وارد می‌شود با تعدادی که خارج می‌شوند برابرند یا اصلاً هیچ خط بردار جابه‌جایی به رسانای بدون بار وارد نمی‌شود. مثلاً توسط یک رسانای دیگری پوشش داده شده باشد
اگر رسانای jام داخل iام باشد چون میدان داخل رسانای jام صفر است هیچ خط میدانی به آن وارد یا خارج نمی‌شود و پتانسیل iام با پتانسیل jام برابر است

$$\left.\begin{aligned}\varphi_j &= \sum P_{ij} Q_j = P_{ji} Q_i \\ \varphi_i &= P_{ii} Q_i\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\varphi_i=\varphi_j} P_{ji} = P_{ii}$$

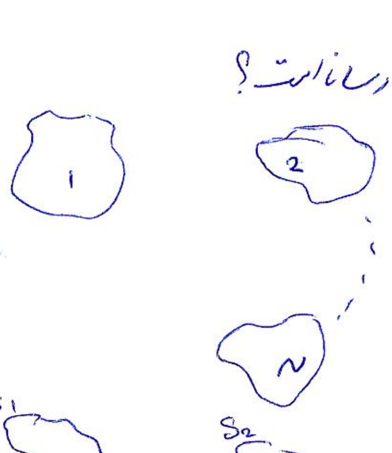
اگر رسانای jام داخل رسانای kام باشد که بازهم هیچ خطی به آن وارد نشود $\Leftarrow \varphi_k = \varphi_j$
کافیست رسانای kام را بررسی کنیم k هم که بیرون iام است ~~...~~
چون jام بدون بار است خط میدانی که وارد jام می‌شود منشاء آن رسانای iام است ~~...~~ خطوط میدان از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کمتر بود پس $\varphi_j < \varphi_i$



$$\Rightarrow P_{ii} > P_{ji} = P_{ij}$$

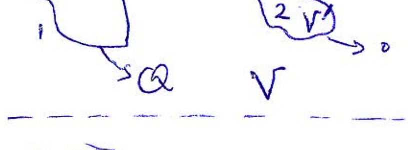
جلسه 21

آیا P_{ij} ها به وجود رساناهای دیگر در محیط بستگی دارد یا نه؟ یا فقط مربوط به خود رسانا است؟
آیا P_{11} که یک رسانا به رسانای دوم بستگی دارد؟ بله دارد مثلاً P_{11} مستقل از رسانای Nام یا 2ام نیست. چرا؟



فرض کنید دو رسانا بیشتر نداریم و رسانای اول بار Q و رسانا ۲م بار صفر دارد
اگر فقط رسانای اول با بار Q در محیط باشد یک انرژی پتانسیل دارد رسانای 1 (رسانای ۲ نباشد)

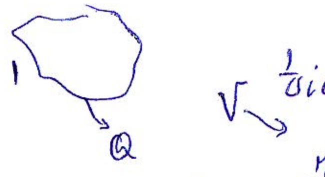
$$U_1 = \frac{1}{2} P_{11} Q^2$$



فرض کنید رسانای دوم را در یک جای مشخص که در هم قرار داریم حال انرژی پتانسیل در این وضعیت

j و $i=1,2$ $\qquad U_2 = \frac{1}{2} P'_{11} Q^2$

نشان می‌دهیم که $P'_{11} < P_{11}$ با وجود رسانای دوم ضریب پتانسیل و بنابراین انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد. ضریب پتانسیل خودی رسانا با وجود رسانای دیگر تغییر می‌کند.



V: کل فضای بیرون رسانای 1 غیر از حجم رسانای ۲

$$U_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{V+V'} E_1^2\, dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{V+V'} (\vec{\nabla}\varphi_1)^2\, dv$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{V} (\vec{\nabla}\varphi_2)^2\, dv$$

چون میدان داخل رسانای ۲ صفر است

تفاضل U_1-U_2 را نشان می‌دهیم مثبت است چون U یک کمیت مثبت است پس $U_1>U_2$ پس $P'_{11}<P_{11}$

$$U_1-U_2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{V+V'}(\nabla\varphi_1)^2dv-\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V(\vec\nabla\varphi_2)^2dv$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2}(U_1-U_2)=\underbrace{\int_{V'}(\vec\nabla\varphi_1)^2dv}_{\text{یک کمیت مثبت است چون انتگرال‌ده آن مثبت است}}+\int_V\left[(\vec\nabla\varphi_1)^2-(\vec\nabla\varphi_2)^2\right]dv>0$$

نشان می‌دهیم $(\nabla\varphi_1)^2-(\nabla\varphi_2)^2$ مثبت است:

$$(\vec\nabla\varphi_1)^2-(\vec\nabla\varphi_2)^2=\left[\vec\nabla\varphi_1-\vec\nabla\varphi_2\right]^2-\underbrace{2(\vec\nabla\varphi_2)^2+2\vec\nabla\varphi_1\cdot\vec\nabla\varphi_2}_{*}$$

چون φ_1 و φ_2 در معادله لاپلاس صدق می‌کنند تفاضل آن‌ها نیز در معادله لاپلاس صدق می‌کند

جمله سوم $=2\vec\nabla\varphi_2\cdot\left[\vec\nabla\varphi_1-\vec\nabla\varphi_2\right]=2\vec\nabla\varphi_2\cdot\vec\nabla(\Delta\varphi)$

$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2$

$\nabla\cdot(\vec F\varphi)=\varphi\nabla\cdot F+\underbrace{\vec F\cdot\vec\nabla\varphi}_{\text{کمک جزء به جزء [illegible]}}$

$$2\int_V\left[\vec\nabla\varphi_2\cdot\vec\nabla(\Delta\varphi)\right]dv$$

بیرون از (I) رسانا

$$\underbrace{\vec\nabla\varphi_2}_{F}\cdot\vec\nabla(\Delta\varphi)=\vec\nabla\cdot\left(\varphi_2\vec\nabla(\Delta\varphi)\right)-\varphi_2\vec\nabla^2(\Delta\varphi)$$

$$=2\left[\int_V\vec\nabla\cdot\left(\varphi_2\vec\nabla(\Delta\varphi)\right)dv-\cancel{\int_V\varphi_2\nabla^2(\Delta\varphi)dv}\right]\overset{\text{قضیه دیورژانس}}{=}2\oint_{S_1}\varphi_2\vec\nabla(\Delta\varphi)\cdot d\vec a$$

$$+\oint_{S_2}\varphi_2\nabla(\Delta\varphi)\cdot da\Big]=2\varphi_2(S_1)\oint_{S_1}\vec\nabla(\Delta\varphi)\cdot d\vec a+2\varphi_2(S_2)\cancel{\oint_{S_2}\vec\nabla(\Delta\varphi)\cdot da}\to 0$$

سطح دور رسانا مرزهای حجم V هستند

البته یک سطح ∞ هم دارد که متناسب با $\frac{1}{r}$ است و صفر می‌شود

$\vec\nabla(\Delta\varphi)$ یعنی میدان $\propto\frac{1}{r^2}$

$\varphi\propto\frac{1}{r}$

$da\propto r^2$

در سطح رسانای اول φ_2 یک مقدار ثابت است

$=0$

صفر است $2(\nabla\varphi_2)\cdots$ پس عبارت (*)

$$\oint_S\nabla(\varphi_1-\varphi_2)\cdot da=\int\nabla\varphi_1\cdot da-\int\nabla\varphi_2\cdot da$$

قانون گاوس

$$\underbrace{\int_{S_1}E_1\cdot da}_{Q/\varepsilon_0}-\int_{S_1}E_2\cdot da=0$$

بدون حضور رسانای دوم است

چون روی سطح S_1 هیچ باری نداریم هر دو صفر می‌شوند. جمله دوم نیز به همان طریق صفر است

بیرون از رسانای ۱ در حضور رسانای دوم

$\Leftarrow$

$U_1-U_2>0$

$\Rightarrow\boxed{P_{11}>P'_{11}}$

پس ضرایب پتانسیل خودی هم به رسانا های دیگر در محیط بستگی دارد. و همچنین ضرایب ظرفیت

پتانسیل ← در مورد رسانا ها — هر رسانا $\varphi_i=\sum_{j=1}^{N}P_{ij}Q_j$

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{11}&P_{12}&\cdots\\ & & \\ & & P_{NN}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1\\ \vdots\\ Q_N\end{pmatrix}$$

متقارن ⟸ معکوس‌پذیر

طرفین را در P_i^{-1} ضرب می‌کنیم ضریب‌ها درایه‌های وارون P هستند

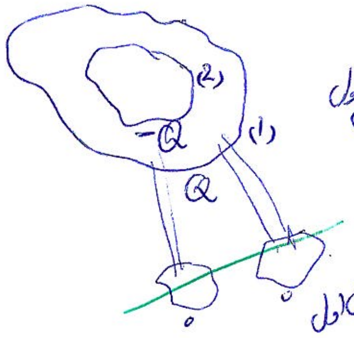
$$Q_i = \sum_j c_{ij} \varphi_j$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j c_{ij}\varphi_i\varphi_j = \boxed{U = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j P_{ij} Q_i Q_j}$$

U را هم برحسب Q_i ها و هم برحسب φ_i های می‌توانیم بنویسیم وقتی پتانسیل رساناها ثابت بود از رابطه مربوط به φ ها و وقتی بارها ثابت بود از رابطه مربوط به Q_i ها استفاده می‌کنیم
هرکدام از رساناها به یک پتانسیل ثابت وصل شده باشند
(منزوی باشند)

خازن یعنی شامل دو رسانا که بارهایی روی رساناها قرار گرفته باشد و پتانسیل هرکدام از رساناها مستقل از رساناهایی که در محیط وجود دارند، باشد. در این صورت یعنی حتماً دو رسانا باید یک پوششی نسبت به هم دارند.
اگر دو رسانا داشته باشیم که بار روی آنها باشد برای اینکه پتانسیل این دو رسانا مستقل از رساناهای دیگر باشد یکی باید درون دیگر قرار داشته باشد. هر مقداری که
اگر رساناهای دیگر را لحاظ کنیم یا بار آنها را صفر بگذاریم
در این صورت فقط یک پتانسیل ثابت روی دو رسانا ایجاد می‌کنند.

54



φ_1 پتانسیل اول

لحاظ نمی‌کنیم

$$\varphi_1 = P_{11} Q + P_{12}(-Q) + \cancel{\varphi_0}$$

مربوط به رساناهای دیگر

رسانای دوم $\varphi_2 = P_{21} Q + P_{22}(-Q)$ $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = Q\left[P_{11} + P_{21} - 2P_{12}\right]$

$\longrightarrow$ تعریف می‌کنیم: $\boxed{C = \frac{Q}{\Delta\varphi}} \rightarrow C = \frac{1}{P_{11} + P_{21} - 2P_{12}}$ ظرفیت دو تا رسانا

ظرفیت به بار هیچ کدام از دو رسانا بستگی ندارد فقط هندسی است.

خواص c_{ij} ها

1) $c_{ij} = c_{ji}$ 2) $\underbrace{c_{ii}}_{\text{خودظرفیت}} > 0$ 3) $\underbrace{c_{ij}}_{\text{ظرفیت القایی}} < 0$ $i \neq j$

خودظرفیت ضریب ظرفیت
خودش به علت خودش دارد خود

ضریب ظرفیت القایی ظرفیتی که رسانای i ام به دلیل وجود رسانای j ام دارد

$$U = \frac{1}{2} C(\Delta\varphi)^2 = \frac{1}{2} C(\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

زمانی که با حرکت و نیرو برخورد می‌کنیم انرژی در سیستم هست اگر رساناها شروع به حرکت کردن بکنند یعنی دارن کار انجام می‌دهند و محیطی که در آن انرژی پتانسیل ذخیره شده بخشی از این انرژی صرف ~~حرکت~~ حرکت کردن رسانا می‌شود و وقتی که یک رسانا داره حرکت می‌کند کار داره روی آن انجام می‌شه از طرف نیروهایی که در آن محیط وجود دارد

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -dU$$

کاری که هست از اینکه انرژی پتانسیلی که در سیستم ذخیره شده بود باید مصرف شود ذره رها می‌شود و انرژی پتانسیل آن به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود چون سیستم ای که ما داریم منزوی است بنابراین تنها عامل انجام این کار مصرف انرژی پتانسیل است. اگر dU را برحسب مشتقاتش بنویسیم:

در این حالت وقتی که بارهای رساناها ثابت است و سیستم منزوی است یک اندیس Q قرار می‌دهیم
Q های ثابت عادی از منزوی بودن است

$$F_x = \frac{-\partial U}{\partial x} \qquad F_y = \frac{-\partial U}{\partial y} \qquad F_z = \frac{-\partial U}{\partial z}$$

نیرویی که به رسانا وارد می‌شود منفی تغییر انرژی پتانسیل است

اگر رساناها حرکت انتقالی نداشته باشند و فقط حرکت دورانی داشته باشند

کار را می‌توان برحسب گشتاور نوشت اگر فقط ۱ زاویه دوران داشته باشد

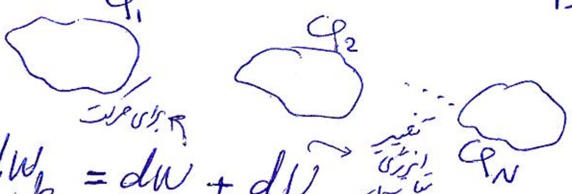
$$\boxed{dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = -dU}$$

$$\tau = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

اگر محورهای چرخش دیگری داشته باشند

$\tau = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$ ← $\frac{\partial U}{\partial \theta_1}$ ، $\frac{\partial U}{\partial \theta_2}$ ... داریم

اگر رساناها φ هایشان ثابت باشد



~~[illegible]~~ اندیس φ عادی از منزوی نبودن است منبع

برای اینکه پتانسیل رساناها ثابت باشد باید آنها را به یک ولتاژ ثابت متصل کرد و در این صورت بار آنها تغییر می‌کند و اگر اجازه بدهیم یکی از رساناها حرکت کند کاری که انجام می‌شود از باتری‌ها یا منبع‌ها انجام می‌شود که صرف حرکت مکانیکی می‌شود و یکربندی و انرژی پتانسیل محیط عوض می‌شود

$$\underset{\text{کار باتری}}{dW_b} = \underset{\text{کار مکانیکی}}{dW} + \underset{\text{تغییر انرژی پتانسیل سیستم}}{dU}$$

برای حرکت

اندیس b ← کار باتری‌ها

$$dW = F_x\,dx + \cdots = dW_b - dU$$

کاری که باتری انجام می‌دهد کار مکانیکی به علاوه تغییر انرژی پتانسیلی که در سیستم به وجود آمده

$$U = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i \longrightarrow dU = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i\, dQ_i$$

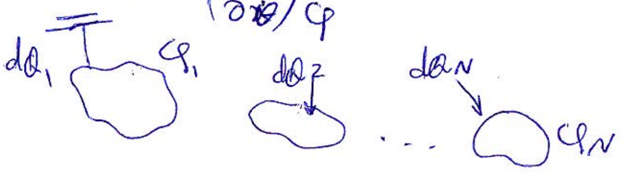
وقتی پتانسیل رسانای i ام φ_i باشد و باتری به آن باتری بار dq_i بار وارد کند باتری به اندازه $\varphi_i\, dq_i$ کار انجام داده تا بار را از صفر به پتانسیل φ_i می‌رساند

$$dW_b = \sum \varphi_i\, dQ_i$$

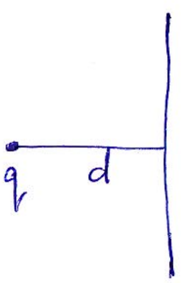
$$\Rightarrow dW = F_x\,dx + \cdots = dW_b - dU = dU \Rightarrow \boxed{dW = dU} \Longrightarrow F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_\varphi \quad F_y = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_\varphi$$

اگر رساناها فقط دوران کنند ←

$$\tau = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_\varphi$$



مثال: فرض کنید یک صفحه رسانا طویل داریم و یک بار q را بخواهیم از ∞ بیاوریم در فاصله d از صفحه قرار دهیم کار انجام شده چقدر است؟

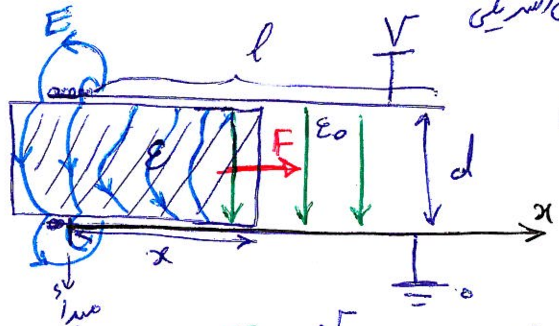


جلسه 22

مثال: (مثلاً درست کردیم اگر محیط خطی باشد یعنی ε تابعی از $\vec E$ نباشد)

$$\left(U=\frac{1}{2}\varepsilon\int_{\text{کل فضا}} E^2\,dv\right)$$

فرض کنید خازنی داریم که یک ΔV ایجاد کرده ایم و داخل آن یک دی الکتریکی قرار داده ایم اگر چنین خازنی را با یک اختلاف پتانسیل ثابت (سیستم به یک منبع خارجی وصل باشد و منزوی نباشد) و به اندازه Δx دی الکتریک را بیرون می کشیم چه اتفاقی می افتد؟



E بین دو صفحه خازن چه داخل دی الکتریک چه بیرون آن $\frac{V}{d}$ است

شرایط مرزی بین ε و ε_0 که $E_{1t}=E_{2t}$ ارضا می کند چون در نزدیکی مرز و در دو طرف مرز E به صورت مماس بر مرز است

$$E=\frac{V}{d}$$ ضخامت

چون E یکنواخت است از انتگرال بیرون می آید

$$U=\frac{1}{2}\varepsilon E^2(wd)x+\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2(wd)(l-x)$$

متغیر ما در U ، x است

$$U=\frac{1}{2}\frac{V^2}{d^2}\varepsilon wdx+\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\frac{V^2}{d^2}wd(l-x)$$

نیرو مشتق U نسبت به متغیرش است که اینجا متغیر U ، x است چون در پتانسیل ثابت است و فقط تابعی از x است

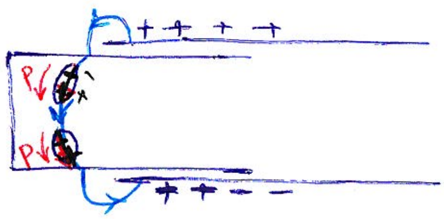
$$F_x=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_\varphi=\frac{1}{2}w\frac{V^2}{d}(\varepsilon-\varepsilon_0)\hat i$$ این غلط است که معنا ندارد

$$E=\frac{\Delta\varphi}{d}$$

$$\Delta\varphi=-\int E\cdot dr$$

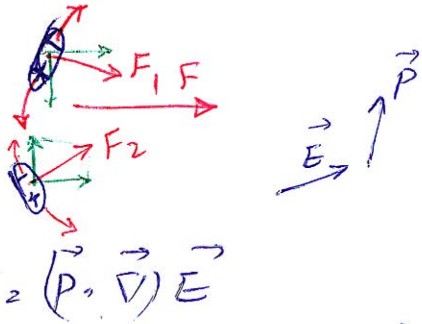
E ثابت $\rightarrow \Delta\varphi=-E\int dr$

اگر دی الکتریک را به سمت بیرون بکشیم باز یک نیرویی به دی الکتریک وارد می کند که بخواهد از خارج شود این کمی غیرمعقول است که میدان $\vec E$ در جهت y یک نیرو در جهت X وارد می کند و با فیزیکی که قبلاً خوانده ایم مطابق نیست. کجا غلط است؟ در واقع میدانهای ما این طور نیستند کاملاً بلکه اثرات حاشیه ای که اینجا وجود دارند میدانهای حاشیه ای داریم در این صورت که به تدریج که کنارها می رویم میدان به شکل بالا می شود میدانی فرض اولیه بحث غلطی است (اگر همه کتابها این گونه نوشته اند) این میدانهای دیگر که در شکل هستند می توانند نیرویی در جهت x ایجاد کنند.



میدانهای حاشیه ای روی محیط دی الکتریک اثر می کنند و مولکولهای دی الکتریک را قطبیده می کنند در راستای همان میدانی که اعمال شود

میدان غیر یکنواخت است به بار منفی بالا نیرویی به سمت بالا وارد می شود. مولفه های در راستای y، F_1 و F_2 یکدیگر را خنثی می کنند و مولفه x آنها در یک راستا هستند. میدان غیر یکنواخت یک قطبش ایجاد می کند و بعد این قطبش از طرف میدان به بارهای مثبت و منفی که به وجود آمده اند یک نیرویی وارد می کند در راستای x



اگر دو قطبی $\vec P$ تحت تأثیر میدان خارجی $\vec E$ قرار گیرد نیروی $F=(\vec P\cdot\vec\nabla)\vec E$ به آن وارد می شود.

$$F=(\vec P\cdot\vec\nabla)\vec E$$

$$d\vec p=\vec P\,dv$$

یک عنصر حجم dv دی الکتریک را در نظر بگیریم

$$dF=(d\vec p\cdot\vec\nabla)\vec E=(\vec P\cdot\vec\nabla)\vec E\,dv$$

نیروی کلی که به دی الکتریک وارد می شود.

$$\vec F=\int_V(\vec P\cdot\vec\nabla)\vec E\,\underbrace{dv}_{\text{یک عنصر}}$$

اختلاف

یادآوری:

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

با توجه به اینکه دی الکتریک در اینجا خطی است جای $\vec{P}$ می‌توان نوشت $\vec{P} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}$

$$\vec{F} = \int_V (\vec{P}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}\,dv = (\varepsilon-\varepsilon_0)\int_V (\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}\,dv$$

$A = B = E$

$$2(\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = \vec{\nabla}(E^2)$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\int_V \vec{\nabla}E^2\,dv$$

E^2 یعنی اندازه میدان الکتریکی به توان ۲

$$\nabla E^2 = \frac{\partial E^2}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial E^2}{\partial y}\hat{j}$$

E^2 تابع زوجی نسبت به y است $E^2(y) = E^2(-y)$

به علت تقارن مسئله در z مشتق آن نسبت به y یک تابع فرد می‌شود انتگرال آن از $-\frac{d}{2}$ تا $+\frac{d}{2}$ صفر می‌شود

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\hat{i}\int_V \frac{\partial E^2}{\partial x}\,dv}$$

جواب $\vec{F}$ در حالت کلی

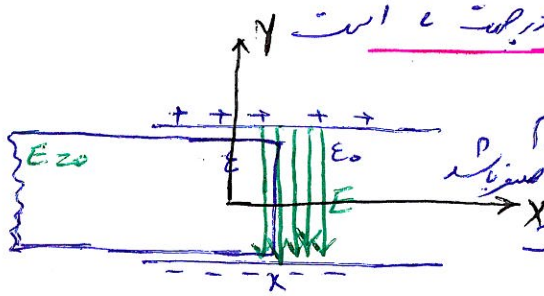
جواب درست و دقیق این است

برای بدست آوردن مقدار $\vec{F}$ باید طبیعت $\vec{E}$ را داشته باشیم

حتماً دی الکتریک را به داخل می‌کشد

یعنی $\frac{\partial E^2}{\partial x}$ یک کمیت مثبت است $\varepsilon - \varepsilon_0$ که مثبت است وقتی x افزایش می‌یابد E^2 نیز افزایش می‌یابد

پس عبارت حاصل مثبت و $\vec{F}$ در جهت $\hat{i}$ است



برای حل این مسئله در حالت خاص باید روی دی الکتریک شرط بگذاریم

شرطها: دی الکتریک آنقدر بزرگ باشد که انتهای آن خارج خازن میدان صفر باشد و انتهای دیگر آن در قسمت میانی خازن در جایی باشد که میدان در آن ثابت باشد. در این صورت جواب خیلی ساده‌تر از آنچه که بدست آوردیم درست خواهد بود زیرا

$$\vec{E}_{\text{راست}} = \frac{V}{d}(-\hat{j})$$

$$\vec{E}_{\text{چپ}} = 0$$

$$\vec{F} = \frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\hat{i}\int_V \frac{\partial E^2}{\partial x}\,dv = \frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\hat{i}\int_V \frac{\partial E^2}{\partial x}\,\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dv} \quad -x < x < x$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\hat{i}\int dy\,dz\left(E^2_{\text{راست}} - E^2_{\text{چپ}}\right) = \frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\hat{i}\,\frac{V^2}{d^2}\,dW$$

از بعد z میدان صرف نظر کردیم چون این قسمت‌ها نیز همدیگر را خنثی می‌کنند نیرو در راستای x همین عبارت بالا (جواب کلی) می‌شود

اگر دینامیک مسئله را نگاه کنیم به شکل دیگری هم نیروی وارد بر دی الکتریک را حساب کنیم نیز به صورت دوقطبی می‌توان مستقیم حساب کرد یک بار قطبش داریم که باید در $\vec{E}$ ضرب شود این می‌توان

$$\vec{F} = \int dq_p\,\vec{E} = \cancel{\int_V \vec{E}\,\underbrace{\rho_p}_{-\nabla\cdot P}\,dv} + \oint_S \vec{E}\,\underbrace{\sigma_p}_{\hat{P}\cdot\hat{n}}\,da$$

سطح دی الکتریک

$$= \oint_S \vec{E}(\hat{P}\cdot\hat{n})\,da = (\varepsilon-\varepsilon_0)\oint_S \vec{E}(\vec{E}\cdot\hat{n})\,da$$

زیرا $\rho_p = 0$ چون

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\nabla\cdot\vec{E} = \left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}}_{\rho_f} = 0$$

اتحاد انتگرالی

$$\oint_S \vec{A}(\vec{B}\cdot\hat{n})\,da = \int_V \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\,dv + \int (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\,dv$$

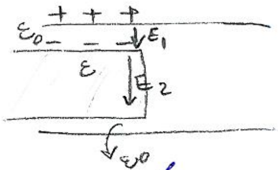
ظرفیت خازن مسطح $C = \frac{\varepsilon A}{d}$ (A: مساحت صفحات، d: فاصله صفحات)

ظرفیت خازن استوانه‌ای $C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}}$

ظرفیت خازن کروی $C = 4\pi\varepsilon\frac{ab}{b-a}$ دو کره هم مرکز $b > a$

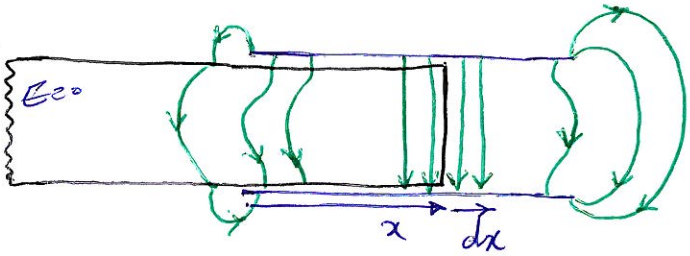
$$A = B - E \qquad \nabla \cdot E = 0$$

$$\Longrightarrow \; = \varepsilon - \varepsilon_0 \int_V (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \, dv$$



$$\varepsilon_0 E_1 = \varepsilon E_2$$

اشکال روش اول انرژی کلی است که داریم وارد می‌کنیم این اشکال را این طور می‌توانیم برطرف کنیم که فقط با تغییرات انرژی سروکار داشته باشیم



اگر جابه‌جایی کوچک dx انجام دهیم به طوری که انتهای راست دی‌الکتریک همچنان در ناحیه با E ثابت راست باقی بماند

حجم مربوط به dx که قبلاً خلاء بود حال با دی‌الکتریک پر شده انرژی که قبلاً

مقدار آن جمله دوم بود به جمله اول تبدیل شده و این تغییر انرژی کل است

$$dU = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \underbrace{wd(dx)}_{\text{حجم}} - \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 wd(dx)}_{\text{انرژی که اول بود}}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0) E^2 wd}$$

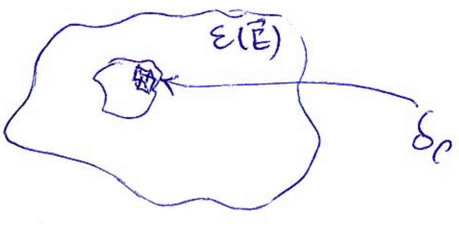
اگر تغییر انرژی‌ها جزئی را بنویسیم و نه انرژی کل و سمت چپ دی‌الکتریک به اندازه کافی طولانی باشد جواب به روش اول درست است

اگر دی‌الکتریک به اندازه کافی طولانی نباشد و محدود باشد / در فقط بخشی که میدان در آن راست است در انرژی تأثیر کند این روش درست است / دیگر روش غلط است

تمام فرمول‌ها و انتگرال‌هایی که تاکنون نوشتیم در صورتی صادق هستند که محیط خطی یعنی ε تابعی از $\vec{E}$ نباشد

اگر ε تابعی از $\vec{E}$ باشد تمام این فرمول‌ها و انتگرال‌ها برای U غلط است.

انرژی پتانسیل در محیط غیرخطی



یک محیطی داریم و بارهای جایگزیده آورده‌ایم کار انجام داده‌ایم و چگالی محیط به یک چگالی ای رسیده یک $\delta\rho$ ای را به محیط اضافه می‌کنیم چقدر کار انجام می‌دهیم و فرض می‌کنیم وقتی داریم $\delta\rho$ را می‌آوریم تابع پتانسیلی که در مسیر وجود دارد مقدار آن $\varphi(r)$ باشد کاری که باید انجام دهیم: $\delta\rho \, dv \, \varphi(\vec{r})$

اگر انتگرال بگیریم روی همه حجم‌هایی که $\delta\rho$ آنها را روی dv های مختلف گذاشته‌ایم

$\delta\rho$ آوردن $\vec{D}$ را به اندازه $\delta\vec{D}$ محیط را عوض می‌کند

$$\delta W = \int_V \delta\rho \, dv \, \varphi(\vec{r})$$

$$= \int_V \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D}) \varphi(\vec{r}) dv$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D}) = \delta\rho$$

$$\delta W \overset{\text{اتحاد}}{=} \cancel{\int \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D} \varphi(\vec{r})) dv} - \int \delta \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \varphi \, dv$$

عبارت اول را به انتگرال روی سطح تبدیل کنیم در فواصل دور صفر می‌شود

$$= + \int_V \delta \vec{D} \cdot \vec{E} \, dv$$

اگر از اول تا ρ نهایی بنویسیم U کل بدست می‌آید

۱:۲۳

$$\boxed{U = W = \int_V dv \, \vec{E} \cdot \int^{\vec{D}} \delta \vec{D}}$$

روی کل $\vec{D}$ ها

حداکثر و min $\delta\vec{D}$ ها را انتگرال می‌گیریم

اگر محیط خطی باشد این رابطه نیز درست است

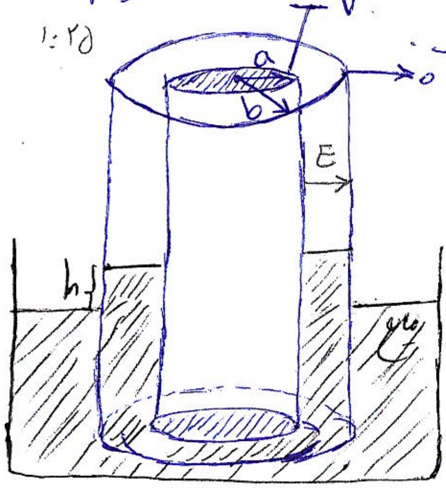
$$\vec{E}\cdot\delta\vec{D}=\frac{1}{2}\delta(\vec{E}\cdot\vec{D}) \leftarrow \text{محیط خطی}$$

محیط خطی

از جمع آوردن بارهای روی محیط های خطی این اصل است که اگر یک بار q را بیاوریم یک Q ای داریم. اگر یک بار دیگر q بیاوریم یک Q متفاوت دیگری داریم.

D تابعی از E است.

1:25



مسئله ۱۸-۶ ریتس: یک استوانه طویل داریم قسمت وسط توپر است. این استوانه را داخل یک ظرف دی الکتریک مایع می گذاریم. اگر استوانه داخلی را به پتانسیل V و استوانه خارجی را به زمین وصل کنیم سطح مایع به اندازه h بالا می آید و بعد متوقف می شود. $\chi = ?$

مایع g, ρ گرانش

V, a, b, h

از همان روش نقطه که توی کتاب است میشه حل کرد با دادن جابجایی ... U رسیدن ...

$$U=\frac{1}{2}\varepsilon\int|E|^2\,dv \quad \text{کل فضا}$$

$$E=\frac{V}{d}$$

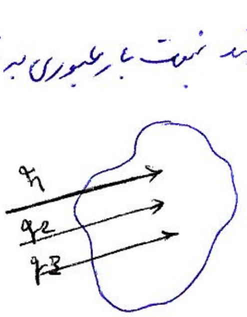
$$\text{خازن استوانه ای}\quad C=2\pi\varepsilon_0\frac{l}{\ln\frac{b}{a}}$$

جلسه 23

از این قسمت به بعد میدان E را در حالتی بررسی می کنیم که در محیط بار حرکت کند. اگر حرکت ایستا باشد معادلات حرکت مانند معادلاتی است که تاکنون خوانده ایم.

جریان الکتریکی

جریان یعنی اگر یک سطح مفروض را در نظر بگیرید و از این سطح در واحد زمان بار q عبور کند نسبت بار عبوری به زمان را جریان گوییم.



dq, dt

$$I=\frac{dq}{dt}$$

در محیط هایی که با آنها سروکار داریم که می تواند دی الکتریک باشد که رسانش دارد، مثلا آب هم رسانندگی دارد و هم χ دارد.

اگر محیط رسانایی خوبی داشته باشد الکترونهای ضعیف ... در محیط حامل جریان الکتریکی هستند. در برخی مواد مانند الکترولیت ها آنها یون ها و الکترونهایی هستند که می توانند به سمت الکترودها حرکت کنند.

اگر محیط بتواند حرکت کند مانند مایعات یا گازها ، با حرکت ماده ، (کل ماده) جریان به وجود آید یا حرکت بارها به وجود آید به چنین جریانی ، جریان همرفت گویند . مانند زمانی که رعد و برق می زند و ذرات مختلف برای اینکه اختلاف پتانسیل به حالت عادی خودشان برگردد در هوا شروع می کنند به سمت بالا حرکت کنند تا سطوح مختلف زمین در حجم به وجود آید و بنابراین یک جریان همرفتی به وجود خواهد آمد.

هم پتانسیل بودن

در پلاسما ها که محیط یونیزه شده ماده می تواند حرکت کند و یک جریان الکتریکی ایجاد شود.

ما در محیط هایی که جامدند کار می کنیم و بنابراین یک رسانش خاصی که بابت اینکه الکترونها سرعتی در این مواد دارند و الکترونها جریان را به وجود می آورند است و بارها و یونهای دیگر که وزن زیادی دارند یک جریان ضعیفی را ایجاد خواهند که آن ها را

در نظر نمی گیریم

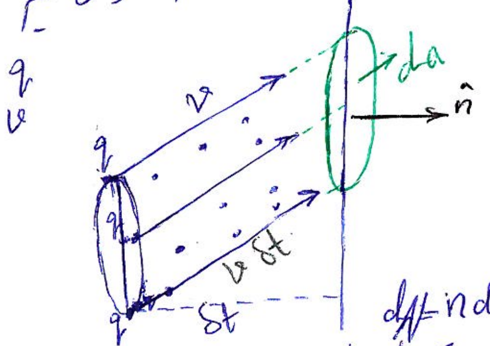
کنار می گذاریم و الکترونها که جرم کمی دارند و حامل بار هستند و سرعت سوق بیشتری دارند را در نظر می گیریم

ما با محیط هایی سر و کار داریم که الکترونهای آزاد هستند که جریان را به وجود می آورند.

اهداف ما : در محیط هایی که بار حرکت می کند چه چیزی تعریف می شود؟ پتانسیل ؟

فرض کنید محیطی داریم که حامل های بار از یک نوع بار تشکیل شده اند و همه آنها بار q دارند و این را تعمیم می توانیم گسترش دهیم

بارها در حالت تعادل هستند و همه با یک سرعت مشخص دارند حرکت می کنند.



فرض می کنیم در زمان δt همه این بارها درون از da با سرعت v عبور می کنند

اگر تعداد بارها در واحد حجم $= n$ تمام بارهایی که در حجم روبرو هستند

در زمان δt از da عبور خواهند کرد

تعداد بارهایی که داخل این استوانه محصور است

n_i = تعداد بارهای با بار q_i و سرعت v_i در واحد حجم

ارتفاع استوانه

$$dN = n\, da(\underbrace{\vec{v}\,\delta t \cdot \hat{n}})$$

تعداد بارهایی که در استوانه محصور قرار گرفته

تمام باری که در استوانه است و از da عبور کرده اند $\quad dq = q\, dN = n\, da(v\, \delta t \cdot \hat{n})\, q$

جریان کوچکی که از da عبور کرده $\quad dI = \frac{dq}{dt} = nq\vec{v} \cdot \underbrace{\hat{n}\, da}_{\vec{da}}$

اگر فرض کنیم در محیط n_1 تا q_1 ، ...

$n_1 \longrightarrow q_1 , v_1$

$n_2 \longrightarrow q_2 , v_2$

عنصر جریانی که روی da از ترکیب بارهای مختلف به وجود می آید :

$$dI = \Big(\sum n_i q_i \vec{v}_i\Big) \cdot \hat{n}\, da = \vec{J} \cdot \hat{n}\, da$$

سرعت

چگالی جریان

تابع نقطه ای

$$\vec{J} = \sum n_i q_i \vec{v}_i \qquad \left(A/m^2\right)$$

سرعت

$I \rightarrow$ آمپر c/s

$\frac{dI}{\hat{n}\, da} \leftarrow \vec{J} \rightarrow$ آمپر بر واحد سطح

اگر یک سطح مفروض دلخواه a داشته باشیم $\leftarrow$

جریان کلی که از سطح A عبور می کند :

$$I = \int_A \vec{J} \cdot \hat{n}\, da$$

چون سرعت ها نقطه ای اند و از یک نقطه به یک نقطه می تواند عوض شود می توانیم بگوییم در یک زمان δt ، v است و در زمان دیگر سرعت دیگر دارد . بنابراین چگالی جریان یک کمیت نقطه ای است یعنی در یک نقطه ای از مکان با حجم dv چگالی جریان می تواند با نقطه ای دیگر در عنصر حجم دیگر

۲۰ متفاوت باشد . بنابراین بسته به اینکه سرعت v_i چه باشد چگالی جریان از یک نقطه محیط به نقطه دیگر می تواند تغییر کند

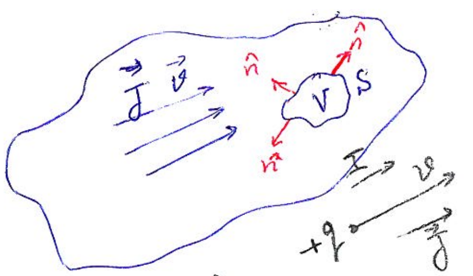
$\vec{J}$ نیز در معادلات دیفرانسیلی ظاهر می‌شود. با توجه به اینکه در محیط‌ها تجمعی بار وجود دارد

[تعریف جریان (جهت حرکت بارهای مثبت) اگر بار منفی بود جهت v خلاف جهت I بود

جهت مثبت | جهت $\vec{J}$ بسته به اینکه بار مثبت یا منفی باشد می‌تواند خلاف یا در جهت

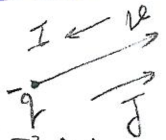
v باشد.] بستگی بار یعنی اگر یک عنصر حجم dv که توسط سطح

S پوشیده شده به این سطح S جریانی وارد می‌شود همان جریان هم خارج شود



جریان مثبت وارد به حجم V وارد می‌شود به همین دلیل $\hat{n}$ ای که در نظر

می‌گیریم باید به سمت داخل باشد اما $\hat{n}$ برای یک سطح بسته به سمت بیرون است بنابراین یک منفی



در تعریف I می‌گذاریم. یک باری از هر سو می‌تواند وارد یا خارج حجم V شود

باری که به آن اضافه می‌شود می‌خواهیم $\frac{dq}{dt}$ آن را بدانیم ⇐ جریانی که به آن

وارد می‌شود را باید با علامت منفی در نظر بگیریم چون $\hat{n}$ به سمت بیرون است

$$I = \int \vec{J}\cdot\hat{n}\,da \qquad I = -\oint_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,da$$

سطح بسته

$$\frac{dQ}{dt} = I = -\oint_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,da = -\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,dv$$

چون عنصر حجم تغییر می‌کند

مشتق مجموع = مجموع مشتق‌ها

بار داخل حجم

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\,dv = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dv$$

dv تغییر نمی‌کند اما چگالی dv تغییر می‌کند

ρ می‌تواند تابعی از زمان و مکان باشد فقط تغییر

زمانی را در نظر می‌گیریم (در یک نقطه ثابت در نظر می‌گیریم)

جریانی که داخل حجم می‌آید چگالی آن را زیاد می‌کند (تغییر چگالی آن در هر زمان می‌شود)

$$\Rightarrow \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\right) dv = 0$$

32

چون این رابطه برای هر حجمی درست است انتگرال ده باید صفر باشد

$$* \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0}$$

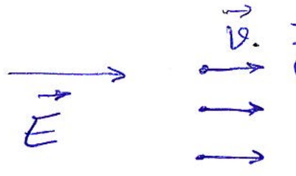
معادله پیوستگی (بقای بار) ← ارتباط بین چگالی بار و چگالی جریان

بارهایی که وارد می‌شوند از بین نمی‌روند داخل

آن حجم ذخیره می‌شوند.

$\forall V$

33



چگالی جریان

$$\boxed{\vec{J} = g(E)\vec{E}}$$

رسانندگی

اندازه $\vec{E}$

☐ بار توسط میدانی که در محیط به وجود آمده وادار به حرکت می‌کند

حاصل حرکت بارها توسط E خارجی است با تجربه به رابطه

$\vec{E}$ و $\vec{J}$ می‌رسیم. g می‌تواند تابعی از $\vec{E}$ باشد

اگر یک محیط همگن همسانگرد و خطی داشته باشیم

محیط خطی ← g مستقل از $|E|$ است (g ثابت است)

همگن ← از یک نقطه به نقطه دیگر g تغییر نکند (عوض نشود)

محیط می‌تواند خطی باشد ولی همگن نباشد (از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر کند) ولی مستقل از $\vec{E}$ باشد

ناهمسانگرد ← g از یک جهت به جهت دیگر عوض شود

ما وضعیتی را بررسی می‌کنیم که g یک تابع خطی (مستقل از $\vec{E}$ های خارجی) است ←

$$* \quad \boxed{\text{محیط اهمیک} \leftarrow \vec{J} = g\vec{E}}$$

قانون اهم همین رابطه است.

یک رابطه Empirical (تجربی) است

برای هر محیطی یک g ای داریم.

$$[g] = \frac{A}{V\,m} = \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$$

آمپر / ولت متر

متر ← ولت

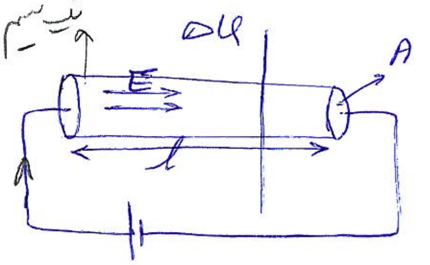
$$J \rightarrow \frac{A}{m^2} \qquad \Omega^{-1} = \text{Ohm}^{-1} = \text{mho} \qquad E \rightarrow \frac{V}{m}$$

مقاومت ویژه: عکس رسانندگی

$\eta = \frac{1}{g}$ مقاومت ویژه

($\rho = \frac{1}{\sigma}$ جکسون کتاب‌ها)

$[\eta] = \frac{V \cdot m}{A} = \Omega \cdot m$



$$\Delta\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \longrightarrow \Delta\varphi = E\,l$$

$$I = \oint \vec{J} \cdot \hat{n}\, da = JA = gEA = \frac{g\,\Delta\varphi}{l} A$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{l}{gA} I} \qquad \text{مقاومت} \quad \boxed{R := \frac{l}{gA}} = \eta \frac{l}{A}$$

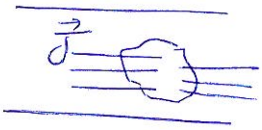
قانون اهم

سیم با طول l و سطح A

خود R تابعی از جریان است. اما در این محیط‌های اهمی که دیدیم مستقل از جریان است.
g را فقط گفتیم مستقل از $\vec{E}$ باشد و g می‌تواند تابعیت x و y و z داشته باشد در مواردی که خطی است
تابعیت میدان g را برداریم.

$$\boxed{\Delta\varphi = R\,I}$$

☐ اگر یک محیط خطی، همگن و همسانگرد و علی‌الاصول جریان پایا داشته باشیم جریان پایا یعنی با زمان کمیت‌های
ما عوض نمی‌شود و در داخل یک حجم در محیط چگالی بارهایی که وجود داشت
دیگر به تدریج بعد از یک مدت مشخص تغییر نمی‌کند



اگر یک جریان پایا داشته باشید

تعریف $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}$: از یک حجمی که داریم اون چیزی که
به حجم وارد می‌شود از آن خارج می‌شود.

جریان پایا $\longrightarrow$ $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \xrightarrow{\text{قانون پیوستگی}} \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0}$

$\vec{\nabla}\cdot(g\vec{E}) = 0$

همگن $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \longrightarrow$

اگر g تابعیت مکانی نداشته باشد همگن باشد (خطی هم بود)
مستقل از مکان g و از دیورژانس بیرون می‌آید $\longrightarrow$ $\nabla\cdot E = \frac{\rho}{\epsilon}$
یا جریان پایا در محیط اهمیک چگالی بار وجود ندارد
همه این فرق نیست
غیرهمگن از دو محیط با g مختلف داشته باشیم روی مرزشان ρ_f داریم

☐ اگر میدان‌های الکتریکی که داریم استاتیک باشند یعنی با زمان تغییری نکنند E ثابت باشد هیچ تغییر نکنند یعنی میدان الکتریکی
پایا داریم

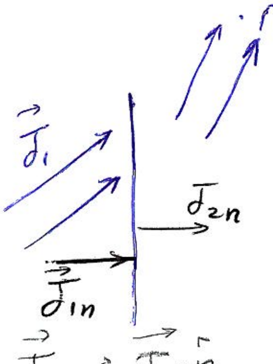
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \ , \quad \int E \cdot dl$$

میدان الکتریکی پایا

یک محیط همگن اهمیک و میدان E پایا $\Longrightarrow \begin{cases} E = -\nabla\varphi \\ \nabla\cdot E = 0 \end{cases} \longrightarrow \nabla^2\varphi = 0$

$\vec{J} = g\vec{E}$

بنابراین جواب معادله لاپلاس
φ را به ما می‌دهد φ، E را می‌دهد، E، جریان را خواهد داد پس برای چنین محیط‌هایی جواب‌های لاپلاس
همان جواب‌هایی که در هندسه‌های مختلف بدست آوردیم دارد در اینجا بهتر مختصات دکارتی است.
شرایط مرزی را برای φ و چگالی جریان می‌نویسیم. شرایط مرزی را برای E هم می‌توانیم بنویسیم
معادله لاپلاس جواب یکتا دارد که با شرایط مرزی تعیین می‌شود.



$\vec{J}_{1n} = \vec{J}_1 \cdot \hat{n}$

☐ اگر چگالی جریان ثابت باشد (حالت پایا) اگر چگالی جریان J_1 و J_2 داشته باشیم
در حالت پایا
شرط مرزی یعنی جریانی از این محیط به محیط دیگر می‌رود جریانی که وارد می‌شود باید ثابت باشد
روی سطحی که داریم اگر حالت پایا نداشته باشیم همان جریانی که می‌آید از سطح عبور نکند بار روی سطح
جمع می‌شود. (چگالی سطحی افزایش پیدا کند) جریانی که عبور می‌کند مولفه عمودی جریان
است که بین دو سطح عبور می‌کند و برای حالت پایا مهم است.

مؤلفه مماسی جریان مهم نیست

شرط مرزی $\boxed{J_{1n} = J_{2n}} \longrightarrow g_1 E_{1n} = g_2 E_{2n}$

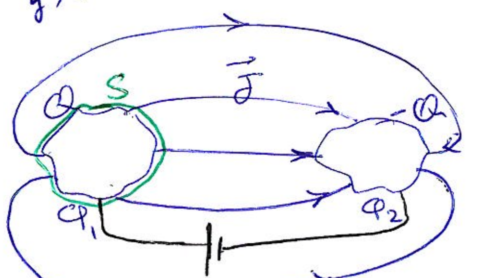
معمولاً شرط مرزی را برای J می‌نویسیم که ساده‌تر است.

☐ چون میدان E ما حالت پایایی دارد $\oint E \cdot dl = 0$ است اگر یک مستطیل روی مرز در نظر بگیرید و عرض آن را به صفر میل دهید و $\int E \cdot dl =$ را بنویسید

$$\int E \cdot dl = 0 \xrightarrow{\text{مانند قبل}} \underbrace{\boxed{E_{1t} = E_{2t}}}_{\text{پیوستگی پتانسیل}} \longrightarrow \frac{J_{1t}}{g_1} = \frac{J_{2t}}{g_2}$$

شرط E مماسی یعنی همان پیوستگی پتانسیل شد که روی معادله لاپلاس را با φ حل مشخص می‌کنیم و می‌گوییم φ روی مرز پیوسته است و مؤلفه عمودی چگالی جریان روی مرز پیوسته است.

g, ε



مثال: فرض کنید تمام محیط کل فضا یک رسانندگی g و گذردهی ε (همیشه ε و g) وجود دارند هیچ ماده‌ای رسانا کامل و هیچ ماده‌ای دی‌الکتریک کامل نیست) دو الکترود (رسانندهٔ خوب) با پتانسیل φ_1 و φ_2 داریم و بارهای مشخص روی آنهاست. (Q و $-Q$ ـ از یک باتری وصل کرده باشیم)

مقاومت محیط (دو الکترود) نسبت به جریان بیرون آنها چقدر است و ظرفیت سیستم چه هست؟ محیط چه مقاومتی در مقابل جریان بین دو الکترود از خودشان می‌دهد ظرفیت؟

$\varphi_2 - \varphi_1$

$$R = \frac{\Delta\varphi}{I}$$

دور یکی از رساناها که سطح S در بر گرفته یک سطحی در نظر می‌گیریم تمام باری که از این سطح خارج می‌شود (یا به ~~...~~ وارد می‌شود) جریان سیستم است چون یک محیط اهمیک است
رسانای دیگر

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n}\, da = \oint_S g E \cdot \hat{n}\, da \overset{\text{همگن}}{=} g \underbrace{\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, da}_{\text{بار داخل رسانا که ثابت است}/\varepsilon} = g \frac{Q}{\varepsilon} = I$$

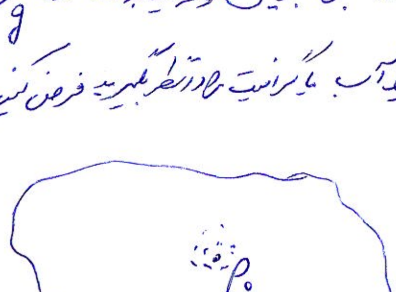
چون رسانا در خلأ نیست و گذردهی محیط ε است. الکتریکی

$$\text{تعریف ظرفیت} \begin{cases} I = g \dfrac{Q}{\varepsilon} \\ Q = C \Delta\varphi \\ R = \dfrac{\Delta\varphi}{I} \end{cases} \Longrightarrow R = \frac{Q/C}{g\, Q/\varepsilon} \Longrightarrow \boxed{RC = \frac{\varepsilon}{g}} \longrightarrow \text{جنس زمان دارد}$$

بسیار رابطهٔ مهم برای مواد

رساناها را به هر شکلی که در نظر بگیرید همیشه این رابطه برقرار است یعنی مقاومت یک محیط در مقابل جریان انتقال و ظرفیت بدست آمده $\frac{\varepsilon}{g}$ است

☐ $\frac{\varepsilon}{g}$ برای مواد بسیار بسیار کوچک است. محیطی که رسانندگی g و گذردهی ε دارد مثلاً یک محیط آب با گرانیت را در نظر بگیرید فرض کنید چگالی بار ρ_0 را داخل این محیط تزریق کرده باشیم و بخواهیم بدانیم چه اتفاقی در چگالی این محیط با زمان می‌افتد؟ در همان ابتدا بارها روی سطح نمی‌آیند بار شروع به پخش شدن می‌کند پخش شدن بارها روی سطح یک زمانی را لازم دارد و احد زمانی مهم $\frac{\varepsilon}{g}$ است



در حالت کلی پیوستگی داریم

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{همیشه برقرار است}$$

$\vec{J} \to g\vec{E}$

همگن و اهمیک

$$\longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\overset{\text{همگن}}{g}\vec{E}) = 0 \longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + g \underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{\rho/\varepsilon} = 0 \longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{g}{\varepsilon}\rho = 0$$

می‌توان این معادله را بر حسب t حل کنیم

$\Rightarrow \quad \rho = \rho_0 \, e^{-t/(\varepsilon/g)}$ ⟵ چگونگی تغییر چگالی بر حسب زمان

آهن $\varepsilon/g \sim 10^{-18}\,s$ شیشه $\varepsilon/g = 2\,s$

آب $\varepsilon/g \sim 10^{-8}\,s$

اگر باری را داخل آهن بریزید در مرتبه 10^{-18} ثانیه (زمان خیلی کم) چگالی بار در آن نقطه ای که داشتیم (ρ تابع نقطه ای) به $\frac{1}{e}$ می رسد.

خیلی سریع بارها پخش می شوند و دیگر چگالی بار صفر می شود

if $\quad t = 10\,\varepsilon/g \longrightarrow \rho = 0$

هر چه g بیشتر و ε کمتر چگالی بار آهسته تر پخش می شود دی الکتریک خیلی خیلی خوب می تواند بار را در خود نگه دارد.

این وضعیت غیر پایا است. (~~لحظه~~ لحظات اولیه)

ما بعد از زمان لازم برای رسیدن به حالت پایا را بررسی می کنیم که همه چیز استاتیک شده را بررسی می کنیم

☐ شرایطی که اینجا ایجاد کردیم اگر محیط همگن نباشد تغییراتی وجود دارد

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0\\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0\end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l}\nabla^2\varphi = 0\\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = \dfrac{\vec{J}}{g} = \eta\vec{J}\end{array} \qquad \begin{array}{l}E_{1t} = E_{2t}\\ J_{1n} = J_{2n}\end{array}$$

معادلاتی که ما بررسی می کنیم محیط همگن و اهمیک است.

اگر محیط همگن نباشد و حالت پایا داشته باشیم

اما $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$

$$\vec{\nabla}\cdot(g\vec{E}) = \underbrace{\vec{\nabla}g\cdot\vec{E}}_{\text{خلاف صفر}} + g\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{\rho/\varepsilon} = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}g\cdot\vec{E} = -g\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

در وضعیتی که محیط ما همگن نباشد قطعاً و قطعاً چگالی بار داریم. جریان پایا هست ($\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$) ولی اگر از یک نقطه به نقطه دیگر برویم و g تغییر کند یک باری در محل (جوی g) در محیط مان یک جمع می شود و در محل دیگر بار دیگری ذخیره می شود. اگر $\nabla E = 0$ چیزی ذخیره نمی شود

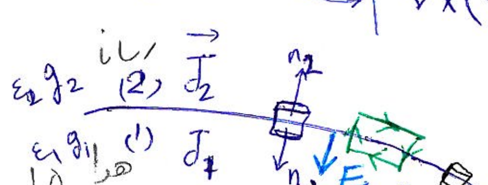
ما با محیط های غیرهمگن کار نمی کنیم

جلسه 24

میدان پایا محیط ⟵
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

J پایا و محیط اهمیک ⟵
$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0}, \qquad \vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{J}}{g}\right) = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{J} = 0}$$

☐ اگر مرز داشته باشیم و دو محیط (۱) و (۲) با استفاده از روابط بالا شرایط مرزی را می توان تعیین کرد اگر یک حجم استوانه روی مرز در نظر بگیریم و ارتفاع آن را به صفر میل دهیم



جریان پایا

سطح ها تبی صفر می شود

$$0 = \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{J})\,dv = \oint_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,da \longrightarrow \boxed{J_{1n} = J_{2n}}$$

عرض منحنی c را به صفر میل دهیم

$$\vec{\nabla}\times\frac{\vec{J}}{g} = 0 \qquad \int_S \left(\vec{\nabla}\times\frac{\vec{J}}{g}\right)\cdot d\vec{a} = \oint_C \frac{\vec{J}}{g}\cdot d\vec{l} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{g_1}J_{1t} = \frac{1}{g_2}J_{2t}} \longrightarrow \begin{array}{l}E_{1t} = E_{2t}\\ \varphi_1 = \varphi_2\end{array}$$

قضیه استوکس

در شرایطی که یک محیط اهمیک و میدان و جریان پایا داشته باشیم آنگاه ←

$$\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\ J_{1n}=J_{2n}\to g_1\vec E_{1n}=g_2\vec E_{2n}\longrightarrow \boxed{g_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=g_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}}\end{cases}$$

مولفه n یعنی راستای عمود بر فصل مشترک است اگر آن راستا را z بگیریم می‌شود $\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}$

معمولاً چون ما می‌خواهیم تا پتانسیل را بدست آوریم φ ها را بدست می‌آوریم و با استفاده از آن کمیت‌های مورد نظرمان را بدست آوریم

دو محیط داشته باشیم که رسانندگی یکی خیلی بیشتر از دیگری باشد ←

$$E_{2n}=\frac{g_1}{g_2}E_{1n}\qquad E_2=E_{2t}\qquad J_{2n}=g_2E_{2n}\to \text{محدود}$$

~~چگالی جریان عمودی را نداریم~~

$$g_2\gg g_1\longrightarrow E_{2n}=0\qquad J_{2n}=g_2E_{2n}\ \text{محدود}$$

و جریان از داخل خود رسانای اول عبور خواهد کرد

مولفه مماسی J_1 صفر است

$$E_{1t}=E_{2t}\longrightarrow J_{1t}=\frac{g_1}{g_2}J_{2t}$$

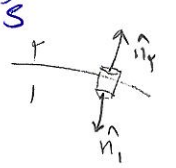
$$g_2\gg g_1\longrightarrow J_{1t}=0\longrightarrow J_1=J_{1n}\qquad \boxed{\vec E_1=E_{1n}\hat n}$$

اگر رسانای دوم رسانای خوبی باشد

$$g_2\gg g_1\to\begin{cases}\vec E_{2n}=0\\ \vec J_{1t}=0\to\vec E_1=E_{1n}\hat n\end{cases}$$

چگالی جریان در محیط اول فقط مولفه عمودی دارد ⇐ میدان E فقط مولفه عمودی دارد

31 $\oint_S D\cdot\hat n\,da=q_f$



$$D_{1n}-D_{2n}=\sigma_f$$

$$\varepsilon_1E_{1n}-\varepsilon_2E_{2n}=\sigma_f$$

$$\varepsilon_1\frac{J_{1n}}{g_1}-\varepsilon_2\frac{J_{2n}}{g_2}=\sigma_f\ \Rightarrow\ \boxed{J\left(\frac{\varepsilon_1}{g_1}-\frac{\varepsilon_2}{g_2}\right)=\sigma_f}\to\hat n=\hat n_1$$

$J_{1n}=J_{2n}=J$ جریان پایا

در محیط هایی که اهمیک باشد و رسانندگی و ε داشته باشیم یک چگالی بار سطحی بین فصل مشترک دو محیط همواره به وجود می‌آید. اگر نسبت گذردهی ها با رسانندگی های دو محیط باهم برابر باشند σ_f صفر است. معمولاً در محیط های طبیعی این دو نسبت برابر نیستند و چگالی بار سطحی روی مرز دو محیط وجود دارد.

$$\frac{g_1}{g_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\longrightarrow\sigma_f=0$$

$$\frac{g_1}{g_2}\neq\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\longrightarrow\sigma_f\neq0$$

در اینجا روی مرز تغییر g داریم و هر محیط اهمیک نیست هر کدام از دو محیط برای خودشان محیط اهمیک هستند ولی روی مرز محیط اهمیک نداریم و $\nabla\cdot E\neq0$ و $\nabla\cdot \underset{gE}{J}=0$

$$\vec\nabla g\cdot E+g\underbrace{\nabla\cdot E}_{\neq0}=0$$

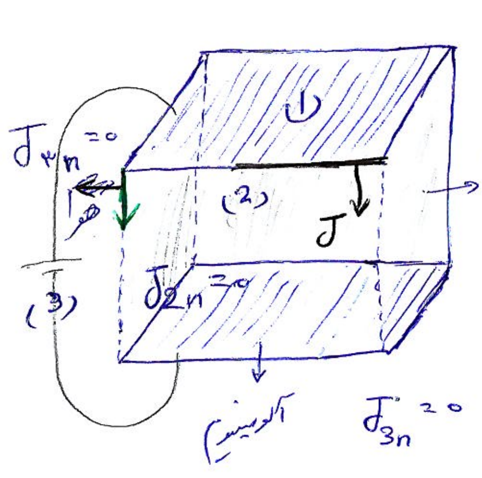
مثال: فرض کنید یک خازن مسطح با دی‌الکتریک داشته باشیم. و داخل یک محیط باشد رسانندگی هوا کم است

$g_{\text{هوا}}=10^{-12}$ ℧/m

آلومینیوم $g\simeq10^{8}$ ℧/m

گرانیت g 10^{4} ℧/m

چون در مورد آلومینیوم و گرانیت چون و محیط وسط 10^4 کوچکتر از آلومینیوم است میدان الکتریکی که روی مرز بین دو محیط ایجاد می‌شود در محیط گرانیت فقط مولفه عمودی دارد یعنی در واقع در محیط وسط بین دو آلومینیوم یک جریان عمودی دارد چون g هوا 10^{16} برابر کوچکتر از گرانیت است



$\vec{E}$ فقط در محیط هوا مؤلفه عمودی خواهد داشت و مؤلفه مماسی وجود نخواهد داشت بین این دو محیط. $E_{3n}=0$

چون معمولاً دو صفحه خازن (آلومینیوم) به یک پتانسیل وصل می‌شود جریان از صفحه بالا به صفحه پایین است و جریانی که در ابتدا وجود دارد به سمت پایین است

چون J پیوسته است و مؤلفه‌های عمودی J پیوسته است بین محیط وسط (گرافیت) و هوا. بین محیط (۲) و (3) مؤلفه عمودی نداریم و چون $J_{2n}=0 \leftarrow$

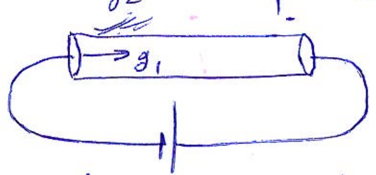
بنا براین J که از بار ρ می‌آید جریانی به سمت بیرون (سمت چپ یا راست) نخواهیم داشت

ولی اگر گرافیت از نظر g قابل مقایسه باشد با الکترودی که استفاده می‌کنیم رو نوعت جریان به سمت بیرون هم می‌تواند نشتی داشته باشد.

$$J_{2n}=J_{3n}$$

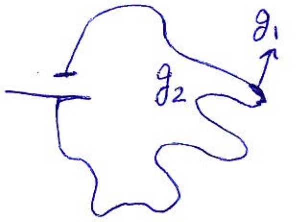
□ در یک سیم چون g_1 (سیم) خیلی بیشتر از g هوا است جریان نشتی به سمت بیرون سیم نداریم

اگر g_2 کاملاً صفر نباشد قطعاً بعضی از بارهاکه دارند جریان پیدا می‌کنند می‌توانند به بیرون نشت پیدا کنند ولی اگر واقعاً $g_2=0$ باشد همه مؤلفه‌ها مماسی دارند عمودی ندارد



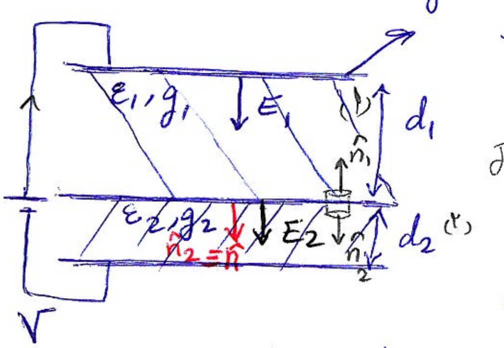
اگر محیط اطراف خلاء باشد $g=0$ باشد هیچ جریان نشتی نخواهیم داشت اما اگر مثلاً هوا باشد سیم لاکی که به باتری وصل می‌کنیم قطعاً چون هوا مولکول دارد یک g غیر صفر دارد بعضی از بارها خارج می‌شوند اما خیلی کوچک و غیر قابل حس کردن هستند.

در هر مسیری و در هر خمی در سیم جریان مسیر خودش را پیدا می‌کند به خاطر g_1 و g_2 (هوا)



مثال: فرض کنید محیط ۱ و ۲ تا ∞ رفته باشند و صفحات را به اختلاف پتانسیل V وصل کرده‌ایم جریان، چگالی بار روی فصل مشترک دو محیط ... ؟ در حالت پایا

ارشد ۹۴



اختلاف پتانسیل بین دو صفحه بالا و پایین مشخص است

$$V=E_1d_1+E_2d_2$$

چون حالت پایا است

$$J_{1t}=0 \qquad E_1=\frac{J_1}{g_1} \qquad E_2=\frac{J_2}{g_2} \qquad J_1=J_2=J$$

قبل از حالت پایا تعدادی بار روی سطح مشترک آنها می‌آید و چگالی سطحی پیدا می‌کند ولی بعد از لحظه‌ای به تعادل می‌رسد همان جریانی که وارد مرز می‌شود خارج می‌شود.

$$\Rightarrow V=J\left(\frac{d_1}{g_1}+\frac{d_2}{g_2}\right)$$

$$\boxed{J=V\frac{g_1g_2}{g_2d_1+g_1d_2}}$$

چگالی جریان در واحد سطح

با این J ، E_1 و E_2 را می‌توانیم پیدا کنیم $E_1=\frac{J}{g_1}$, $E_2=\frac{J}{g_2}$.

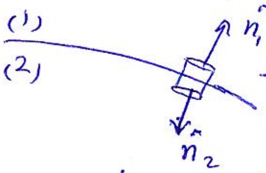
E_1 عمودی است مؤلفه مماسی ندارد E_{2n}

$$\varepsilon_2E_2-\varepsilon_1E_1=\sigma_f$$

$$\varepsilon_2V\frac{g_1}{g_2d_1+g_1d_2}-\varepsilon_1V\frac{g_2}{g_2d_1+g_1d_2}=\sigma_f \rightarrow \boxed{\sigma_f=\frac{V}{g_2d_1+g_1d_2}\left(\varepsilon_2g_1-\varepsilon_1g_2\right)}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$$

$$\vec{D}_2 \cdot \hat{n} - \vec{D}_1 \cdot \hat{n} = \sigma_f$$



$\longrightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$

n ای که اینجا در این فرمول داریم n ای است که به سمت بیرون از محیط 2 باشد اگر به سمت بیرون محیط 1 باشد خلاف هم می‌شود $\hat{n}_1$ و $\hat{n}_2$ را همان عمودی در نظر می‌گیریم که برای جز دوری الکتریک در نظر گرفتیم $\vec{E}_1$ به این دلیل به سمت پایین است که g الکترود بالایی خیلی بیشتر از g_1 (محیط 1) است

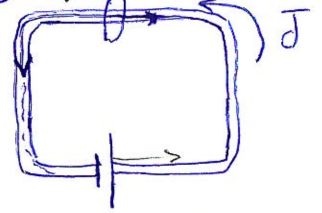
بعضی از باتری‌ها از الکترولیت استفاده می‌کنند و یونیزاسیونی که در محیط به وجود می‌آید و اصل و اساس بارهای اضافی از باتری به وجود می‌آید باتری‌ای که خودش بار یون و الکترون دارد. این گونه باتری‌ها هستند که در مدار این مسئله بارهای اضافی می‌دهند و باعث ایجاد چگالی بار روی سطح مرز مشترک می‌شوند. باتری کاملاً یک بحث کوانتوم مکانیک است و باید از طریق کوانتوم مکانیک روی باتری بحث کرد.

$\vec{J} = g\vec{E}$ میدان پایای ناشی از بار

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \longrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

قائم

$\oint_C \frac{\vec{J}}{g} \cdot d\vec{l} \neq 0 \longleftarrow$ محیط اهمیک



□ اگر یک جریان پایا و میدان الکتروستاتیک در مداری داشته باشیم که از باتری و گرسانا تشکیل شده یعنی در یک مسیر بسته $\oint_C E \cdot dl = 0$ باشد و اگر یک محیط اهمیک داشته باشید

$\vec{J}$ و $d\vec{l}$ همواره هم‌راستا هستند و $\int \vec{J} \cdot dl$ نمی‌تواند صفر شود بنابراین * با میدان‌های الکتریکی که ناشی از بار هست نمی‌توانند یک جریان پایا در این مسیر ایجاد کنید $\oint_C \vec{J} \cdot d\vec{l} = 0$ اگر با مداری که جریان بررسی می‌کنیم تناقض دارد مدار به ما می‌گوید $\vec{J}$ و $d\vec{l}$ هم‌راستا هستند. پس باید یک میدان E دیگری وجود داشته باشد یک منبع (موتور الکتریکی) که کرل آن صفر نیست

این میدان کل است که یک جریان پایایی ایجاد می‌کند در مسیر.

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_e$$

کولنی ← $\vec{E}_c$ ، میدان الکتریکی الکترو موتور ← $\vec{E}_e$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_c = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_e \neq 0$$

اگر از طرفین رابطه انتگرال روی کل مسیر بگیریم:

$$\Longrightarrow \quad \vec{J} = g(\vec{E}_c + \vec{E}_e) \quad , \quad \frac{\vec{J}}{g} = \vec{E}_c + \vec{E}_e$$

$$\oint_C \frac{\vec{J}A}{Ag} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{E}_c + \vec{E}_e) \cdot d\vec{l} = \underbrace{\oint_C \vec{E}_e \cdot d\vec{l}}_{} = \mathcal{E} \neq 0 \qquad \oint_C \vec{E}_c \cdot dl = 0$$

اصلاً میدان ناشی از بار کولمبی نیست

$\vec{E}_e$ می‌تواند میدانی باشد که ما به میدان ناشی از الکترو شیمیایی نسبت می‌دهیم (معادل میدان الکتریکی)

روی حلقه بسته ⟵

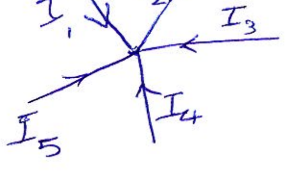
$$\oint_{(C)} JA \underbrace{\left(\frac{dl}{Ag}\right)}_{dR} = \mathcal{E} \longrightarrow \boxed{IR = \mathcal{E}}$$

قانون کیرشهف

مجموع پتانسیل‌هایی که در یک مدار بسته داریم صفر است

$$IR - \mathcal{E} = 0$$

$\int_A \vec{J} \cdot \hat{n}\, da = I$ ، $\hat{n}$ و $\vec{J}$ در یک راستا هستند



$$\boxed{\sum I = 0}$$

⟵ از بقای بار

کیرشهف (1)

$$\boxed{\sum V_i = 0}$$

کیرشهف (2)

از قانون اهم ⟵

چه در مدارها معمولاً پتانسیل‌ها و مقاومت‌ها معلوم هست جریان در هر شاخه؟

در مدارها R ها اگر سری ← جمع

موازی

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \cdots$$

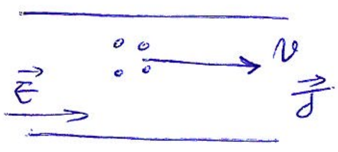
مدل میکروسکپی برای قانون اهم

emperical ← رابطه بین J و I ؟

وقتی در یک محیط جریان پایدار داریم (یعنی تعدادی بار که تحت تاثیر یک $\vec{E}$ ای قرار گرفته اند و حرکت می کنند)
اگر این بارها در خلا بوده باشند شروع می کنند به شتاب گرفتن ← یک شتاب مستقل از محیط

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{E}$$

m جرم بارها



اما اگر در محیط مادی بارها باشند بعد از یک زمان مشخص یک حالت تعادل بوجود می گیرند و یک جریان پایا به وجود می آید
جریان پایا یعنی یک نیروی کند کننده ای وجود دارد که برخلاف $\vec{E}$ به بارها اجازه نمی دهد شتاب بگیرند ← ناشی از هسته های اتمی
این نیرو را به محیط مادی ربط می دهیم متناسب با سرعت ذرات یک نیروی کند شونده به بارها وارد میشه
در حالت پایا شتاب $\frac{dv}{dt}$ صفر است. v ها سرعت) $J=\sum n_i q_i v_i$
بارها سرعت صفر داشته باشند بعد به یک باتری وصل می کنیم به تدریج پایا میشه
زمانی که به حالت پایا می رسه

$$\Longrightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - b\vec{v}$$

$$\int_0^v \frac{\cancel{m}\,d\vec{v}}{qE - b\vec{v}} = \int_0^t \frac{1}{m}dt \longrightarrow -\frac{1}{b}\ln\left(\frac{qE - bv}{q}\right) = \frac{t}{m} \qquad 1 - \frac{bv}{qE} = e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\longrightarrow \boxed{v = \frac{qE}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)}$$

$\tau = \frac{m}{b}$ ثابت زمانی
زمان واهلش

$1 - \frac{1}{e} = 0/63$

$t \to \infty \quad t \sim 10\tau$

$e^{-10} \simeq 0$

$$\frac{\text{سرعت ذره}}{\text{سرعت نهایی}} = 0.63$$

ما بر τ بعد سرعت به سرعت نهایی $\frac{qE}{b}$ می رسد. زمانی که لازم است تا به سرعت نهایی (حالت پایا) برسد $\boxed{\frac{m10}{b} = t = 10\tau}$ است

g را به کمیت های میکروسکپی ربط دادیم

$$v = \frac{qE}{b} = \frac{qE\tau}{m}$$

n تعداد بارها در واحد حجم

$$\boxed{J = \left(\frac{nq^2\tau}{m}\right)E}$$

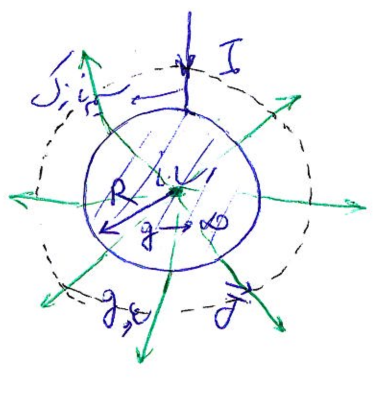
m: جرم بارها ← g

اگر ذرات کاملا دلخواه و بارها و m ها متفاوت داشته باشند

$$\boxed{g = \sum \frac{n_i q_i^2 \tau_i}{m_i}}$$

J تابعیت مکانی دارد اما تابعیت زمانی ندارد (گرچه)

مثال: رسانا را با یک سیم که تقارن محیط را عوض نمی کند به یک باتری وصل کرده ایم
بعد رسانا باردار میشه و چون این یک محیط رسانا است شروع می کنه به سمت بیرون پخش شدن
(ضریب) جریان چون شعاعی است تا ∞ می رود (اطراف ∞ است)
ظرفیت رسانا؟ مقاومت محیط (را در مقابل J ایجاد می کنند!)
چون حالت پایا پیدا کرده همان I ای که وارد می شود از رسانا خارج میشه



$R = ?$

$C = ?$

$R = \frac{V}{I}$ $\quad$ $\vec{g}$ با $\hat{n}$ هم جهت هستند چون

$I \longrightarrow J \longrightarrow E \xrightarrow[\int E\cdot dl]{} \Delta\varphi \longrightarrow V$

$I = JA$

داخل رسانا $E = 0$

$C = \frac{Q}{V} \qquad \sigma = \varepsilon_0 E \longrightarrow Q = \int^R \sigma\, da$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

جواب $RC = \frac{\varepsilon}{g}$

میدان مغناطیسی

آیا میتوان سطح یک رسانا را طوری کرد که هم پتانسیل نباشد؟ بله اگر جریان های الکتریکی روی رسانا ایجاد کنیم تحت شرایطی بار می‌تواند روی سطح رسانا جمع شود.

میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی همیشه باهم هستند. از اوائل قرن ۱۹ اورستد متوجه میدان مغناطیسی شد. میدان مغناطیسی برادر دوقلوی $\vec{E}$ است.

Fe_3O_4 سنگ آهن

حال اگر بارها شروع کنند به حرکت کردن ذره‌ی q با سرعت $\vec{v}$ و q_1 با سرعت $\vec{v}_1$ حرکت کند تجربه نشان می‌دهد این دو به هم نیرو وارد می‌کنند

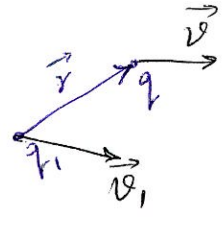
نیروی الکتریکی $\vec{F}_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q\,q_1\,\vec{r}}{r^3} = q\vec{E}$

$$\vec{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,q_1}{r^3}\,\vec{v}\times(\vec{v}_1\times\vec{r})$$

نیرویی که q_1 به q وارد می‌کند

$\vec{v}$: سرعت q

اگر پارامترهای مربوط به بار q را زیر نیرو درنظر بگیریم:



$$\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}_1$$

میدان مغناطیسی

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1}{r^3}\vec{v}_1\times\vec{r}}$$

میدان ناشی از حرکت بار q_1 در محل $\vec{r}$. اگر یکی از این دو ذرات ساکن باشد چنین نیرویی ($\vec{F}_m$) نمی‌خواهیم داشت.

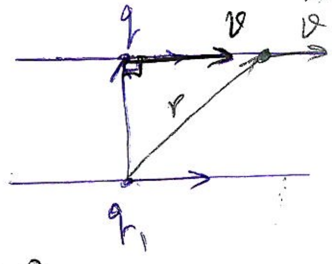
$\vec{E}$ و $\vec{B}$ هر دو متناسب با ضرب بارها و عکس مجذور فاصله اند. تنها تفاوت F_e و F_m، سرعت است که در F_m هست که در F_e نه.

* این نیرو در صفحه $\vec{v}_1$ و $\vec{r}$ قرار دارد که q_1 به q وارد می‌کند

صفحه ای که از دو بردار $\vec{v}_1$ و $\vec{r}$ عبور می‌کند

$$\vec{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,q_1}{r^3}\left[(\vec{v}\cdot\vec{r})\vec{v}_1 - (\vec{v}\cdot\vec{v}_1)\vec{r}\right]$$

F_e روی خط واصل دو بار عمل می‌کند اما برخلاف آن F_m تنها وقتی روی خط واصل دو بار است که $\vec{v}\cdot\vec{r}$ صفر باشد یعنی سرعت ذره q بر $\vec{r}$ عمود باشد.



در یک لحظه از زمان که $\vec{r}\perp\vec{v}$ می‌شه نیرو روی خط واصل بین دو بار است به محض اینکه q جلوتر می‌رود دیگه $\vec{r}$ بر $\vec{v}$ عمود نخواهد بود.

* در میدان الکتریکی نیرویی که دو ذره به یکدیگر وارد می‌کنند برابر با علامت های مخالف (خلاف جهت هم) هستند اما در میدان B چنین رخ نمی‌دهد

اگر نیرویی که q به q_1 وارد می‌کند را بخواهیم در فرمول F_m جای q و q_1 را عوض می‌کنیم (اندیس‌های ۱ را بیرون اندازیم)

در این صورت حالا دیگر نیرویی که q به q_1 وارد می‌کند در جهت $-\vec r$ و v قرار گرفته

$\vec r \longrightarrow -\vec r$

$v \longleftrightarrow \vec v_1$

بنابراین این دو F_m (در دو حالت) هیچ‌گاه با هم برابر نیستند

از نظر علامت و مقدار این دو F_m هیچ رابطه‌ای ندارند.

قانون سوم نیوتن اینجا برقرار نیست!

نیروی مغناطیسی که به بار q وارد می‌شود $\vec F_m^{(q)} \neq F_m^{(q_1)}$ *

☐ وقتی ذره حرکت می‌کند به میدانی که ناشی از حرکت ذرات است یک اندازه حرکت نسبت می‌دهیم که مجموع این ممنتم‌ها بقا دارد و بقای ممنتم مغناطیسی همان قانون سوم نیوتن خواهد بود.

وقتی منبع را در اثر حرکت بارها ایجاد شود یک ممنتم به میدان محیط نسبت می‌دهیم و مجموع ممنتم‌ها بقا خواهد داشت.

$F_m = qv \times B$

** در میدان مغناطیسی چون F_m عمود بر v و B_1 است یعنی $\boxed{\vec F_m \cdot \vec v = 0}$ و وقتی نیرو عمود بر حرکت سرعت ذره شود یعنی کاری روی ذره انجام نمی‌دهد.

میدان مغناطیسی خارجی روی ذره‌ای که در حال حرکت است هیچ کاری انجام نمی‌دهد

و قانون کار و انرژی می‌گوید B سرعت ذره را عوض نخواهد کرد (انرژی جنبشی ذره تغییر نخواهد کرد. ($\Delta K =$ کار)

$\boxed{\frac{N\cdot S}{C\cdot m} = T}$ تسلا

$k = 9\times 10^9$

$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ SI

$F = qv \times B \to N\cdot s / C\cdot m$

در امواج الکترومغناطیسی که میدان الکتریکی و مغناطیسی است با سرعت نور حرکت می‌کنند

$\boxed{\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}}$ عکس مجذور سرعت

$C \sim 3\times 10^8 \, m/s$ ← همان سرعت نور → سرعت موج

C در دل این روابط وجود دارد.

$$\Longrightarrow \vec F_m = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{r^3}\frac{\vec v}{c}\times\left(\frac{\vec v_1}{c}\times\vec r\right)$$

$$\frac{|F_m|}{|F_e|} < \frac{v}{c}\frac{v_1}{c}$$

اگر سرعت ذره اول یا سرعت ذره دوم از سرعت نور خیلی کوچک‌تر باشند F_m نسبت به F_e خیلی کم خواهد شد.

اگر v و v_1 قابل مقایسه با سرعت نور باشند F_e و F_m قابل مقایسه می‌باشند.

* اگر فقط یک نوع بار داشته باشید در سرعت کم نسبت به c، F_m قابل صرف نظر است در مقابل F_e

می‌توان از B در مقابل E صرف نظر کرد اما همواره این طور نیست

مثلاً در محیط‌هایی که بار به صورت رسانشی حرکت می‌کند مانند سیم‌های رسانا از نظر بار الکتریکی یک محیط خنثی است بنابراین $E = 0$ ولی چون بارها در حال حرکت می‌کنند و سرعت بارهای منفی خیلی بیشتر از بارهای مثبت است یک میدان مغناطیسی به وجود می‌آورند و B در این محیط‌ها مهم است.

* روابط برای F_e ، میدان مغناطیسی ... در مرتبه اول نسبیتی درست هستند وقتی بار متحرک را وضعیت نسبیتی‌شان را بررسی کنیم در سرعت‌های بالا این روابط غلط است. اما رابطه‌ای بین B و E بدست می‌آید که B و E در تقریب‌های اول هستند و در تقریب‌های اول رابطه آن‌ها این گونه است ← در وضعیت‌های نسبیتی نیز همین رابطه درست است.

$$\boxed{\vec B = \frac{\vec v_1}{c^2}\times \vec E}$$

این رابطه همواره درست است هم در نسبیتی و هم در نانسبیتی

* ⟸ $\vec E$ همواره بر $\vec B$ عمود است. و $\vec B$ عمود بر سرعتی است که دارد میدان $\vec B$ را ایجاد می‌کند.

در یک دستگاه مختصات می‌توان $\vec{B}$ داشت و در دستگاه دیگر نداشت. مثلاً اگر بار یک ذره در یک دستگاه v باشد در آن دستگاه $\vec{B}$ داریم ولی اگر در یک دستگاه دیگر ذره ساکن باشد B نداریم. تغییر آنکه B در دستگاه ما ساکن است و در دستگاه دیگر چه هست در روابط نسبیتی خواهیم دید. از بار خواهد دید

در الکترومغناطیس پارادوکس هایی است که حتماً در نسبیت حل می‌شود. الکترو بدون نسبیت فایده ای ندارد

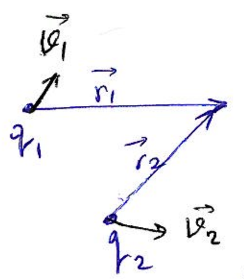
مرور

$$\begin{cases} \vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B} \\ \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_1}{r^3}\vec{v}_1\times\vec{r} \end{cases}$$

نیروی وارد بر q

B ناشی از q_1

میدان مغناطیسی ناشی از n ذره متحرک جمع $B_1 \dots B_n$ است.

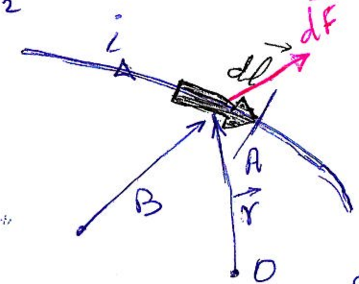


- اگر یک مسیر مشخص (معمولاً سیم) را در نظر بگیریم جریان i در سیم برقرار است تعدادی بارها در حال حرکت اند. نیرویی که به یک بخش کوچکی از این سیم وارد می‌کند $\vec{dl}$ در امتداد جریان است (جهت حرکت بارهای مثبت) در نظر می‌گیریم در dl چند بار به تعداد و نیروی وارد بر آنها را حساب می‌کنیم

$$\vec{dF} = dQ\,\vec{v}\times\vec{B}$$

نیرویی که به عنصر $\vec{dl}$ وارد می‌شود

کل بار داخل $\vec{dl}$



مساحت مقطع: A

n: تعداد بارهایی که در واحد حجم در این حرکت شرکت دارند

$\vec{dl}$ در راستای $\vec{v}$ است

$$dQ = nA|\vec{dl}|q$$

تعداد حامل های بار در واحد حجم

$$\Rightarrow \vec{dF} = nAq|\vec{dl}|\vec{v}\times\vec{B} = nAq|\vec{v}|\vec{dl}\times\vec{B}$$

$|\vec{v}|$ چون جهت $\vec{v}$ و $\vec{dl}$ یکی است و بردار یکه یک جهت است

$$\boxed{\vec{dF} = i\,\vec{dl}\times\vec{B}}$$

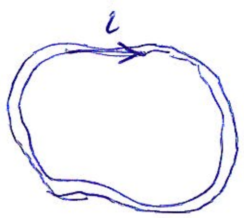
نیروی وارد بر عنصر dl سیم تحت تأثیر میدان خارجی $\vec{B}$

اثرات نقاط دیگر سیم روی عنصر dl را در نظر نمی‌گیریم.

نیروی کل

$$\boxed{\vec{F} = i\int_C \vec{dl}\times\vec{B}}$$

سیم روی منحنی C باشد



$$\vec{F} = i\oint_C \vec{dl}\times\vec{B}$$

اگر B ثابت باشد $\longrightarrow$ $\vec{F} = i\left(\oint_C \vec{dl}\right)\times\vec{B} = 0$

اگر یک سیم بسته با جریان ثابت و میدان خارجی $\vec{B}$ ثابت داشته باشیم نیرویی که از طرف $\vec{B}$ به آن وارد می‌شود صفر است

- گشتاور نیروی F حول نقطه O توسط B

$$d\tau = \vec{r}\times\vec{dF} = i\vec{r}\times(\vec{dl}\times\vec{B})$$

$$\boxed{\vec{\tau} = i\int_C \vec{r}\times(\vec{dl}\times\vec{B})}$$

سیم بسته $\longrightarrow$ $\tau = i\oint_C \vec{r}\times(\vec{dl}\times\vec{B})$

(x,y,z)

$A\times(B\times C) = B(A\cdot C) - C(A\cdot B)$ قاعده بک کب

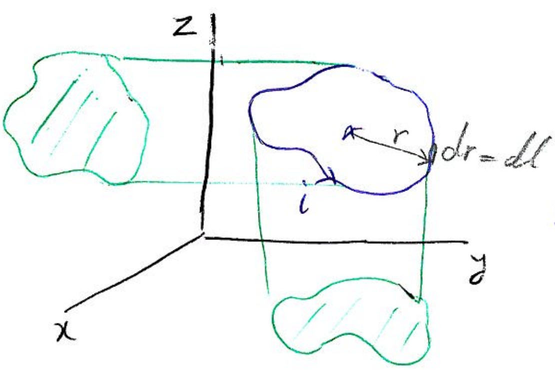
$$\vec{r}\times(\vec{dl}\times\vec{B}) = (\vec{r}\cdot\vec{B})\vec{dl} - (\vec{r}\cdot\vec{dl})\vec{B}$$

$$= (xB_x + yB_y + zB_z)(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) - (x\,dx + y\,dy + z\,dz)(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) = i(B_yA_z + B_zA_y)$$

$$= i(\vec{A}\times\vec{B})$$

مساحت تصویر روی صفحه x و y و z

حاصلضرب بردار A و B



جریان در یک مسیر بسته و B خارجی ثابت (B_x، B_y و B_z ثابت)

B_x بیرون می‌آید $\oint_c z\,dx \pm \oint_c y\,dy \pm \oint_c x\,dx = 0$

$x\,dy\,,\; y\,dx\,,\;\ldots$

جمله دوم حاصل صفر می‌شود جمله اول است که حاصلضرب های تداخلی دارد

مثلاً مؤلفه x ، τ

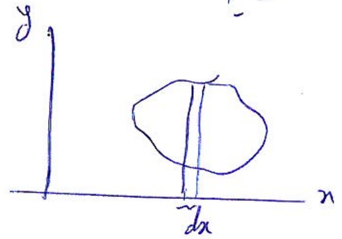
$$\tau_x = i\oint_c (yB_y + zB_z)\,dx = i\left[B_y\oint y\,dx + B_z\oint_c z\,dx\right]$$

$x\,dy$ یا $y\,dx$

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\oint \vec{r}\times\vec{dr}$$

روی مسیر c یعنی منحنی را در صفحه x-y تصور کنیم عمود بر آن سطح یک انتگرال بگیریم

$\oint y\,dx$ یک مساحت است. $\int x\,dy$ نیز مساحت را می‌دهد



$\oint z\,dx$ روی صفحه x-z تصور کنیم ...

مساحت $\int y\,dx$ را با بردارهایش نشان می‌دهیم که بردارهایش عمود بر آن سطح است

پس $\int y\,dx$ در امتداد z است $\int y\,dx = A_z$ علامت $\int y\,dx$ را

1:1 از جهت x شروع کنیم

$x \nearrow y$, $z \leftarrow y$

توسط رابطه راستگرد تعیین می‌کنیم $\Leftarrow$ $\oint_c z\,dx = A_y \quad \oint_c y\,dx = -A_z$

گشتاور وارد بر یک حلقه بسته جریان منفی $\leftarrow$

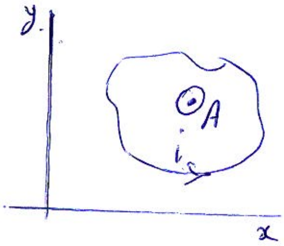
$\Longrightarrow$ در حالت کلی

$$\boxed{\vec{\mathrm{T}} = i\vec{A}\times\vec{B}} = \vec{m}\times\vec{B}$$

$\vec{m}$

بردار مساحت

برداری که برای $\vec{A}$ در نظر می‌گیریم بستگی به جهت i (جریان) دارد جهت بردار $\vec{A}$ را این طور تعیین می‌کنیم که چهار انگشت دست راست را در جهت جریان قرار می‌دهیم جهت شست جهت $\vec{A}$ را می‌دهد.



گشتاور مغناطیسی منفی جریان

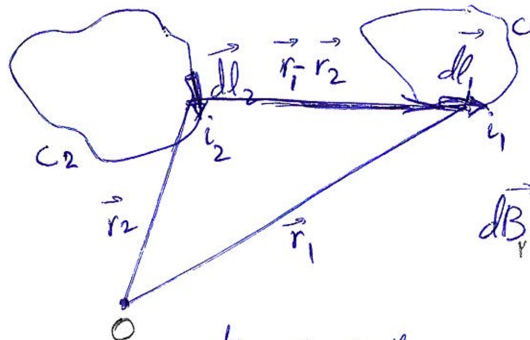
شبیه گشتاور دوقطبی الکتریکی است (دوقطبی مغناطیسی)

بردار $\boxed{\vec{m} = i\vec{A}}$

$$\boxed{\vec{m} = \frac{i}{2}\oint \vec{r}\times\vec{dr}}$$

حلقه دوم به علت جریان i_2 یک میدان روی حلقه اول ایجاد می‌کند

نیرویی که i_2 به i_1 وارد می‌کند؟ عنصری که در $\vec{dl_2}$ حرکت می‌کند روی dl_1 اثر می‌گذارد



$$d\vec{F} = i_1\vec{dl_1}\times\oint_{C_2} d\vec{B}$$

میدانی که dl_2 روی dl_1 ایجاد می‌کند.

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{i_2\,dl_2}_{dq\,v_2}\times\frac{(\vec{r_1}-\vec{r_2})}{|r_1-r_2|^3}$$

$$dq = \frac{dq}{dt}\,dt = i_2\,dt$$

$$\Longrightarrow d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,i_1 i_2\,\vec{dl_1}\times\oint_{C_2}\vec{dl_2}\times\frac{(\vec{r_1}-\vec{r_2})}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|^3}$$

نیرویی که از عنصر dl_2 به dl_1 وارد می‌شود

$$\rightarrow dq_2\,v_2 = i_2\,\frac{dt\,v_2}{dl}$$

جمع می‌زنیم روی تمام dl_1ها

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{c_1}\oint_{c_2} d\vec{l}_1 \times \left(d\vec{l}_2 \times \frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} \right)$$

نیرویی که حلقه اول به حلقه دوم اول وارد می‌کند.

اگر بسط ضرب ها بنویسیم

جمله اول : $$\underbrace{\left(d\vec{l}_1 \cdot \frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} \right)}_{\text{جمله اول} \rightarrow \text{صفر}} d\vec{l}_2 - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|r_1-r_2|^3}$$

اگر یکبار روی c_1 و یکبار روی c_2 انتگرال بگیریم
این جمله اول صفر است

$\cancel{\oint\oint} d\vec{l}_1 \Rightarrow$ $$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{c_1}\oint_{c_2} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}} \rightarrow \boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2}$$

* نیرویی که حلقه اول روی حلقه دوم وارد می‌کند برابر است با نیرویی که حلقه دوم روی حلقه اول وارد می‌کند.

* میدان $\vec{B}$ ای که حلقه دوم در فضا در نقطه r_1 وارد می‌کند را بدست آوریم

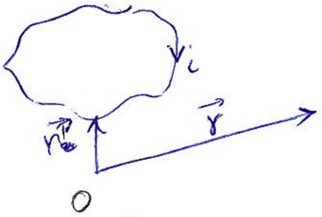
$d\vec{B} = \ldots$

جواب انتگرال مستقل از r_2 ها بدست می‌آید که تابع $(\vec{r})$ است. دلخواه از مبدأ

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 \oint d l_2 \times \frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}$$

1:29

r_2 را به r' تبدیل می‌کنیم — قانون بیوساوار



$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint d\vec{l}' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

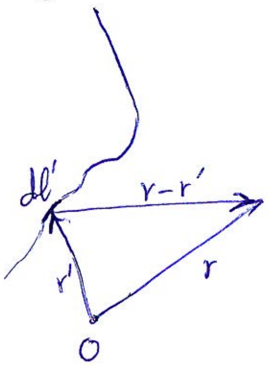
$\vec{F}(\vec{r}')$ $d\vec{l}$ — G

میدان B حلقه‌ای با جریان i در نقطه $\vec{r}$ در فضا نسبت به مبدأ

اگر حلقه بسته هم نباشد از همین قانون بدست می‌آید
برای هر مسیر درست است.

○ چون r متغیر ما در هر نقطه فضا است
∇. نسبت به r است

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{B}(\vec{r})) = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \int d l' \cdot \underbrace{\nabla \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|r-r'|^3}}_{\rightarrow -\vec{\nabla}\frac{1}{|r-r'|} = 0}$$



$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} - \vec{F} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{G}$$

$0 = \nabla \times d l'$

چون ∇ نسبت به r است نه r'

$\Rightarrow$ * $\boxed{\vec{\nabla}_r \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0}$

قانون گاوس در مغناطیس

monopole

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ ، $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$ چون ما بار مغناطیسی نداریم در دنیا تک قطبی مغناطیسی نداریم

معادله اول ماکسول — معادله دوم ماکسول

$$\oint_S E \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0}$$

برای مواد مغناطیسی نیز درست است چون مواد مغناطیسی را می‌توان معادل با یک جریان الکتریکی گرفت

تک قطبی مغناطیسی اگر وارد زمین شود یک آبشاری از ذرات به وجود می‌آورد که می‌توان خیلی چیزها را ببینند ... !

Fermi lab → گفت تک قطبی مغناطیسی دیده‌ایم بعد از مدتی گفتند
یعنی دو نتیجه چیزی دیده‌ایم ...

□ میدان مغناطیسی حلقه با جریان i

$$\vec{r} = z\hat{k}$$

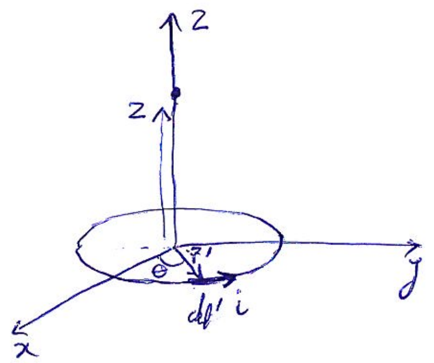
r' را داشتیم dl'

$$\vec{r}' = a(\cos\theta\, \hat{i} + \sin\theta\, \hat{j})$$

مشتق

$$d\vec{l}' = d\vec{r}' = a\, d\theta (-\sin\theta\, \hat{i} + \cos\theta\, \hat{j})$$

تغییرات r' می‌شود dl'
از r' مشتق می‌گیریم



$$\vec B(z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_0^{2\pi} a\,d\theta(-\sin\theta\,\hat i + \cos\theta\,\hat j) \times \frac{(z\hat k - a\cos\theta\,\hat i - a\sin\theta\,\hat j)}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi}\,\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} \times 2\pi\,\hat k$$

$$\boxed{\vec B(z) = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\,\hat k}$$

جلسه 26

به طور کلی در فیزیک اگر یک کمیت در $\vec r$ ضرب برداری شود به آن گشتاور آن کمیت می‌گوییم

$\vec r \times$ کمیت

$\tau = \vec r \times \vec F$

$\vec L = \vec r \times \vec p$ ← گشتاور ممنتم خطی (اندازه حرکت خطی)

$\vec m = \frac{i}{2}\oint \vec r \times d\vec r$

گشتاور مغناطیسی

برای جریان‌هایی که در یک سیم هستند برای حل بار $i\,d\vec l$ را می‌توان به چگالی جریان حجمی تبدیل کرد

اگر در فضا جریانی برقرار باشد می‌توان این را در واحد سطح در نظر گرفت

* اگر دقیق‌تر بگوییم که به جای خط جریان یک جریان حجمی برقرار باشد می‌توانیم در تمام روابطی که نوشتیم به جای $i\,d\vec l$ ، $\vec J\,dv$ را جایگزین کنیم

اگر جریان سطحی باشد می‌توانیم یک چگالی جریان سطحی $\vec K$ جایگزین کنیم

$i\,d\vec l \longrightarrow \vec J\,dv$ حجمی

$dl\,i = J\,\underbrace{A\,dl}_{dv}$

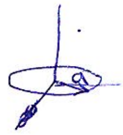
$i\,dl \longrightarrow K\,da$ سطحی

قانون بیوساوار در حالت کلی

$$\boxed{\vec B(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{dv\,\vec J(\vec r') \times (\vec r - \vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3}}$$

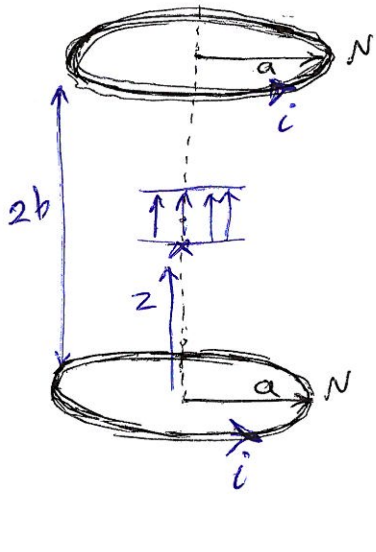
☐ پیچه هلمهولتز

☐ ادامه میدان مغناطیسی حلقه جریان



$$B = \frac{\mu_0 i}{2}\,\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

این پیچه شامل دو پیچه هرکدام N دور است جریان داخل آن‌ها برقرار است. طوری a و b را تعیین می‌کنند که وسط دو پیچه یک میدان یکنواختی برقرار شود



اگر بخواهیم در نقطه به فاصله z از پیچه پایین میدان B را بدست آوریم

$$B = \frac{\mu_0 i N}{2}\,a^2\left[\frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2+(2b-z)^2)^{3/2}}\right]$$

هر دو B را به سمت بالا گرفتیم. جهت جریان در دو پیچه هم‌سو است تا میدان‌های B در نقطه z در یک سو شوند

هدف این است که پیچه‌ها و فاصله را طوری تعیین کنیم که B یکنواخت به وجود آید

اطراف وسط تغییرات B را بررسی می‌کنیم

$$B(z) = B(b) + \frac{\partial B}{\partial z}(z-b) + \cdots + \frac{1}{5!}(z-b)^5 \frac{\partial^5 B}{\partial z^5}$$

با استفاده از بسط تیلور هر چه جملات را بتوانیم صفر کنیم تغییرات B حول آن نقطه کمتر خواهد شد چون هر چه جملات بالاتر برود چون توان آن بالا است ضریب بسیار کوچکی بدست می آید پس هر چه کاری کنیم که این جملات صفر شوند B یکنواخت تری ایجاد شده مشتق B را حساب می کنیم

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \alpha \left[\frac{-\frac{3}{2} \times 2z}{(a^2+z^2)^{5/2}} - \frac{\frac{3}{2}(z-2b)\times 2}{(a^2+(2b-z)^2)^{5/2}} \right]$$

پس بهتر است وسط را انتخاب کنیم

$$\text{if } z=b \longrightarrow \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = -3\alpha \left[\frac{1}{(a^2+z^2)^{5/2}} - \frac{\frac{5}{2}\times 2z^2}{(a^2+z^2)^{7/2}} + \frac{1}{(a^2+(2b-z)^2)^{5/2}} - \frac{\frac{5}{2}\times(z-2b)^2\times 2}{(a^2+(2b-z)^2)^{7/2}} \right]_{z=b} = 0$$

می خواهیم صفر شود

$$\left.\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\right|_{z=b} = -3\alpha \left[\frac{2}{(a^2+b^2)^{5/2}} - \frac{10b^2}{(a^2+b^2)^{7/2}} \right] = 0$$

$$\longrightarrow 2(a^2+b^2) = 10b^2 \longrightarrow 2a^2 = 8b^2 \longrightarrow \boxed{a=2b} \Rightarrow$$

در نقطه وسط $B_z = \frac{\mu_0 N i}{a} \frac{8}{5^{3/2}}$ صفحه ۲۳ ریتز میلفورد

اگر شعاع حلقه ها با فاصله حلقه ها برابر باشد مشتق دوم صفر خواهد شد.

$$\left.\frac{\partial^3 B}{\partial z^3}\right|_{\substack{z=b \\ a=2b}} = 0$$

خود به خود این صفر می شود

اولین جمله غیر صفر مشتق چهارم است

$$\Longrightarrow B(z) = B(b) + \frac{1}{4!}(z-b)^4 \left.\frac{\partial^4 B}{\partial z^4}\right|_{\substack{2b=a \\ z=b}}$$

$$B(z) = B(a/2)\left\{1 - \frac{144}{125}\left(\frac{z-a/2}{a}\right)^4\right\}$$

اگر $z = a/2 + \varepsilon$ که $z - \frac{a}{2} = \varepsilon \sim a/10$

$$\Longrightarrow B(z) \simeq B(a/2)\left\{1 - \frac{144}{125}\left(\frac{1}{10^4}\right)\right\}$$

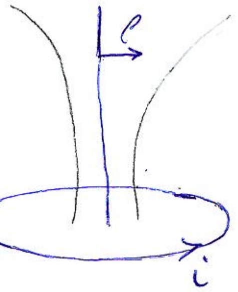
تغییرات B بسیار کوچک است (نسبت به وسط)

بنابراین توانسته ایم در وسط میدان یکنواخت خوبی ایجاد کنیم. در lab ها شعاع پیچه ها 30 سانت است

پیچه بسیار مهمی است در آزمایشگاه های ذرات بنیادی

حرفی از میدان شعاعی نزدیم

وقتی کمی از محور حلقه دور شویم میدان B مؤلفه شعاعی خواهد داشت. از قانون بیوساوار یک سری بدست می آید و سخت است. راه حل ساده البته در فواصل نزدیک به محور از قانون گاوس B یا $\nabla \cdot B = 0$ استفاده کنیم



$$\nabla \cdot B = 0 \longrightarrow \oint_S B \cdot d\vec{a} = 0$$

شار مغناطیسی

در مختصات استوانه ای

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\cancel{\partial B_\varphi}}{\cancel{\partial \varphi}} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

به خاطر تقارن B_φ نداریم (از قانون آمپر)

51

B_z را در نزدیکی محور همان $B(z)$ ای که برای نقاط روی محور بدست آوردیم قرار می‌دهیم و بعد B_ρ را بدست می‌آوریم

در روش تکرار از $B(z)$ و $\nabla \times B$ جواب دقیق بدست می‌آید $B(\rho)$ جدید را در قانون آمپر می‌گذاریم بعد $B(z)$ جدید بدست می‌آوریم و به همین ترتیب تکرار می‌کنیم از یک جایی به بعد که به جوابهای یکسان می‌رسیم دیگر یعنی به جواب دقیق رسیده‌ایم.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\rho) = -\frac{\partial B_z}{\partial z} = +\frac{3\mu_0 i a^2}{2}\frac{z}{(a^2+z^2)^{5/2}} = K(z)$$

تابعیتی از ρ ندارد فقط تابعیتی از z دارد

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\rho) = \rho K(z) \qquad \rho B_\rho = \int \rho K(z)\, d\rho \qquad B_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\rho^2}{2}K(z)$$

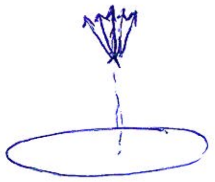
ثابت‌ها بسته به شرایط مسئله است

$$\boxed{B_\rho = \frac{\rho}{2}\,\frac{3\mu_0 i a^2}{2}\,\frac{z}{(a^2+z^2)^{5/2}}}$$

$$\frac{\mu_0 i a^2}{2}\times\frac{3\rho}{2}\,\frac{z}{(a^2+z^2)^{5/2}}$$

$B(\rho)$ در نزدیکی محور متناسب با شعاع میدان مغناطیسی

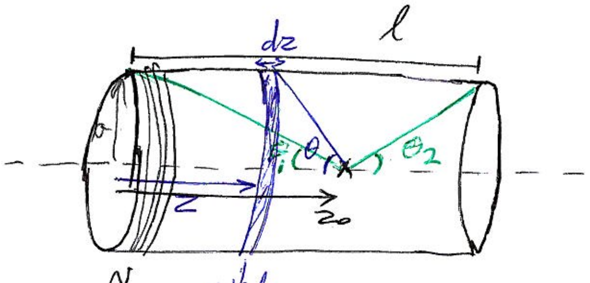
B_ρ نسبت به $B(z)$ چون z یک کمیت محدود است و ρ نسبت به a^2 کوچک‌تر است هر چه ابعاد بزرگتر باشد $B(\rho)$ها کمتر و کمتر می‌شوند پس $B(\rho)$ برای پیچه هلمهولتز تقریب خیلی خوبی است.



پیچه‌ای طولی به طول l و دور آن را سیم‌پیچ کرده‌ایم N دور سیم نازک به صورت فشرده. B_0 را داخل سیم‌پیچ می‌خواهیم بدست آوریم

یک حلقه محیط در فاصله dz در فاصله z از سر پیچه در نظر بگیریم

جریان داخل حلقه dz: $i\,dN =$



N دور $\quad dN = \frac{N}{l}dz$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{N a^2}{l}\int_0^l \frac{dz}{\left[a^2+(z_0-z)^2\right]^{3/2}}$$

$i\,dN$

راه حل ساده

$$\cot\theta = \frac{z_0 - z}{a} \qquad dz = -a(1+\cot^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 i N a^2}{2l}\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_2}\frac{a(1+\cot^2\theta)\,d\theta}{a^3\left[1+\cot^2\theta\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 i N a^2}{2 l a^2}\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_2}\sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 i N}{2l}(\cos\theta_2 + \cos\theta_1)$$

$$-\cos\theta\Big|_{\theta_1}^{\pi-\theta_2}$$

θ_1 و θ_2 معلوم است

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 i N}{2l}\left[\frac{l-z_0}{\sqrt{a^2+(l-z_0)^2}} + \frac{z_0}{\sqrt{a^2+z_0^2}}\right]}$$

فرض کنیم l و z_0 و $l-z_0$ نسبت به a خیلی بزرگ باشند در این صورت می‌توانیم از اینجا B را بسط دهیم

$\frac{N}{l}$ همان تعداد دور واحد طول است

$a \ll z_0 \,,\, l - z_0$

$$B = \frac{\mu_0 i N}{2l}\left[\left(1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{(l-z_0)^2}\right)^{-1/2} + \left(1+\frac{-1}{2}\frac{a^2}{z_0^2}\right)^{-1/2}\right] \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 n i}$$

$n \to N/l$

از طول آخر

$$B = \frac{\mu_0 n i}{}\left(1-\frac{a^2}{2(\ell/2)^2}\right) = \mu_0 n i\left(1-\frac{2a^2}{\ell^2}\right) \Leftarrow z_0 = \ell/2 \text{ اگر}$$

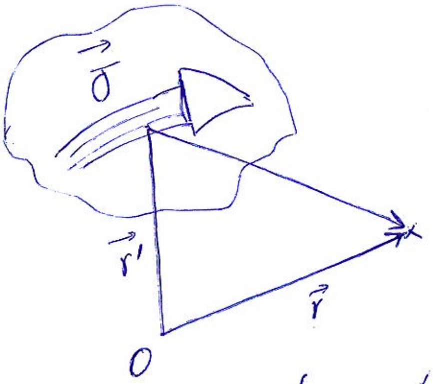
1:10

اگر سیملوله طولش ۱۰ برابر شعاع آن باشد $\frac{1}{50}$ می‌شه جمله بعدی $\frac{1}{50}$ جمله قبلی خواهد بود

اگر $\ell \to \infty$ جملات بعدی صفر خواهند شد و $B = \mu_0 n i$ می‌شود. در نزدیکی‌های انتهای سیملوله این تقریب B

(داخل پرانتز) ضریب نیست و باید از جواب اصلی B استفاده کنیم.

☐ اگر یک چگالی جریان در محیط وجود داشته باشد در یک نقطه دلخواه



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{\underbrace{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}_{\to G}}\,dv'$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = ?$$

$B(\vec{r})$ تابعیت $\vec{r}$ دارد بنابراین مشتق گیری که انجام می‌شود نسبت به $\vec{r}$ است تغییرات روی $\vec{r}$ انجام می‌شه $\nabla_\times$ فقط روی r اثر می‌گذارد و روی r' ها صفر می‌شود

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla_r \times \left(\qquad\right) dv'$$

$F = J(r')$

$$\nabla\times(F\times G) = (\nabla\cdot G)\vec{F} - (\cancel{\nabla\cdot F})G + (\cancel{G\cdot\nabla)\vec{F}} - (F\cdot\nabla)G$$

$\vec{J}(r)$ تابعیت ندارد

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int \vec{J}(\vec{r}')\,\underbrace{\nabla\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}_{4\pi\,\delta(r-r')}\,dv' - \int(\vec{J}(r')\cdot\nabla)\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dv'\right]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\vec{J}(\vec{r}) + ?\ldots$$

$$\text{انتگرال دوم} = \int J(r')\cdot\nabla\underbrace{\frac{r-r'}{|r-r'|^3}}\,dv' = \cancel{\oint_S \left(\frac{r'-r}{|r'-r|^3}\right)(\vec{J}(r')\cdot n')\,da} \to 0$$

∇ بدون پریم را به ∇' تبدیل کردیم

$$\nabla\frac{r-r'}{|r-r'|^3} = -\nabla'\frac{r-r'}{|r-r'|^3} \qquad \nabla'\frac{r'-r}{|r-r'|^3}$$

$$\int_V \big(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{G}}_{J}) + \vec{G}\cdot\vec{\nabla}\big)\underbrace{\vec{F}}_{\frac{r-r'}{|r-r'|^3}}\,dv = \oint_S \vec{F}(\vec{G}\cdot\hat{n})\,da$$

$$- \int\left[\cancel{\nabla'\cdot\vec{J}(r')}\right]\frac{r'-r}{|r'-r|^3}\,dv' = 0$$

اگر جریان پایا باشد

جریان پایا و جایگزیده

اگر جریان جایگزیده باشد و تا ∞ نرفته باشد یعنی حجم را می‌توانیم تا ∞ ببریم اگر در ∞ $J(r)$ دیگه صفر می‌شه و جمله اول صفر می‌شه.

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}(\vec{r})}$$

قانون آمپر

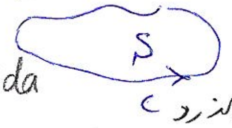
☐ راه ساده‌تر

$$\int_S \nabla\times B\cdot\hat{n}\,da = \int_S \mu_0 J\cdot\hat{n}\,da \overset{\text{استوکس}}{=} \oint_C B\cdot d\ell \Longrightarrow \boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i}$$

قانون آمپر

∇ را در da ضرب کنیم و روی همه سطح جمع بزنیم i می‌شود i کل جریانی است که از S، سطح محصور شده توسط C، می‌گذرد

53 $i = \int_S J\cdot\hat{n}\,da$



معادلات ماکسول

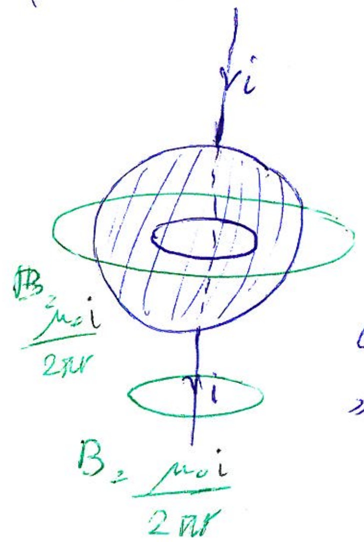
$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

جریان پایا و مانا نیز بوده

$$\begin{cases} \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times B = \mu_0 \vec{J} \end{cases} \qquad \oint_C B \cdot dl = \mu_0 i$$

قانون آمپر در اینجا مشابه قانون گاوس است

مثال: کره ای داریم جریان i به آن وارد می‌شود روی سطح به طور متقارن می‌آید و خارج می‌شود



$B_{\text{داخل}} = 0$

$B_{\text{داخل کره}} = ?$

بیرون

از قانون آمپر به خاطر تقارنی که دارد چون تقارن دارد همه نقاط روی دایره داخل کره باید یکی باشند

پوسته کروی

و داخل آن $i=0$ پس $B=0$ $\mu_0 i$ جریان از روی سطح دارد عبور می‌کند

قبلاً در

$$\nabla \times E = 0 \longrightarrow E = -\nabla \varphi$$

$$\longrightarrow \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{پواسون}$$

قانون گاوس

$$\vec{\nabla} \cdot B = 0 \longrightarrow \int_V \nabla \cdot B \, dv = \oint_S B \cdot da = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

برای B از این خبرها نیست مگر در جاهایی که $J=0$ باشد

باید بشه که هم را نیز ارضا کند

$$\nabla \cdot (\vec{\nabla} \times O) = 0 \Longrightarrow \text{Suppose } \boxed{B = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

اسم $\hat{A}$ را پتانسیل برداری می‌گذاریم

$$\nabla \times B = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla (\cancel{\nabla \cdot A}) - \nabla^2 A$$

یک بردار وقتی به طور یکتا مشخص می‌شود که هم دیورژانس و هم کرل آن مشخص شود

دلخواه $\nabla \cdot A = 0$ فرض می‌کنیم $\Longrightarrow -\nabla^2 A = \mu_0 J \longrightarrow \boxed{\nabla^2 A = -\mu_0 \vec{J}}$

چون μ_0, ϵ_0

$$\nabla^2 \varphi = \frac{-\rho}{\epsilon_0} \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \, dv}{|r - r'|} \Longrightarrow A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \, dv}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

به جای استفاده از قانون بیوساوار در شرایط تقارن ندارد باشید به A تبدیل کنید و کرل بگیرید

27 جلسه

$$\int B \cdot \hat{n} \, da = 0 \qquad \text{شار مغناطیسی } \Phi = \oint_S B \cdot \hat{n} \, da = 0$$

Φ برای یک سطح بسته صفر است

روی سطح دلخواه

وبر

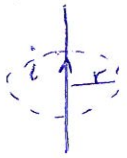
$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \nabla \cdot A = 0 \end{cases}$$

پیمانه کولنی

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \end{cases}$$

$$\oint_C B \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

$$B \, 2\pi r = \mu_0 i$$



$$\longrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\varphi}$$

$$A' = A + \nabla f$$

$$\nabla \times A' = B$$

$$J_M(r') = \nabla \times M$$

پتانسیل برداری

$$\boxed{\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec J(\vec r')\,dv'}{|\vec r-\vec r'|}} \longleftarrow \vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J(r')\times(r-r')}{\underbrace{|r-r'|^3}_{-\nabla\frac{1}{|r-r'|}}}\,dv'$$

$F\times\nabla\varphi$

$$\nabla\times(\varphi \vec F) = \varphi\nabla\times F - \underset{\downarrow\,J(r)}{F}\times\nabla\varphi \longrightarrow \frac{-1}{|r-r'|}$$

نسبت به r

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \underset{\downarrow\ \text{نسبت به } r}{\nabla\times}\left(\frac{J(r')}{|r-r'|}\right)dv' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{|r-r'|}\cancel{\nabla\times J(r')}\,dv'$$

0

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int_V \frac{J(r')}{|r-r'|}\,dv' = \nabla\times\vec A$$

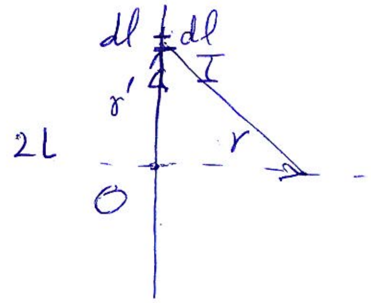
A

در خیلی از موارد $\vec A$ به درد نمی‌خوره

معادلاتی که تعریف کردیم

در بسیاری از مسائل مقدار $\vec A$، ∞ می‌شود و به درد نمی‌خورد.

$J\,dv \longrightarrow I\,dl$ جریان خطی



□ سیم حامل جریان 2l بعد ∞ ← l

dl' در راستای z

$$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,\vec{dl'}}{|r-r'|}$$

چون تابع زوج است

$$= \frac{\mu_0 I\hat k}{4\pi}\int_{-l}^{+l}\frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\mu_0 I\hat k}{2\pi}\log\left(z+\sqrt{z^2+r^2}\right)\Big|_0$$

$$= \frac{\mu_0 I\hat k}{2\pi}\log\left[\frac{L+\sqrt{L^2+r^2}}{r}\right]$$

if $l\to\infty$ $\vec A = \infty$

$L \gg r$ $A = \frac{\mu_0 I\hat k}{2\pi}\ln\left(\frac{2L}{r}\right) \to \infty$

برای سیم محدود در فواصل نزدیک $A\to\infty$ می‌رود و $\vec A$ خوب نیست (با این‌ها سیم‌های طویل) $\vec B$ هایی که ما بدست آوردیم جریان‌ها جایگزیده بودند

معمولاً این شرط را می‌گذاریم

$$\vec A(r\to\infty) = 0$$

با همین $\vec A$ مشکل‌دار می‌توان $\vec B$ را بدست آورد

مختصات استوانه‌ای

$$= \frac{\mu_0 I\hat k}{2\pi}(\ln 2L - \ln r)$$

$$\nabla\times A = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat\varphi$$

$B = \vec\nabla\times\vec A =$

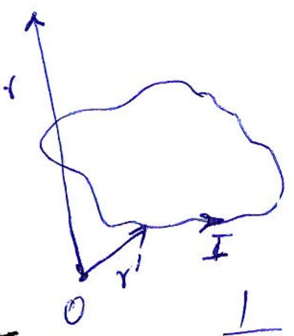
خود A ∞ می‌شود

اما اگر بعضی کمیت‌های ثابت A را کنار بگذاریم در مشتق‌گیری کنار می‌روند و B بدست می‌آید

A برای سیم حلقه اصلاً خوب نیست انتگرال بیضوی پیدا می‌کند

□ یک حلقه دلخواه با جریان I

B در $\vec r$ ؟ با استفاده از $\vec A$



$$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,dl'}{|r-r'|}$$

در مواردی که با ... سروکار داریم بهترین ابزار برای بدست آوردن $\vec A$ است

$$\frac{1}{|r-r'|} = \sum\frac{r_<^n}{r_>^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

$$\nabla^2 A = -\mu_0 J$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int dl' \left[\frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2}\cos\theta + \cdots\right]$$

اگر در فواصل دور $r > r'$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\cancel{\frac{1}{r}\oint dl'} + \oint_c \frac{r'}{r^3}\cos\theta\right\} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\oint (r\cdot r')\underbrace{dl'}_{dr'} + \cdots$$

در مدار بسته

اگر $(\vec{r}'\times d\vec{r}')\times\vec{r} = (\vec{r}\cdot\vec{r}')\,d\vec{r}' - (\vec{r}\cdot d\vec{r}')\,\vec{r}' =$

$\vec{r}$ ثابت است و $\vec{r}'$ ها متغیرند

$$d\left[(\vec{r}\cdot\vec{r}')\vec{r}'\right] = (r\cdot dr')\,r' + (r\cdot r')\,dr'$$

دیفرانسیل کامل

$$= 2(\vec{r}\cdot\vec{r}')\,d\vec{r}' - d\left[(\vec{r}\cdot\vec{r}')\vec{r}'\right]$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\times\left\{\underbrace{\frac{1}{2}\oint(\vec{r}'\times d\vec{r}')}_{\text{مساحت حلقه}}\times\vec{r} + \frac{1}{2}\oint d\left[\cancel{(\vec{r}\cdot\vec{r}')\vec{r}'}\right]_{0}\right\}$$

دیفرانسیل کامل روی $\vec{r}$ که جمع زده شود در مسیر بسته صفر می‌شود

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0\,\vec{m}\times\vec{r}}{4\pi r^3}}$$

$\vec{A}$ یک حلقه در فواصل دور

اولین مرتبه غیر صفر $\vec{A}$

از بقیه جملات صرف نظر می‌کنیم

$$\nabla\times\vec{A} = \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\right) \longrightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\vec{m}\,\cancel{\left(\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right)}_{0} - \vec{m}\cdot\nabla\frac{\vec{r}}{r^3}\right]$$

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$m\cdot\nabla\frac{\vec{r}}{r^3} = m_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) + \cdots = m_x\frac{\hat{i}}{r^3} - 3m_x\frac{x\vec{r}}{r^5} + \cdots$$

$$= \frac{\vec{m}}{r^3} - 3(\vec{m}\cdot\vec{r})\frac{\vec{r}}{r^5}$$

B یک حلقه در فواصل دور

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5}\vec{r}\right]$$

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left(\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)}$$

میدان دوقطبی مغناطیسی (حلقه جریان)

$\vec{m}$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی

برای دوقطبی عبارتی مشابه همین بدست آوردیم

برای فواصل نزدیک $\vec{A}$ بی‌نهایت چه خواهد داشت.

$\nabla\cdot B = 0$

$\nabla\times B = \mu_0 J$

محیطی که در آن جریانهای جایگزیده داریم

B در نقاطی که $J = 0 \Rightarrow \nabla\times B = 0$

در جاهایی که جریان نداریم $\nabla\times B = 0$

میدان پتانسیل

$$\text{if } \nabla\times B = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{B} = -\mu_0\nabla\varphi^*}$$

قرارداد

برای اینکه با پتانسیل $\vec{E}$ مشابه شود

$$\nabla\cdot B = 0 \Rightarrow -\mu_0\nabla^2\varphi^* = 0 \xrightarrow{J=0} \boxed{\nabla^2\varphi^* = 0}$$

در جاهایی که جریان نداریم $J = 0$

اگر φ^* را پیدا کنیم با استفاده از $B = -\mu_0\nabla\varphi^*$ B بدست می‌آید

$\nabla^2\varphi = 0 \Leftarrow J = 0$ در جاهایی که تابع پتانسیل مغناطیسی

$$B = -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)$$

برای دوقطبی مغناطیسی در فواصل دور $J=0 \Longleftarrow$

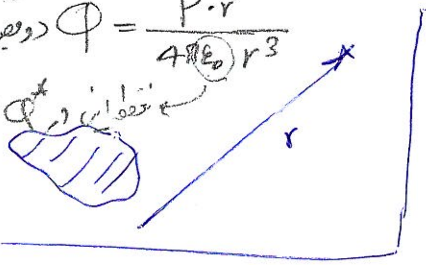
$$\Longrightarrow \boxed{\varphi^* = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}}$$

پتانسیل مغناطیسی دوقطبی مغناطیسی در فواصل دور

یا سطح (و حلقه) کوچک

دوقطبی الکتریکی $\varphi = \dfrac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

سطح تفاوتی در φ^* نیست



□ اگر یک حلقه جریان محدود داشته باشیم

B را جایی که روی جریان نیست بخواهیم

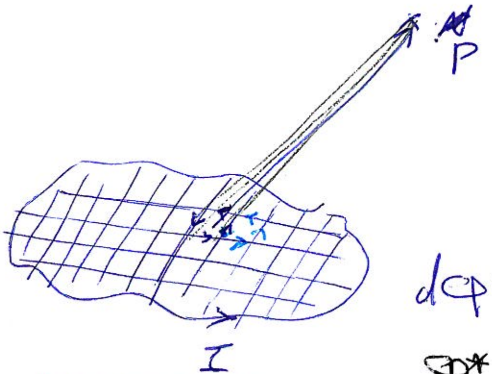
می‌توانیم چون $J=0$ از φ^* استفاده کنیم

I در حلقه را می‌توان به دوقطبی‌های کوچک

تقسیم‌بندی کنیم که هر کدام جریان خلاف ساعتگرد دارند

تمام حلقه‌های کوچک ها در همدیگر را خنثی می‌کنند و فقط

مرز جریان دار می‌شه. هر کدام از حلقه‌ها یک φ^* دارند



$$d\varphi^* = \frac{1}{4\pi}\frac{d\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3} \longrightarrow \varphi^* = \frac{1}{4\pi}I\int\frac{da\,\hat{n}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{I\Omega}{4\pi}$$

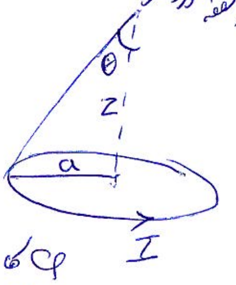
$$\varphi^* = \frac{I\Omega}{4\pi} \qquad m = i\,d_a$$

زاویه فضایی است که از آن نقطه p به عنصر □ را می‌بینیم

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{B} = -\mu_0\frac{I}{4\pi}\vec{\nabla}\Omega} \longleftarrow J=0 \text{ اگر}$$

زاویه فضایی از نقطه مورد نظر

برای حلقه جریان اگر داریم بخواهیم B را بدست آوریم می‌توانیم زاویه فضایی که P را می‌بینیم بدست آوریم و از آن B



$d\Omega$ که φ

$0<\theta<\eta$

$$\varphi^* = \frac{I}{4\pi}2\pi(1-\cos\theta)$$

$$\varphi^* = \frac{I}{2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) \Longrightarrow \vec{B} = -\mu_0\nabla\varphi^* = -\mu_0\frac{\partial}{\partial z}\varphi^*$$

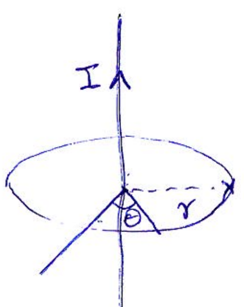
$$\longrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\cancel{4\pi}}\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{z^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\right\}\hat{k} \longrightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}}$$

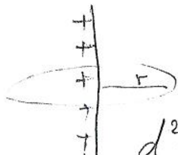
□ φ^* برای خط جریان

φ^* در معادله لاپلاس صدق می‌کند در مختصات استوانه‌ای

در اینجا مانند خط بار اصلاً نیست تقارن‌های φ برای خط بار اساسی دارند

جهت B روی دایره اطراف Z است و تابعی از θ است





$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = 0$$

φ فقط تابعی از r بود

$$\frac{d^2\varphi^*}{d\theta^2} = 0 \longrightarrow \varphi^* = C\theta$$

وقتی $\vec{B}$ را داشته باشیم و φ^* را بخواهیم
φ^* از یک نقطه تا نقطه دیگر

$$d\varphi^* = \nabla\varphi^* \cdot \vec{dr} = -\frac{\vec{B}}{\mu_0}\cdot \vec{dr}$$

نداره

$$\vec{dr} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + dz\,\hat{z}$$

$$\varphi^* = -\frac{i}{\mu_0}\int \vec{B}\cdot\vec{dr}$$

$dr\,\hat{r}$ ندارد

سیم حامل $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta} \longrightarrow \varphi^* = -\dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int d\theta = -\dfrac{I}{2\pi}\theta$

$$\varphi^* = C\theta \Longrightarrow C = \frac{-I}{2\pi}$$

باید با استفاده از جهت $\vec{B}$ ، φ^* را پیدا کنیم. ~~[illegible]~~ φ^* را برای جریان‌های مداری یا خط جریان اصلاً استفاده نمی‌کنند. چون برای آنها φ^* سخت است

در جاهایی که $\vec{J}$ مساوی صفر باشد معمولاً از φ^* برای نقاطی که $\vec{J}=0$ در فاصله‌ای از جریان حجمی

The End ;-)

الکترومغناطیس ۲ دکتر بهمن آبادی بهار ۹۴

جلسه اول

مراجع مشابه مراجع الکترو ۱

زیبایی های این درس در این
است که نمایان می شوند

قانون گاوس
$$\begin{cases}\vec\nabla\cdot\vec D = \rho \\ \vec\nabla\cdot\vec B = 0\end{cases}$$

چون بار مغناطیسی نداریم $\vec\nabla\cdot\vec B = 0$

قانون آمپر $\vec\nabla\times\vec B = \mu_0\vec J$ ×

$\vec E = -\vec\nabla\varphi \leftarrow \vec\nabla\times\vec E = 0$ × ← در وضعیت استاتیک (بارهایی که با سرعت ثابت حرکت می کنند جریان های ثابت داشتیم)

اینجا باید اصلاح شوند (معادلات ماکسول هستند) تا برای همه محیط ها قابل استفاده باشند

دو معادله دوم باید تصحیح شوند (قانون آمپر و $\vec\nabla\times\vec E = 0$)

مشابه اینجا را در مغناطیس هم خواهیم داشت.

$\nabla\times$ پتانسیل برداری $= B$

یک پیمانه برای پتانسیل برداری مشخص کردیم

$\nabla\times A = B$

در جاهایی که $J = 0$ (جریان وجود ندارد) آنگاه $\nabla\times B$ صفر است
می توانیم یک پتانسیل اسکالر φ^* تعریف کردیم

$B = -\nabla\varphi^*$

$\vec J = 0 \longrightarrow \vec\nabla\times\vec B = 0$

$\vec B = -\mu_0\vec\nabla\varphi^*$ ← در دستگاه MKS

$\vec E = -\vec\nabla\varphi$

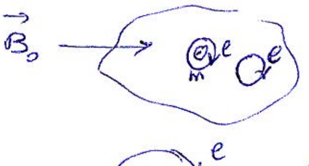
در دستگاه cgs $\mu_0 = 1$ است
بعضی ها μ_0 را نمی گذارند

مرور خواص مغناطیسی مواد

محیطی که داریم وقتی B_0 ای وجود داشته باشد از اتم ها تشکیل شده (الکترون و هسته) برای $\vec E$ یک جابه جایی بار اتفاق می افتد و گفتیم بار قطبیده می شود (یک جابه جایی بین بار اتفاق می افتاد)

در میدان مغناطیسی روی محیط اثر می گذارد مدلی که برای اتم می سازیم این است که مثلاً بار منفی دور بار مثبت می چرخد و یک جریان ایجاد می کند این جریان خودش یک میدان مغناطیسی ایجاد می کند پس برای یک اتم (مثلاً هیدروژن)

برای یک مدار بسته که جریان I در آن است می توانیم یک m تعریف کنیم (گشتاور مغناطیسی)



$$m = IA = \frac{e}{T}\pi r^2 = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{eL}{2m_e}$$

$\overset{r\times p}{L = m_e r v}$ اندازه حرکت زاویه ای

$$= \frac{e\hbar\sqrt{l(l+1)}}{2m_e}$$

$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$

$$m \sim \frac{e\hbar}{2m_e} \sim 10^{-23}\ J/T$$ (تسلا)

$I = \frac{m}{\pi r^2} \sim 10^{-3} A = 1 mA$ یک میلی آمپر

جریان بزرگی در یک اتم برقرار است (چون ها یک مدل نیمه کلاسیک است) که با واقعیت
اما با مقادیر واقعی m از مرتبه m به دست می آید نزدیک اند

هرکدام از اتم‌ها یک m ای دارند اگر e ها در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کنند جریان پادساعتگرد و m به سمت شمال خواهد بود

اگر محیط غیر مغناطیسی باشد طبیعتاً مجموع این m ها صفر می‌شود.

در محیط مغناطیسی گشتاور مغناطیسی که داریم به اتم‌ها نسبت می‌دهیم تحت تأثیر میدان مغناطیسی یک گشتاوری به آنها وارد می‌شود (نیرو وارد نمی‌شود) هر چه $\vec{B}$ خارجی قوی‌تر باشد این اتم‌ها جهت‌مندتر می‌شوند.

مغناطش $\vec{M}$: اگر یک حجم دلخواه که میلیون‌ها اتم در آن است را در نظر بگیریم (آنقدر کوچک و آنقدر بزرگ است) اگر جمع تمام m_i هایی که در داخل ΔV است را جمع بزنیم تقسیم بر ΔV magnetization بدست می‌آید

$$\vec{M} = \frac{\sum_{\Delta V} \vec{m_i}}{\Delta V}$$

هر چه B خارجی بزرگتر (قوی‌تر باشد)، $\vec{M}$ بزرگتر می‌شود

یک رابطه iteration: با رض دیگه B_0 یک میدان مغناطیسی بعد همان میدان (این m ها خودشان یک میدان ایجاد می‌کنند) دوباره یک B ایجاد می‌کند و همین روند تکرار می‌شود. یک سری همگرا خواهد شد.

$$m \to B \to m$$

$$\vec{P} = \frac{\sum_{\Delta V} P_i}{\Delta V}$$

: مانند polarization گشتار دوقطبی الکتریکی در واحد حجم

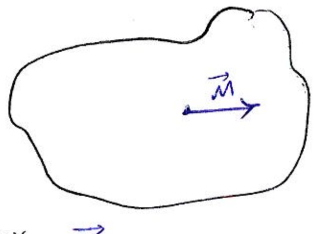
$\boxed{?}$ می‌خواهیم میدان مغناطیسی منتج از میدان خارجی و خود گشتاورها را پیدا کنیم

ابتدا فرض می‌کنیم محیطی با مغناطش M داریم می‌خواهیم B ای که این M ایجاد می‌کند را پیدا کنیم

چون برای ΔV مشخص از مبدأ در فاصله r است تابعی از r است

اگر M تغییرات داشته باشد در داخل ماده می‌تواند معادل با یک جریان باشد $\vec{J}_M$

با J معمولی فرق دارد (J جریان جابجایی است) J_M جابجا نمی‌شود فقط یک حرکت دارد



میدان مغناطیسی ای که ناشی از این ~~محیط~~ هست را مستقیماً تعیین کنیم

۳۵:۴۷

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$k = J_M = \vec{M} \times \hat{n}$$

دراینجا روی سطح

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{B} = \nabla \times A$$

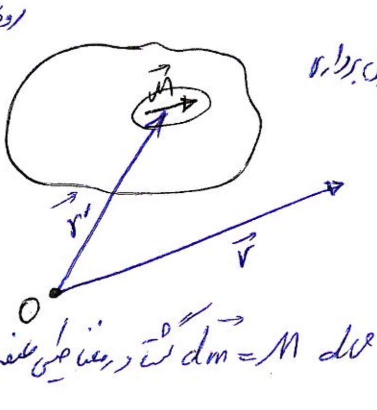
برای یک مدار دلخواه A را پیدا کردیم
این اتم‌های اینجا شبیه یک مدار هستند

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (r - r')}{|r - r'|^3}$$

این مدار

برای یک مدار کوچک با جریان I در محل r

در این ماده‌ای که اینجا داریم در عنصر در فاصله r' A را در نقطه $\vec{r}$ بدست می‌آوریم



پتانسیل برداری

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dm \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|r - r'|^3}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(r') \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|r - r'|^3} dv'$$

$dm = M\, dv$ گشتاور مغناطیسی عنصر حجم dv

$$\frac{\vec{M}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|r-r'|^3}=\vec{M}(\vec{r}')\times\vec{\nabla}'\frac{1}{|r-r'|}=\frac{1}{|r-r'|}\vec{\nabla}'\times\vec{M}-\nabla'\times\frac{M(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{F})=\nabla\varphi\times\vec{F}+\varphi\,\vec{\nabla}\times\vec{F}\quad\Big\}\Longrightarrow\quad A=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int\frac{\nabla'\times\vec{M}}{|r-r'|}dv'-\int\vec{\nabla}'\times\frac{\vec{M}(r')}{|r-r'|}dv'\right]$$

$m=F \qquad \varphi=\frac{1}{r-r'}$

(از قضیه دیورژانس) داریم

$$\int_V\vec{\nabla}\times\vec{F}\,dv=\oint_S n\times\vec{F}\,da' \qquad =\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V\frac{\nabla'\times M}{|r-r'|}dv'-\oint_S\frac{\hat{n}\times\vec{M}}{|r-r'|}da'\right]$$

با $\vec{A}$ مثلی یک شباهت سازی کنیم $\nabla'\times\vec{M}$ جای J $A=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J\,dv'}{|r-r'|}$ میدان پتانسیل برداری

است $\vec{\nabla}'\times\vec{M}$ را می‌توان معادل یک جریان مغناطیسی در نظر گرفت

۵۱:۰۴

پس A را بدست آوردیم به جای $\vec{M}$ دو جریان جایگزین کردیم یکی جریان مغناطیسی $\vec{J}_M$ و یکی جریان سطحی K_M

$\vec{K}_M$ جریان در واحد طول و $\vec{J}_M$ جریان در واحد حجم است

نسبت به $\vec{r}$ است

از A کرل می‌گیریم برای تعیین B

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\times\left(\frac{M(r')\times(r-r')}{|r-r'|}\right)dv'$$

می‌تواند از $\int$ عبور کند

داریم: $\vec{\nabla}\times(\vec{F}\times\vec{G})=(\nabla\cdot G)F-\cancel{(\nabla\cdot F)G}+(G\cdot\nabla)F-(F\cdot\nabla)G$

$$\nabla\times\left(M\times\frac{(r-r')}{|r-r'|^3}\right)=\underbrace{\nabla\cdot\left(\frac{r-r'}{|\ |^3}\right)}_{4\pi\delta(r-r')}M(r')-\cancel{(\nabla\cdot M(r'))}\frac{r-r'}{|\ |^3}+\cancel{\left(\frac{r-r'}{|\ |^3}\cdot\nabla\right)M(r')}$$
$$-(M(r')\cdot\vec{\nabla})\frac{r-r'}{|\ |^3}$$

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V 4\pi\,\delta(r-r')\,\vec{M}(\vec{r}')dv'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{M}(\vec{r}')\cdot\nabla\frac{r-r'}{|r-r'|^3}dv'$$

چون تعریف $\delta(r-r')$ هر جا r' هست r می‌گذاریم

$$=\mu_0\vec{M}(\vec{r})-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{M}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla}\frac{r-r'}{|r-r'|^3}dv'$$

۱:۱

داریم: $\vec{\nabla}(\vec{F}\cdot\vec{G})=(F\cdot\nabla)\vec{G}+F\times\cancel{(\nabla\times\vec{G})}+\cancel{(\vec{G}\cdot\nabla)F}+\vec{G}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F})$ $M=F$, $\frac{r-r'}{|\ |^3}=G$

$\nabla' F$

$$\nabla\times\frac{r-r'}{|r-r'|^3}=0$$

حاصل: $=\mu_0\vec{M}(\vec{r})-\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\int\frac{\vec{M}(\vec{r}')\cdot(r-r')}{|\ |^3}dv'=\mu_0M(r)-\mu_0\vec{\nabla}\varphi^*$

گرادیان بدون پریم از انتگرال بیرون می‌آید

$B=-\mu_0\nabla\varphi^*\quad J=0\quad\nabla\times B=0$ داشتیم زمانیکه $\varphi^*=\frac{1}{4\pi}\int\frac{M\cdot(r-r')}{|\ |}dv'$ φ^* ضد پتانسیل است

3

در هر نقطه $\vec{M}(\vec{r})$ داده شده باشد می‌توان φ^* آن را تعیین کرد و بعد از رابطه بدست آمده B را تعیین کنیم

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) - \mu_0 \vec{\nabla}\varphi^*}$$

میدان مغناطیسی یک محیط مادی که دارای مغناطش $\vec{M}$ است

اگر محیط مادی در خلا باشد $\vec{M}(\vec{r})$ در همان نقطه است و صفر است و $\vec{B}$ ، $\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \nabla\varphi^*$ بدست می‌آید

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \nabla\varphi^*$$ بیرون محیط مادی

$$B(r) = \mu_0 M(\vec{r}) - \mu_0 \nabla\varphi^*$$ داخل محیط مادی

- محیط مادی را کنار بگذاریم

همه محیط‌ها خلاء می‌شود به جای محیط مادی دو جریان در نظر می‌گیریم یعنی $\vec{J}_M$ (حجمی) و K_M (سطحی)

1:09 و محیط را دیگر خلاء در نظر می‌گیریم مانند کاری که برای دی‌الکتریک انجام دادیم که همه محیط خلاء و به جای آن دو چگالی بار حجمی و سطحی در نظر می‌گرفتیم

برای محیط دی‌الکتریک همین رابطه را داشتیم که به جای $\vec{M}$ ، $\vec{P}$ بود (این خیلی شبیه همان چیزی است که برای دی‌الکتریک داشتیم)

☒ حرف‌های تصنعی (مفهوم فیزیکی ندارد)

برای دی‌الکتریک

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$
$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n}$$

بارهای قطبش که فیزیک داشت

حال اگر از شباهت با دی‌الکتریک‌ها استفاده کنیم می‌توانیم یک سری بارهای مغناطیسی تعریف کنیم (در واقعیت بار مغناطیسی نداریم) اما با این محاسبات و بارهای تصنعی مغناطیسی خیلی راحت می‌توانیم پتانسیل را تعیین کنیم. 1:12

$$\varphi^* = \frac{1}{4\pi}\int_V \overset{\vec{F}}{\vec{M}(\vec{r}')}\cdot\underbrace{\frac{r-r'}{|r-r'|^3}}_{\nabla'\frac{1}{|r-r'|}\ \varphi}dv' = \frac{1}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}'\cdot\frac{M(r')}{|r-r'|}dv' - \frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}}{|r-r'|}dv'$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{\nabla}\varphi + \varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$$

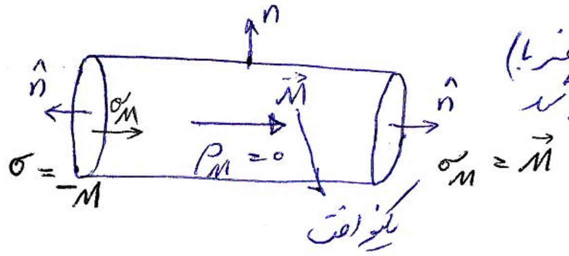
1:17

$$\varphi^* = \frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{\vec{M}(r')\cdot\hat{n}\,da'}{|r-r'|} + \frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\left(-\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}(r')\right)}{|r-r'|}dv'$$

خیلی شبیه پتانسیل الکتریکی است (دی‌الکتریک)

$$\rho_M = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$$ چگالی قطب (حجمی) مغناطیسی

$$\sigma_M = \vec{M}\cdot\hat{n}$$ چگالی سطحی قدرت قطب مغناطیسی



مثلاً فرض کنید استوانه ای با یک مغناطش ثابت داشته باشیم (مثلاً یک آهنربا)
داخل آن هیچ بار مغناطیسی نداریم ρ_M ثابت است اگر $\vec{M}$ یکنواخت باشد
اما σ_M روی سطح قاعده با علامت مخالف هستند مانند این است که دو بار
مغناطیسی در اینجا داریم و یک آهنربا تشکیل داده

تقسیم اختلاف

$$\varphi^* = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho_M \, dv'}{|r-r'|} + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\sigma_M \, da'}{|r-r'|}$$

$$\vec{B}(r) = \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) - \mu_0 \vec{\nabla}\varphi^* = \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\rho_M (\vec{r}-\vec{r}')}{|r-r'|^3} dv'$$
$$+ \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\sigma_M (r-r')}{|r-r'|^3} da'$$

درست مانند میدان الکتریکی معمولی که داشتیم

برای محیط مادی یا از طریق جریانها $\vec{A}$ را پیدا کنیم بعد با $B = \nabla \times A$، B را پیدا کنیم

$$\begin{cases} \vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \\ \vec{j}_m = \hat{M} \times \hat{n} \end{cases} \longrightarrow \vec{A} \longrightarrow \vec{B}$$

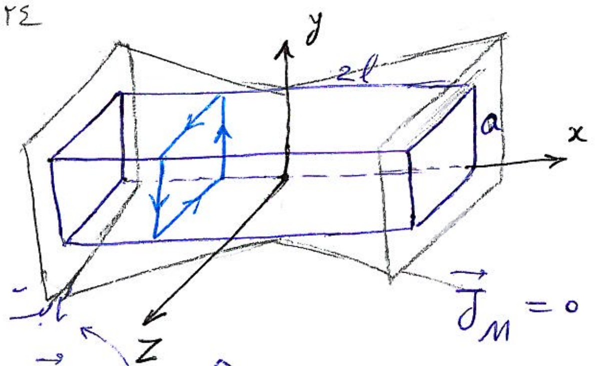
یا با استفاده از چگالی قطب مغناطیسی ρ_M و σ_M، φ^* را پیدا کنیم
بعد $B = \nabla\varphi^*$، B را پیدا کنیم

$$\begin{cases} \rho_M = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M} \\ \sigma_M = \vec{M}\cdot\hat{n} \end{cases} \longrightarrow \varphi^* \longrightarrow \vec{B}$$

1:24

مثال: میله مکعب مستطیل به طول $2l$
با سطح مقطع مربعی به ضلع a. $\vec{J}_M = ?$
$\vec{M}$ متناسب با x در مرکز $\vec{M}$ صفر است
در $\vec{M}$ غیر یکنواختی داریم. a ثابت است

$\vec{j}_m = ?$
$\rho_M = ?$
$\sigma_M = ?$



$\vec{J}_M = 0$

$\vec{M} = bx^2\hat{i}$

مانند اینکه به جای این میله یک سیم پیچ داریم
اما نه بی ازکان است یعنی سیم پیچ هایی که تعداد
دور حلقه با فاصله زیاد شود در وسط هیچ دوری
نیست چون جریان $\vec{j}_m = 0$ در وسط $(x=0)$

1:40 $\vec{j}_m = bx^2$

$$\begin{cases} \rho_M = -2bx \\ \underset{\text{سمت راست}}{\sigma_M} = bl^2 \end{cases}$$

σ_M سمت چپ $= -bl^2$

* نکته بدیهی : درست مثل چیزی که در دی الکتریک داشتیم که مجموع بار قطبش صفر بود اینجا مجموع بار قطب مغناطیسی ها صفر است.

$$\int \rho_M \, dv' + \int \sigma_M \, da' = 0$$

$\rho_M \downarrow -\vec\nabla\cdot\vec M$ $\sigma_M \downarrow \vec M\cdot\hat n$

قضیه دیورژانس $\downarrow \oint_S$

$$\vec B = \mu_0 M(r) - \mu_0 \nabla\varphi^*$$

این میدان ناشی از محیط بود

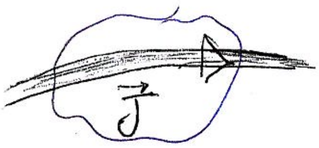
اگر غیر از اینکه محیط مادی موجود دارد یک جریانهای واقعی هم وجود داشتند آنگاه در محیط

میدان مغناطیسی جمع همه اینها است (قانون بیوساوار می‌دارد)

اگر غیر از محیط مادی جریانهای واقعی جاری داشته باشیم ←

$$\Rightarrow \vec B = \mu_0 \vec M(\vec r) - \mu_0 \vec\nabla\varphi^* + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J(r')\times(r-r')}{|r-r'|^3}\, dv'$$

$\vec M$ ، $\vec M$ نهایی است (در روابط) و عبارتها : وضعیت تعادل نهایی رسیده (هر چیزی خودش را انجام داده)



Nayfeh

Electromagnetism

Vector formulas 2019

Cartesian coordinate system

$A \equiv |A| \hat{A}$ $\hat{A}$: for indicating direction

$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \longrightarrow$ unit vectors along x, y & z axes

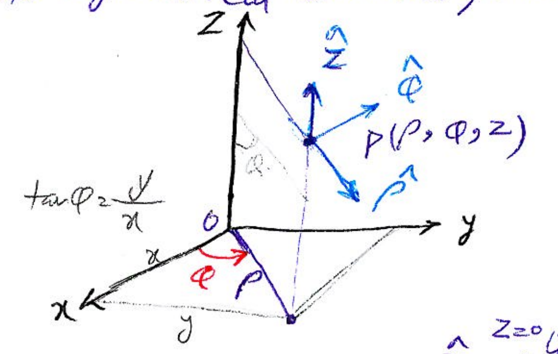
☑ element of volume

Cartesian system : $dv = dx\,dy\,dz = |\hat{x}\cdot(\hat{y}\times\hat{z})|\,dx\,dy\,dz$

cylindrical system: $dv = |\hat{z}\cdot(\hat{\rho}\times\hat{\theta})|\,dz\,d\rho\,\rho d\phi = \rho\,dz\,d\rho\,d\phi$

spherical r, θ, φ : $dv = |\hat{r}\cdot(\hat{\theta}\times\hat{\phi})|\,dr\,r d\theta\,r\sin\theta\,d\phi = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

☑ Cylindrical coordinate system



$Z = \text{constant} \longrightarrow \hat{Z}$ $z=0$ بردار عمود بر صفحه های موازی

z = فاصله از صفحه xy

$\rho = \; " \; = \sqrt{x^2+y^2}$ (مختصات شعاعی استوانه) $\longrightarrow$ بردار واحد عمود بر سطح استوانه تابعی از φ

z = فاصله عمودی از محور $= \rho$

$\phi = \; " \; = \tan^{-1}(y/x)$

φ = زاویه بین صفحه شامل P و محور z، از صفحه xz

* بردارهای واحد جهت ثابتی در فضا ندارند چون آنها به نقطه مورد نظر (P) بستگی دارد.

☑ Solid angel $\Omega = \int d\Omega = \int \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ { θ & φ : the spherial coordinates of the spherical surface element intercepted (قطع کردن)

$d\Omega = \frac{da\cdot\hat{r}}{r^2} = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

if our surface compeletly encloses origin $\longrightarrow \Omega = 4\pi$

" " does not enclose origin $\longrightarrow \Omega = 0$

دایره $\rightarrow dl_{\text{دایره}} = r\,d\theta$

$da_{\text{کره}} = r^2 d\Omega$ ($\sin\theta\, d\varphi\, d\theta$)

* تذکر : $dA = (dr\cdot\nabla)A(r)$

$dr\cdot\nabla = dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}$

☑ Ex: Dirac Delta function: $\delta(r) = 0 \quad r \neq 0 \rightarrow$ a very high singular mathematical function.

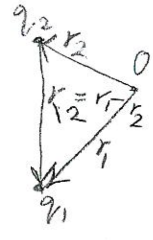
$\int \delta(r')\,dv' = 1$

quarks — have $1/3$ of unit electron charge, or " $2/3\, e$ } objects with zero mass have no charge

electric forces $\longrightarrow$ two body forces $\longrightarrow$ superposition principle P 30

☑ coulomb's law $F_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} = -F_{21}$

$F_q = q \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|r-r_i|^3}$



$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times10^9 \; \frac{N\cdot m^2}{c^2}$ ($c \rightarrow$ coulomb)

force $\longrightarrow 1N = 1kg\cdot m\cdot s^{-2}$

$M^{1/2} L T^{-1} \longrightarrow$ statcoulomb

$\hookrightarrow$ Dim of unit charge

energy $\longrightarrow$ joules $M L^2 T^{-2}$

parallelepiped متوازی السطوح

$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ $\quad 1+\cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$

$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$ $\quad \sec = \frac{1}{\cos}$

Cone مخروط

dyad

نیروی ۲ بر ۱ F_{12}

1

(Nayfeh 1764-3 ...)

!!... for submicroscopic distances also, down to the order of at least 10^{-13} cm we have founded this law to seem true.

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

□ electric field $F_q(r) = E(r)q$ $\quad E(r) = \sum \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|r-r_i|^3}$

the charges are stationary ⟹ electric field ⟶ electrostatic field

□ charge density Charge contained in any volume of space V: $Q = \int_V \rho(r)\,dv$

$\rho(r) = \lim \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv}$ $\quad dq = \rho\, dv$ $\quad dE(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\overbrace{\rho(r')\,dv'}^{dq(r')}}{|r-r'|^3}(r-r')$

چگالی حجمی بار

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(r')(r-r')dv'}{|r-r'|^3}$$

المان در نقطه r' است

electrostatic field at a point r from any dv' containing a charge dq & located at position r' & hence at a distance $r-r'$ from the point of observation.

□ $\sigma = \lim_{\Delta a \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta a} = \frac{dq}{da}$ σ surface charge density ⟹ $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(r')(\vec{r}-\vec{r}')\,da'}{|r-r'|^3}$

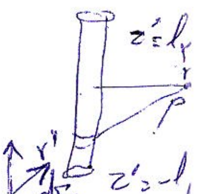
المان سطح $\quad dq = \sigma da$

$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$ $\quad \lambda$: line charge density ⟶ * $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda(r')(r-r')dl'}{|r-r'|^3}$

المان طول

if the charge lies on a curve C

* $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda(r')dl'(r-r')}{|r-r'|^3}$ + سطحی + حجمی

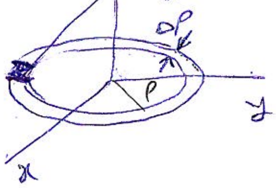


* Line charge distribution متناهی $E = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left[\frac{\rho\hat{z} - l_2\hat{\rho}}{\sqrt{l_2^2+\rho^2}} - \frac{(\rho\hat{z}+l_1\hat{\rho})}{\sqrt{l_1^2+\rho^2}}\right]$

* $z_1, z_2 \to \infty$ ⟹ $E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho}$ (با استفاده از قانون گاوس)

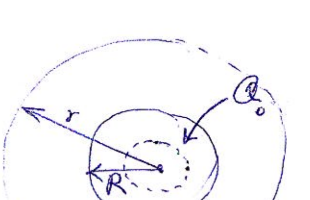
* The E field of a charged Ring $\quad E_z \to 0$ $\quad E = E_z = \frac{2\pi\rho\,\rho\sigma\, z}{4\pi\varepsilon_0(z^2+\rho^2)^{3/2}}$

$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+\rho^2}} = \frac{2\pi\rho\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+\rho^2}}$ $\quad Q = \int dq = 2\pi\rho\,\rho\,\sigma$



□ Gauss's law $\oint E\cdot da = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dq = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

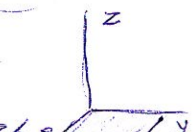
* spherical symmetry: charged sphere, charge density: ρ_0



$E(r>R) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$ $\quad Q_0 = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0$ $\quad$ اگر چگالی بار یکنواخت و ثابت باشد $\quad E = E(r)\hat{r}$

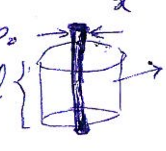
$E(r<R) = \frac{Q_<\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r$ $\quad Q_< = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_0$ $\quad Q_< = \int_0^r 4\pi r'^2\rho(r')dr'$

* Uniformly charged infinite Plane (نامتناهی) $\quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}$ for $z>0$ $\quad E = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}$ $\quad z<0$



E در دو طرف صفحه z=0 ثابت است

* Line charge (خط) $\quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho}$ $\quad \rho > \rho_0$ $\quad E_z = 0$ $\quad$ ρ شعاع استوانه گاوسی



$E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho_0^2}\rho\hat{\rho}$ $\quad \rho < \rho_0$

چگالی حجمی × حجم = بار $\quad \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad 4\pi r^2$

rest

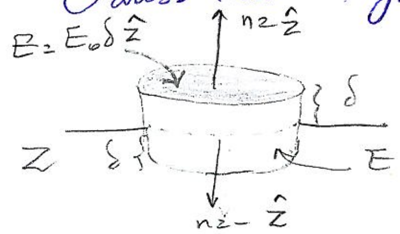
Electromagnetisim

Derivative form of Gauss' law
$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (خطی یا پاره) where ρ is finite

determining a charge distribution for a given electric field:
P 45
whenever a discontinuity in $E \Rightarrow$ the volume charge density must diverge giving rise to a surface (or line, or point) charge density $\rightarrow$ employ Gauss' law integral form around discontinuity E_x: $E = \hat{z}E_0 z \quad 0 < z < l$

$E = k\hat{z} \quad 0 > z \;\&\; z > l$

ناپیوسته $z = l$, $z = 0$ در



for $z = 0$ $\quad \int_S E \cdot da = AE_0\delta - Ak = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Electric potential
$E(r) = -\nabla\varphi(r) \Rightarrow \nabla \times E = 0$ conservative

$\varphi(\infty) = 0 \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{|r-r'|} \qquad \varphi(r) = -\int_\infty^r E \cdot dr$

$E = -\nabla\varphi \Rightarrow$ Surfaces at constant potential ($\varphi(r) = \text{Const}$) ar at every point perpendicular to E at that point. $\rightarrow$ equipotential surfaces

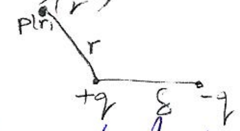
$\varphi(r) - \varphi(r_0) = -\int_{r_0}^r E \cdot dr$

a region that is at a constant potential $\rightarrow$ 〃 volume

inside a conductor $\rightarrow E = 0$

dipole potential $\quad \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, r \cdot \delta = \frac{P \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}(\delta \cdot \nabla)\left(\frac{1}{r}\right)$

dipole potential = differential of $\underbrace{q/4\pi\varepsilon_0 r}_{\text{monopole potential}} = (-\delta \cdot \nabla)\underbrace{\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)}_{\text{monopole potential}}$

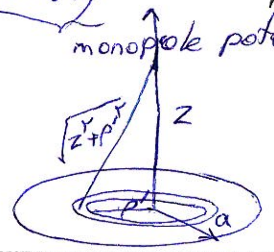


پتانسیل قرص نازک روی محور

$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+z^2} - |z|\right) \qquad E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] \quad z > 0$

پتانسیل پیوسته ولی E چنین نیست.

$E_z = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] \quad z < 0$



خطابار ⟨ ۱ تا ۲ — خیلی بلند نامتناهی

حلقه بر هم / بریر باردار صفحه یا بارپلو / کره توپر تقارن کروی / صفحه تخت نامتناهی / دوقطبی الکتریکی

بدست آوردن E ⟨ $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq\,(\vec{r}-\vec{r}')}{|r-r'|^3}$; $\oint E \cdot da = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$; $E = -\nabla\varphi$

$\varphi = -\int_\infty^r E \cdot dr$

در ناحیه ۳ $\varphi =$ پتانسیل در ناحیه ۲ $\varphi_2 - \int_{R_3}^r E_3 \cdot dr$

$= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \int \frac{Q_1\, dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

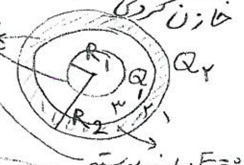
$\varphi_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_3}\right)$

$\varphi_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ $\quad E = 0$ یادآوری: درون پوسته رسانا

پوسته رسانا

خازن کروی

صفحه ۹۲ ترجمه



درون پوسته $E = 0$

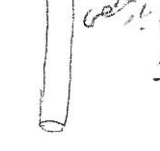
$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\frac{rp\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

$\varphi = \frac{p \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ — (دیدگاه دوم) the same: $\frac{pr\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ — زاویه بین r و δ — کروی $\rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{-2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0$

تذکر: inference: اگر برای تابعی یک ضابطه داشته باشیم و در دستگاه دکارتی باشد اما $\hat{i}$، $\hat{j}$ یا $\hat{k}$ در ضابطه تابع نباشد آن تابع در مختصات کروی یا استوانه‌ای با همان ضابطه است اما فرمول $\nabla\varphi$، $\nabla \cdot$، $\nabla\times$ ... در دستگاه‌های مختلف شکل‌های متفاوت بر حسب $\hat{e}_i$ ها دارد مثلا $\varphi = \frac{p \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ در همه دستگاه‌ها آن تابع همین شکل است (r = فاصله $(+q)$ از $p(r)$ ... $(-q)$)

تذکر: اگر چگالی خطی بار ثابت λ در کل طول به ازای $\rho \le \rho_0$ باشد و اگر شعاع سطح گاوسی را کمتر از ρ_0 بگیریم آنگاه

مثال ۲-۷ نایفه فصل ۲ صفحه ۷۱ ترجمه



چگالی بار خطی جدید $= \dfrac{\rho^2}{\rho_0^2}\lambda \implies Q_{int} = \left(\dfrac{\rho^2 \lambda}{\rho_0^2}\right) l$