دانشگاه تفرش

تحقیق در عملیات I

Operation Research(I)

بهزاد اشجری

کتاب های مرجع

1 – تحقیق در عملیات   حمدی طاها   ترجمه محمدبازرگان

2 – برنامه ریزی خطی   مختار بازارا   ترجمه اسماعیل خرم

3 – تحقیق در عملیات   تالیف : عادل آذر

سایر کتب مرجع عبارتند از :

Operation Research Winston – 4

چند فصل ازاین کتاب تحت عنوان برنامه ریزی خطی توسط آقای رضا فراهانی ترجمه شده است .

5 – 4 جلد کتاب آقای دکتر اصغرپور

1 – برنامه ریزی خطی

2 – کاربرد های برنامه ریزی خطی

3 – تحقیق در عملیات پیشرفته

4 – تصمیم گیری در مدیریت (تحقیق در عملیات)

6 – برنامه ریزی خطی و الگوریتم کارمارکار

تالیف : دکتر آریا نژاد (علم و صنعت)

7 – برنامه ریزی خطی – Gauss ترجمه فائزه توتونیان

کلیه کتابهای فوق در کتابخانه دانشگاه موجود است .

نحوه ارزیابی درس

- امتحان پایان ترم مطابق برنامه آموزشی و ۱۰۰ ٪
- شرکت در کلاس حل تمرین

مقدمه

- تعریف تحقیق در عملیات
- مجموعه ای از تکنیک های کمی در دست مدیران برای تصمیم گیری به منظوراستفاده بهینه از منابع محدود و دردسترس

- در این درس سعی می شود تا سیستم ها ی واقعی تحت فرضیاتی به مدل ریاضی تبدیل شده و مدل ریاضی حل وبحث لازم در مورد آن انجام می شود .

مقدمه

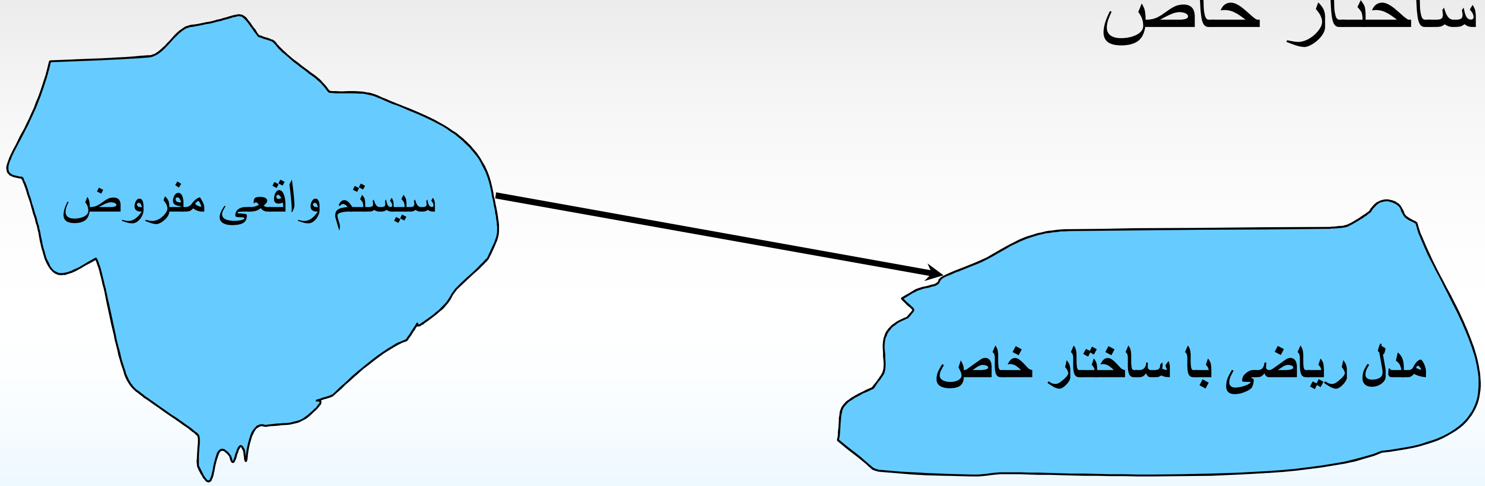
- بخشی از این تکنیک های کمی عبارتند از :
- 1 – برنامه ریزی خطی   2 – برنامه ریزی غیر خطی
- 3 – برنامه ریزی چند هدفی 4 – برنامه ریزی پویا
- 5 – برنامه ریزی عددصحیح 6 – برنامه ریزی احتمالی
- 7 – برنامه ریزی فازی   8 – برنامه ریزی هندسی
- 9 – برنامه ریزی کسری   10 – شبیه سازی
- 11 – تئوری صف   12 – برنامه ریزی مارکوفی

تاریخچه

- این درس تحت عنوان تحقیق در عملیات نظامی بوده است .
- در سال های 1920(جنگ جهانی اول) انگلیس ها پایه گذار آن بوده اند و در سال 1940 (جنگ جهانی دوم) آمریکایی ها این مباحث را به صورت گسترده مطرح و در نیروی دریایی بخوبی از آن استفاده کرده و به نتایج خوبی رسیدند.
- از آنجائیکه در جنگ محدودیت نیروی انسانی ، مهمات ، تجهیزات و ... و جود داشت و می خواستند با توجه با این محدودیت ها از این منابع بهترین استفاده صورت بگیرد .
- لذا این تکنیک ها توسعه یافت و امروزه در صنعت ، خدمات ، اقتصاد ، بازرگانی و ...... استفاده زیادی می شود .

مدل سازی

- کاری را که کلیه مدل های کمی انجام می دهند عبارت است از :
- تبدیل یک سیستم واقعی مفروض به یک مدل ریاضی با ساختار خاص



ساختار مدل ریاضی

- این مدل از 2 بخش زیر تشکیل شده است :
- 1 - تابع هدف Objective Function
- مدل ساز باید با استفاده از تعریف متغیر های تصمیم گیری هدف سیستم را در قالب یک تابع ریاضی از متغیرهای تصمیم گیری بیان کند .

$$Max \quad Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$Min$$

مدل سازی

- 2 – محدودیت ها Constraints
- برای دستیابی به هر هدفی باید منابع مصرف شوند . این منابع محدود می باشند . بنابراین مدل ساز باید مصرف هر منبع را در قالب یک تابع ریاضی از متغیر های تصمیم گیری در قیاس با میزان منبع دردسترس به صورت یک معادله یا نامعادله بیان کند .

$$\geq$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i$$

$$=$$

مدل سازی

- بنابراین داریم :

$$Max \quad or \quad Min \qquad Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$st: \qquad\qquad \geq$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i$$

$$i = 1,2,3,\ldots,m \quad =$$

مدل سازی

- اگر f و g ها توابعی خطی باشند . مدل را مدل خطی یا مدل برنامه ریزی خطی گویند (Linear Programming)
- درکل ، برنامه ریزی خطی بر روی 4 فرض استوار می باشد.

- 1– تناسب   2- جمع پذیری   3 – بخش پذیری   4 – معین بودن

مدل LP

$$Max \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$st: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m$$

$$Max \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$st: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$

فرم ماتریسی مسئله LP

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Max \quad Z = CX$$

$$st: \qquad AX \le b$$

مثال (تولید)

- کارخانه ای 2 نوع محصول تولید می کند برای ساخت این دونوع محصول از 2 ماده اولیه A و B استفاده می کند ، حداکثر میزان در دسترس از این مواد به ترتیب 6 و 8 واحد می باشد . چنانچه میزان مصرف این مواد در محصولات بشرح جدول زیر باشد و سود حاصل از فروش هر واحد محصول به ترتیب 3 و 2 واحد پول باشد . مسئله را در قالب یک مسئله LP به گونه ای مدل سازی کنید تا ماکزیمم سود عاید گردد .

محصول

	1	2
A	1	2
B	2	1

مثال(تولید)

فرض کنید x_i میزان محصول تولیدی i باشد $i = 1,2$

مسئله به صورت زیر مدل سازی می گردد :

$$\begin{aligned}
Max \quad Z &= 3x_1 + 2x_2 \\
st: \quad x_1 + 2x_2 &\le 6 \\
2x_1 + x_2 &\le 8 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

مثال 2 (تولیدی)

- در مثال قبلی اگر واحد بازاریابی اطلاعاتی به صورت زیر را در اختیار قرار دهد مسئله را مجددا مدل سازی کنید .
- - بازار فروش محصولات نشان میدهد که حداکثر تقاضا برای محصول 2 ، 2 واحد است . $x_2 \leq 2$
- - همچنین بازار فروش محصولات نشان می دهد که حداکثر اختلاف تقاضا ی محصول 1 از محصول 2 ، یک واحد است .

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

مثال 2

$$Max \quad Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$st:$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال (برنامه ریزی تولید)

- کارخانه ای رول های 20 سانتی چسب نواری درست می کند و براساس سفارش مشتری آن ها را در اندازه های مختلف برش داده و تحویل می دهد . اخیرا سفارشی به صورت زیر به کارخانه رسیده است ، می خواهیم برنامه تولید را مشخص کنیم .

سفارش مشتری

تعداد	عرض رول در خواستی
100	5
200	7
300	9

برنامه ریزی تولید

- تعریف متغیر تصمیم :
- x_i تعداد رول هایی که با شیوه i سفارش داده می شود.
- بنابراین انواع شیوه های برش به شرح جدول زیر می باشد:

شیوه های برش

عرض درخواستی	1	2	3	4	5	6
5	**0**	**2**	**2**	**4**	**1**	**0**
7	**1**	**1**	**0**	**0**	**2**	**0**
9	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**2**
ضایعات هر رول	**4**	**3**	**1**	**0**	**1**	**2**

برنامه ریزی تولید

- مدل LP مسئله به صورت زیر است :

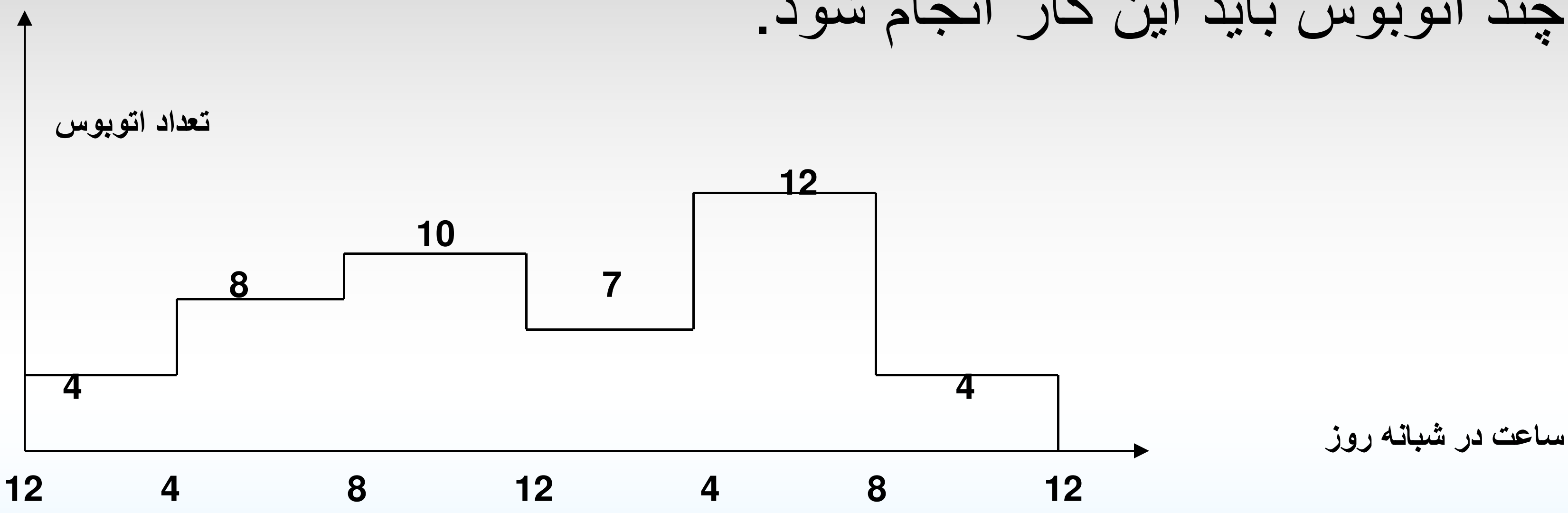
$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 \\
&st: \qquad 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 \geq 150 \\
&\qquad x_1 + x_2 + 2x_5 \geq 200 \\
&\qquad x_1 + x_3 + 2x_6 \geq 300 \\
&\qquad x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

- اگر y_1 میزان رول های اضافه برنیاز 5 سانتی باشد داریم :

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 + 5y_1 + 7y_2 + 9y_3 \\
&st: \qquad 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 - y_1 = 150 \\
&\qquad x_1 + x_2 + 2x_5 - y_2 = 200 \\
&\qquad x_1 + x_3 + 2x_6 - y_3 = 300 \\
&\qquad x_i, y_i \geq 0
\end{aligned}
$$

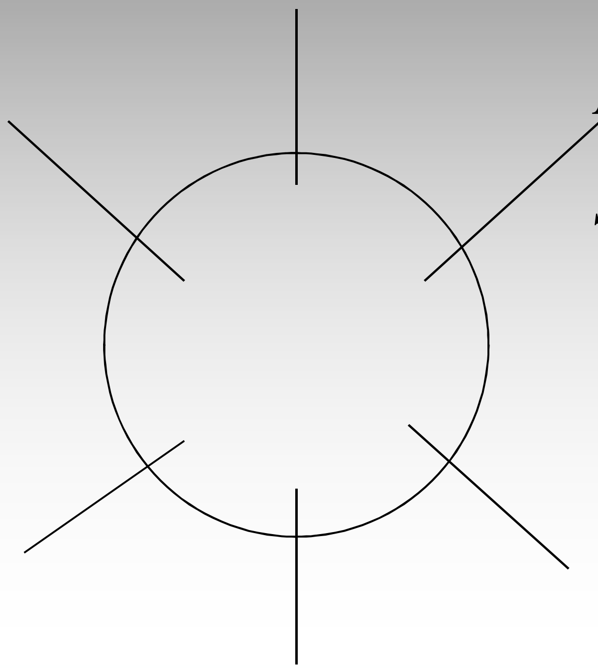
مثال برنامه ریزی ترافیک

- سیستم اتوبوسرانی شهری مورد مطالعه قرار گرفته است در مورد یک خط اتوبوسرانی اطلاعاتی به صورت زیر جمع آوری شده است .اگر هر اتوبوس کارخود را در یکی از6 پریود 4 ساعته در شبانه روز شروع کند و موظف باشد تا 8 ساعت به طور متوالی کارکند . حداقل با چند اتوبوس باید این کار انجام شود.



مثال (ترافیک)

- x_i تعداد اتوبوس هایی که کار خود را در پریود i ام شروع بکارمی کنند.



$$Min\ Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{aligned} st: \quad & x_1 + x_6 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_2 + x_3 \geq 10 \\ & x_3 + x_4 \geq 7 \\ & x_4 + x_5 \geq 12 \\ & x_5 + x_6 \geq 4 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

مسئله مونتاژ

- محصولی از دو قطعه مونتاژ می گردد . دو ماشین می توانند هر یک ازاین دو قطعه را تولید نمایند. اگر نرخ تولید این ماشین ها برای ساخت این قطعات به صورت زیر باشد، و میزان زمان در دسترس از این دو ماشین در هفته به ترتیب 80 و 100 ساعت باشد . برنامه تولید را با هدف ماکزیمم شدن محصول مونتاژ شده مشخص کنید.

سرعت تولید(تعداد درساعت)

	قطعه 2	قطعه 1	
	10	15	**ماشین 1**
	8	18	**ماشین 2**

مسئله مونتاژ

- x_{ij} میزان ساعتی را که ماشین i ام در اختیار قطعه j ام قرار می دهد.

$$Max \quad Z = Min\{15x_{11} + 18x_{21} \ , 10x_{12} + 8x_{22}\}$$

y

$$st: \quad x_{11} + x_{12} \le 80$$

$$x_{21} + x_{22} \le 100$$

$$x_{ij} \ge 0$$

مسئله مونتاژ

- اگر مقدار Min تابع هدف را y بنامیم خواهیم داشت :

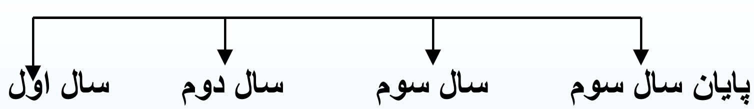
$$
\begin{aligned}
Max \quad & Z = y \\
st: \quad & 15x_{11} + 18x_{21} \geq y \\
& 10x_{12} + 8x_{22} \geq y \\
& x_{11} + x_{12} \leq 80 \\
& x_{21} + x_{22} \leq 100 \\
& y, x_{ij} \geq 0
\end{aligned}
$$

مسئله سرمایه گذاری

- شخصی 100000 واحد پول دارد و می تواند در دو طرح سرمایه گذاری کند.طرح A یکساله است و به ازاء هر واحد پول 0.7 عایدی دارد ، طرح B دوساله است و به ازاء هر واحد پول 2 واحد پول عاید می کند . در یک دوره سه ساله بهترین نحوه سرمایه گذاری چگونه خواهد بود ؟
- x_{ij} میزان پولی را که در سال i ام در طرح j ام سرمایه گذاری می توان کرد

$$i = 1,2,3$$

$$j = A, B$$

- 

مسئله سرمایه گذاری

- ابتدا محدودیت ها را می نویسیم .
- برای ابتدای هر سال محدودیت سرمایه گذاری را می نویسیم.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = 1.7x_{3A} + 3x_{2B} \\
&st: \\
&x_{1A} + x_{1B} \le 100000 \\
&x_{2A} + x_{2B} \le 1.7x_{1A} \\
&x_{3A} \qquad\quad \le 1.7x_{2A} + 3x_{1B} \\
&\qquad x_{ij} \ge 0 \quad \forall i, j
\end{aligned}
$$

روش های حل مسئله LP

- سه روش برای حل مسئله LP ارائه شده است :
- ۱ – روش ترسیمی Graphical Method
- ۲ – روش جبری Algebric Method
- ۳ – روش الگوریتمی سیمپلکس Simplex Method

روش ترسیمی

- این روش مختص مسائل ۲ متغیره می باشد.
- مثال تولیدی که قبلا به آن اشاره شد یک مثال دو بعدی یا دو متغیره می باشد ، لذا با روش ترسیمی قابل حل است :
- در مسائل دو متغیره تابع هدف و محدودیت ها هر یک معادله خط می باشند. هر خط در صفحه ۲ بعدی صفحه را به دو بخش تقسیم می کند . برای مثال مسئله مدل سازی شده را رسم می کنیم :

مثال

$$Max \quad Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$st:$$

$$1) \qquad x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2) \qquad 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$3) \qquad -x_1 + x_2 \leq 1$$

$$4) \qquad x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ابتدا از محدودیت ها شروع میکنیم :

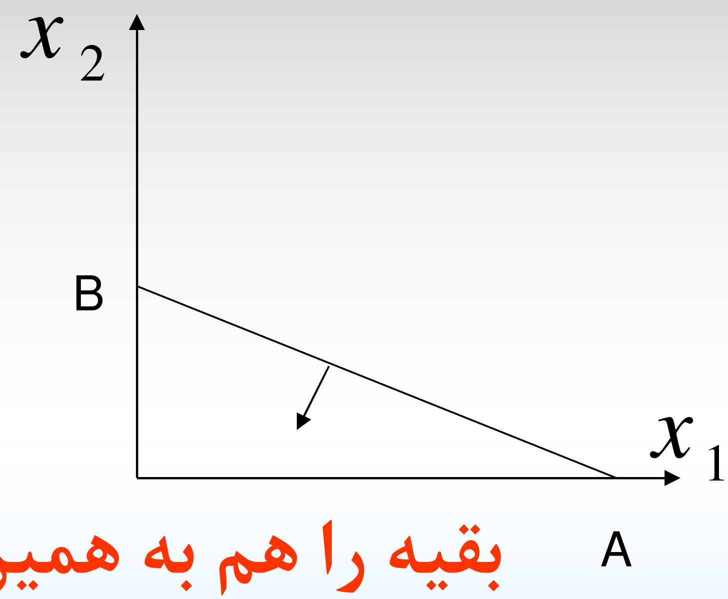
از بالا به پایین یا از پایین به بالا یا به هر ترتیبی که دلتون بخواهد .

به طور مثال برای رسم محدودیت اول داریم :

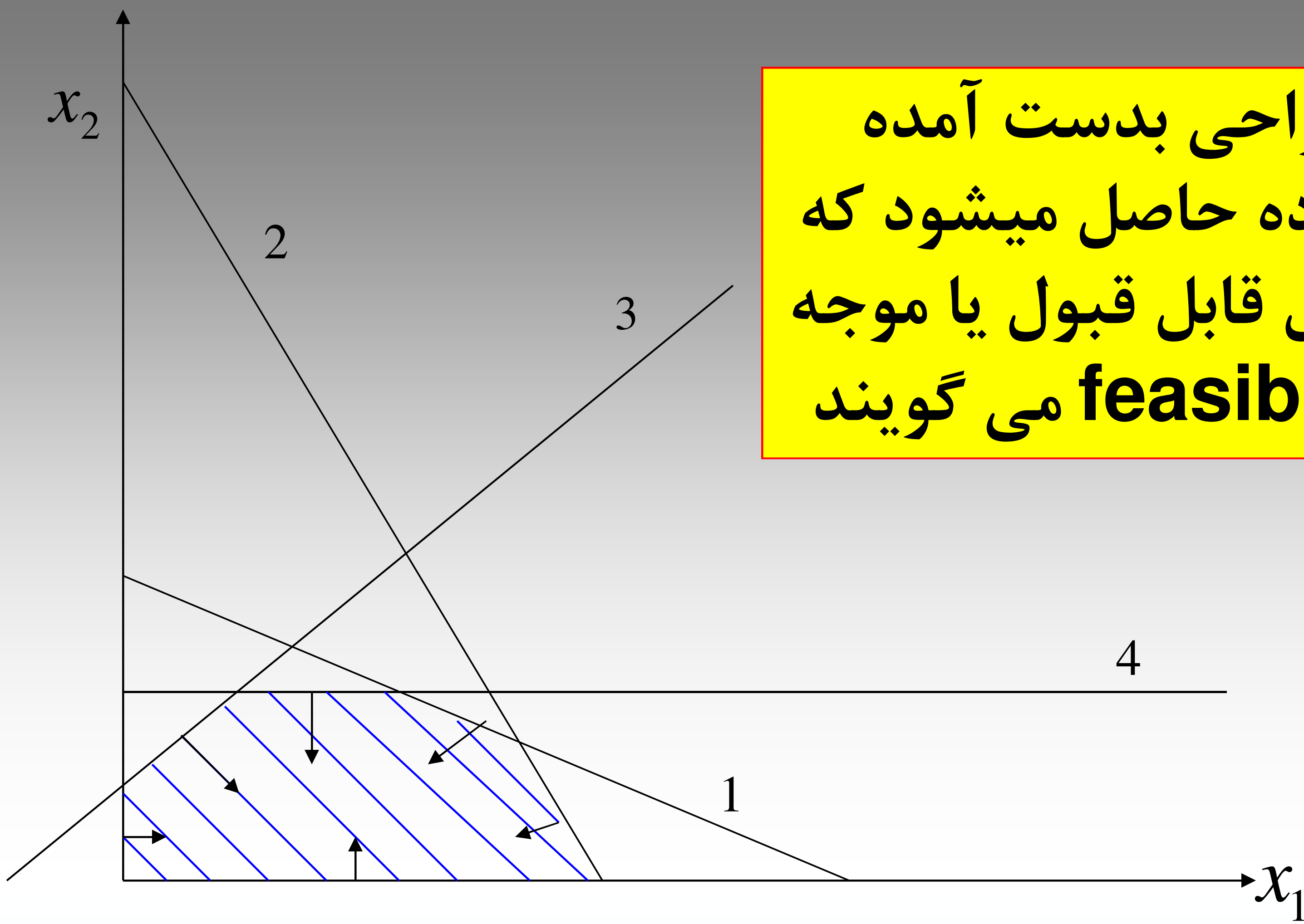
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 3 \qquad B$$

$$x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 6 \qquad A$$



بقیه را هم به همین شکل رسم می کنیم.



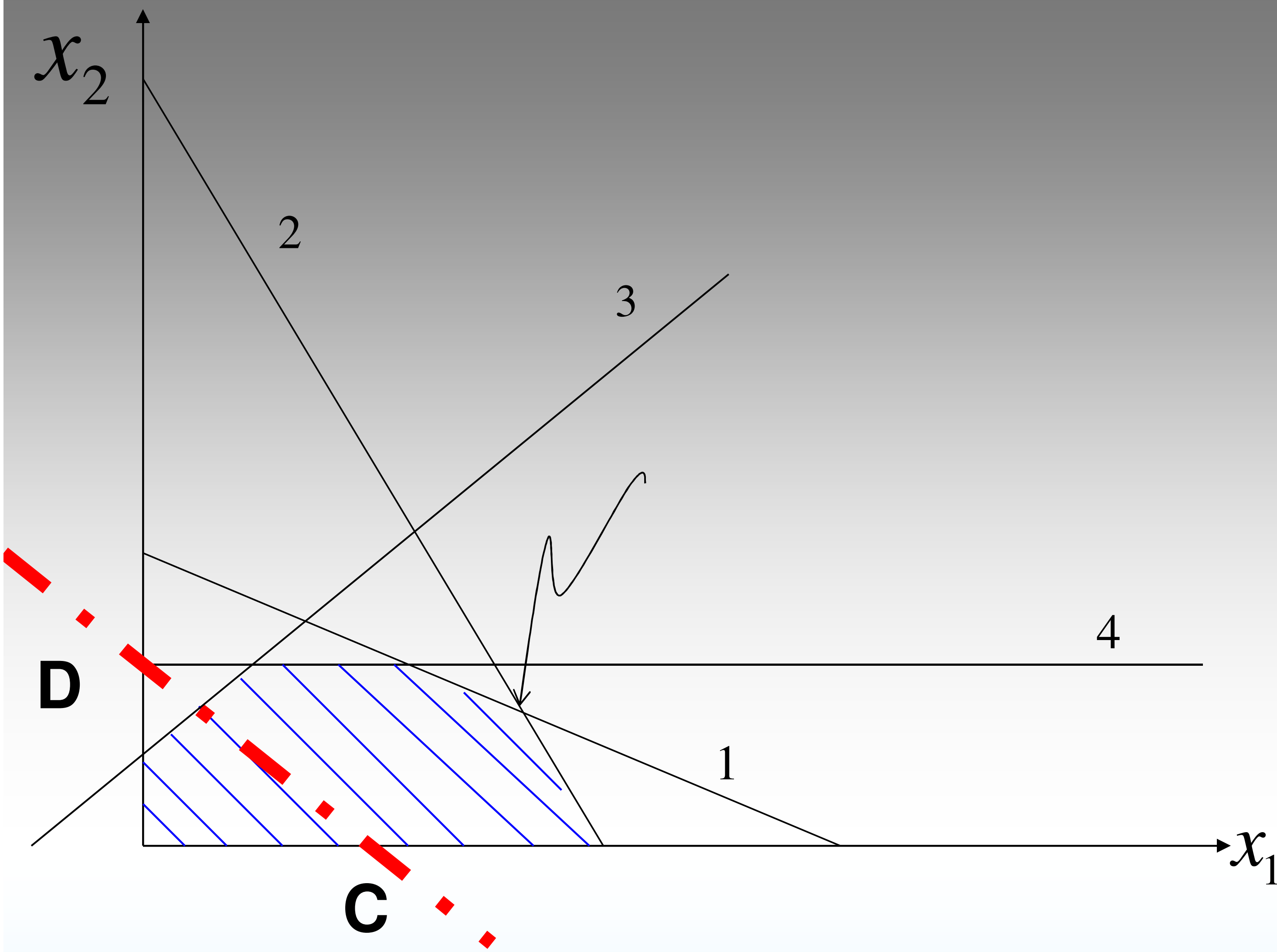
از اشتراک نواحی بدست آمده ناحیه هاشور زده حاصل میشود که به آن فضای حل قابل قبول یا موجه یا شدنی یا feasible می گویند

حال برای رسم تابع هدف : ۲ روش داریم . روش اول تابع هدف را برابر یک مقدار دلخواه(z=6) قرار داده و سپس آن را رسم می کنیم:

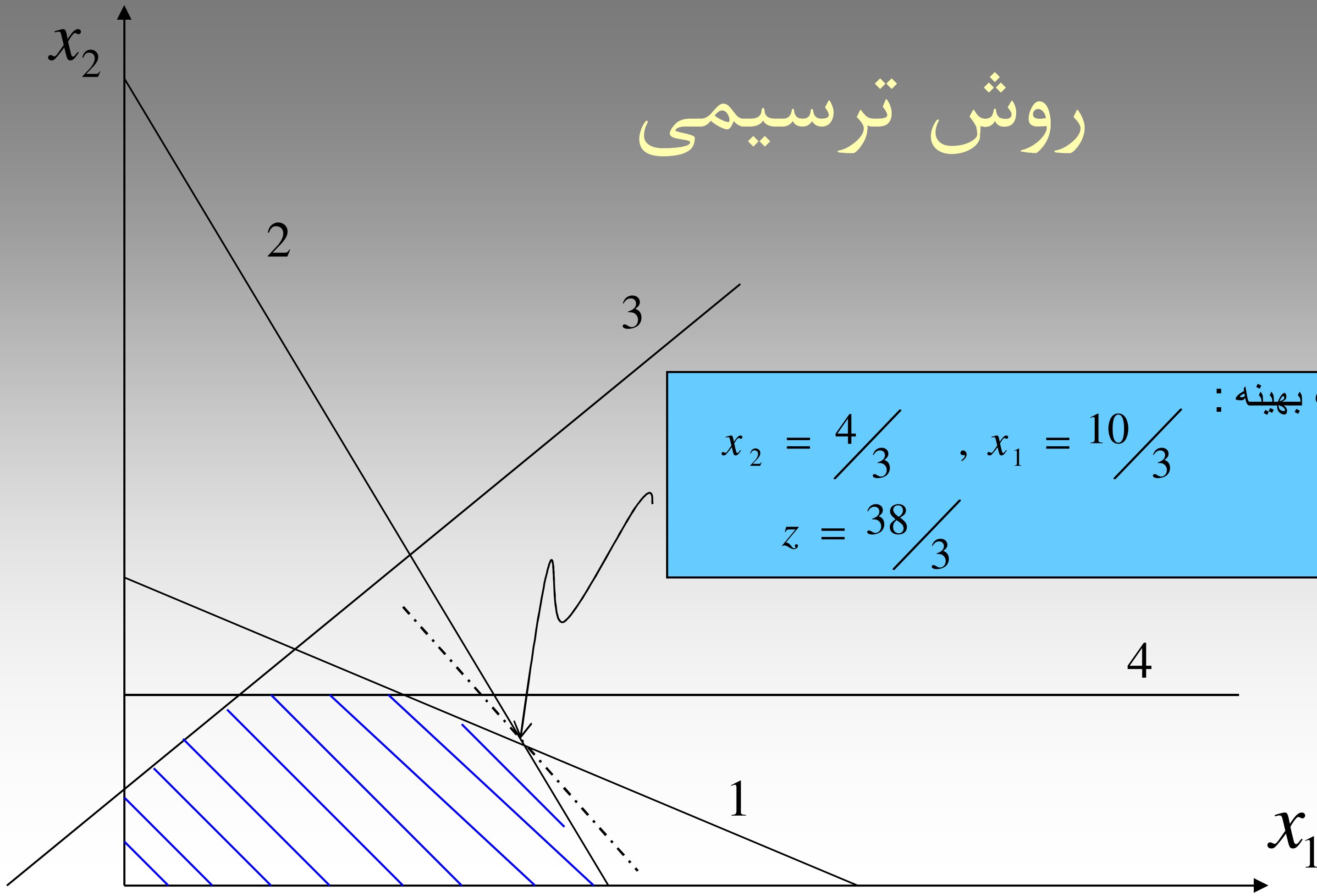
$$z = 3x_1 + 2x_2 \quad \Rightarrow \quad z = 6 \quad \Rightarrow \quad 3x_1 + 2x_2 = 6$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad C$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad D$$


x_2
2
3
4
D
1
x_1
C

روش ترسیمی



جواب بهینه :

$x_2 = 4/3 \quad , \quad x_1 = 10/3$

$z = 38/3$

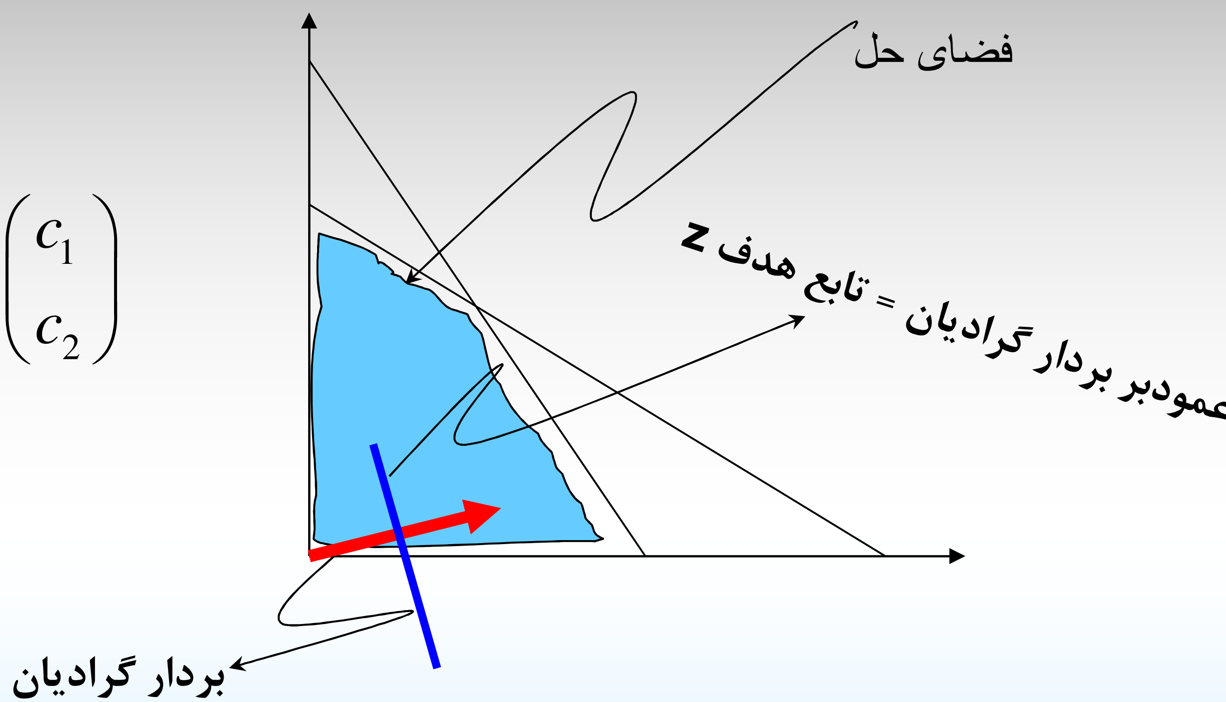
نقطه بهینه از محل برخورد محدودیت های ۱ و ۲ حاصل شده است . لذا مختصات محل تلاقی این دو خط را با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول حل می کنیم

روش گرادیان

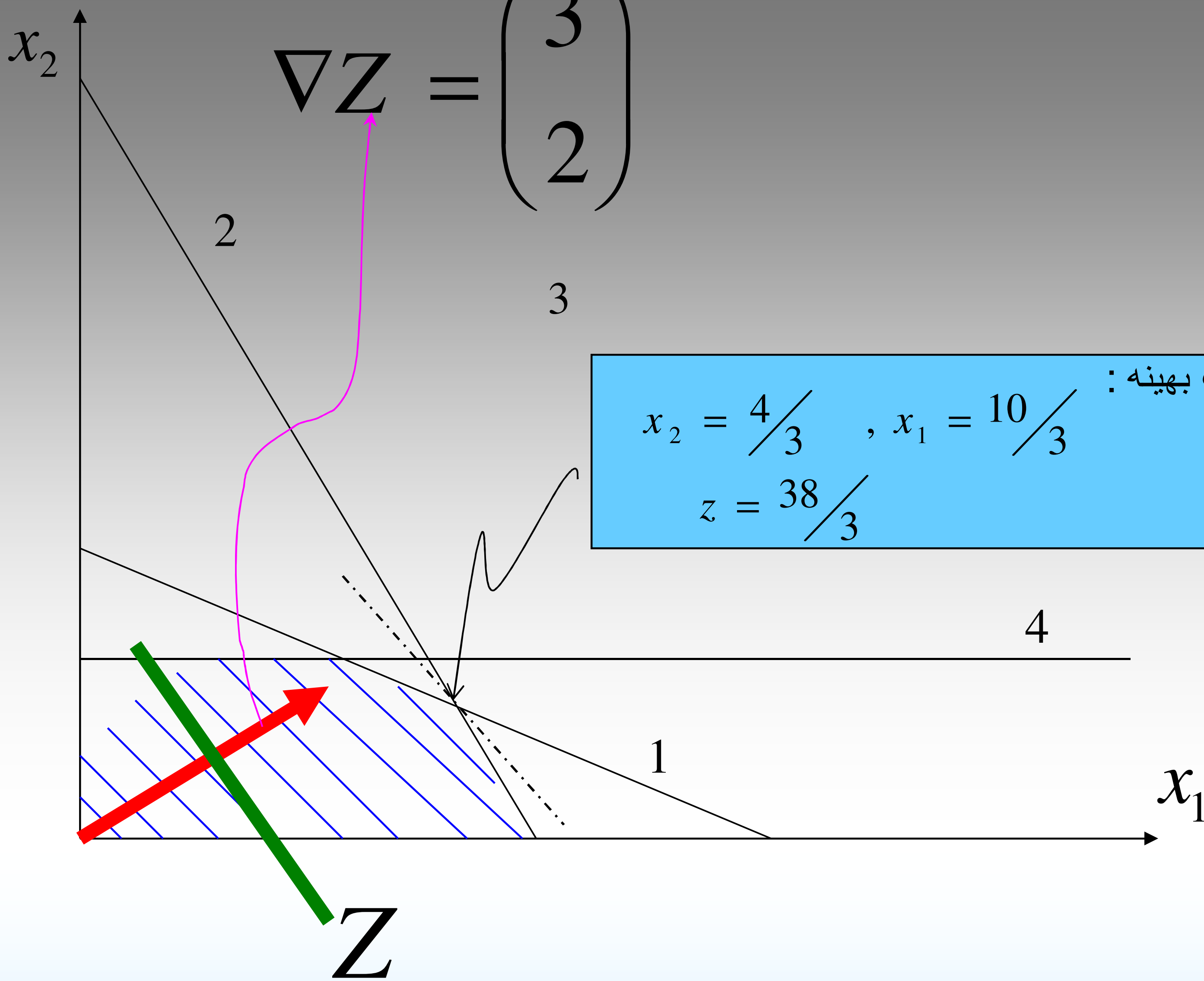
- گرادیان تابع هدف برداری است که جهت افزایش تابع هدف را نشان می دهدو به صورت زیر محاسبه می شود.

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\nabla Z = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$



$$\nabla Z = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



جواب بهینه :

$x_2 = 4/3 \quad , \quad x_1 = 10/3$

$z = 38/3$

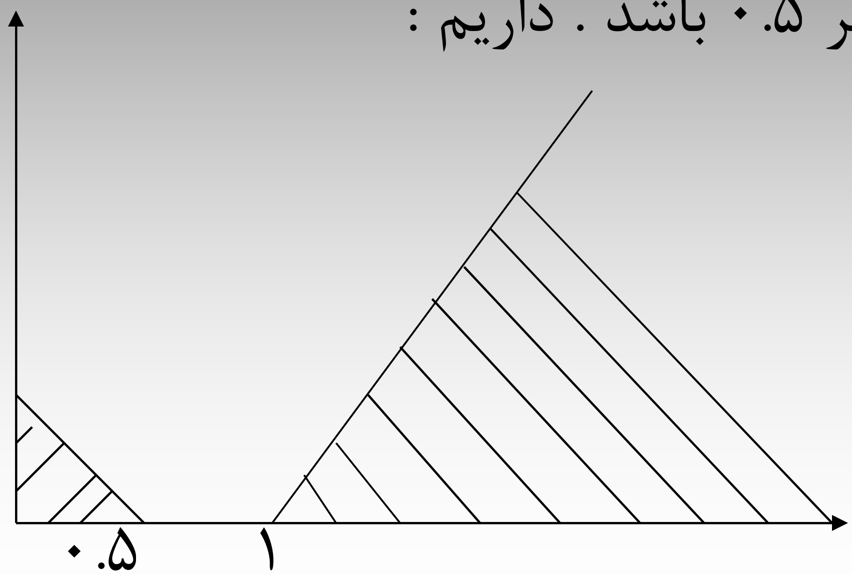
مثال ترسیمی ۲

- مسئله LP زیر را در نظر بگیرید :
- الف – به ازاء چه مقادیری از پارامتر
- α مسئله دارای جواب است ؟
- ب – جواب بهینه مسئله در حالت کلی
- چقدراست ؟

$$\begin{aligned} Max \quad & Z = x_1 \\ st: \quad & x_1 + x_2 \le \alpha \\ & -x_1 + x_2 \le -1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

مسئله ترسیمی ۲

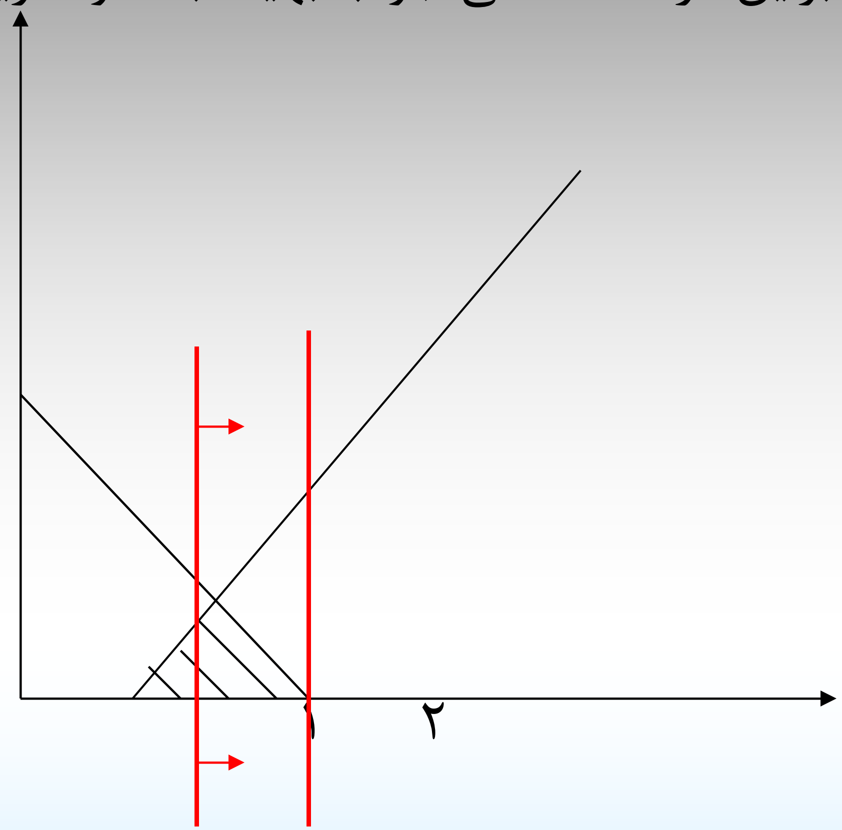
- فرض کنید مقدار پارامتر برابر ۰.۵ باشد . داریم :



- بنابراین به ازاء $\alpha \geq 1$ مسئله دارای فضای حل می باشد.

مسئله ترسیمی ۲

- با ازاء $\alpha = 2$ فضای حل به صورت زیر می باشد ، با رسم تابع هدف جواب بهینه مسئله در $\alpha = 2$ اتفاق خواهد افتاد بنابراین در حالت کلی جواب بهینه به صوت زیر است .



$$x_1^* = \alpha = z^*$$

$$x_2^* = 0$$

مثال ۳

- مسئله LP زیر را از طریق ترسیمی حل کنید:

$$Max \quad Z = Min\{3x_1 - 10 \ , -5x_1 + 5\}$$

$$st: \qquad 0 \le x_1 \le 5$$

$$\text{Max } Z = \underbrace{\min\{3x_1 - 10,\ -5x_1 + 5\}}_{x_2}$$

st: $0 \le x_1 \le 5$

$$\text{Max } Z = x_2$$

st:
$$3x_1 - 10 \ge x_2$$
$$-5x_1 + 5 \ge x_2$$
$$x_1 \le 5$$
$$x_1 \ge 0$$

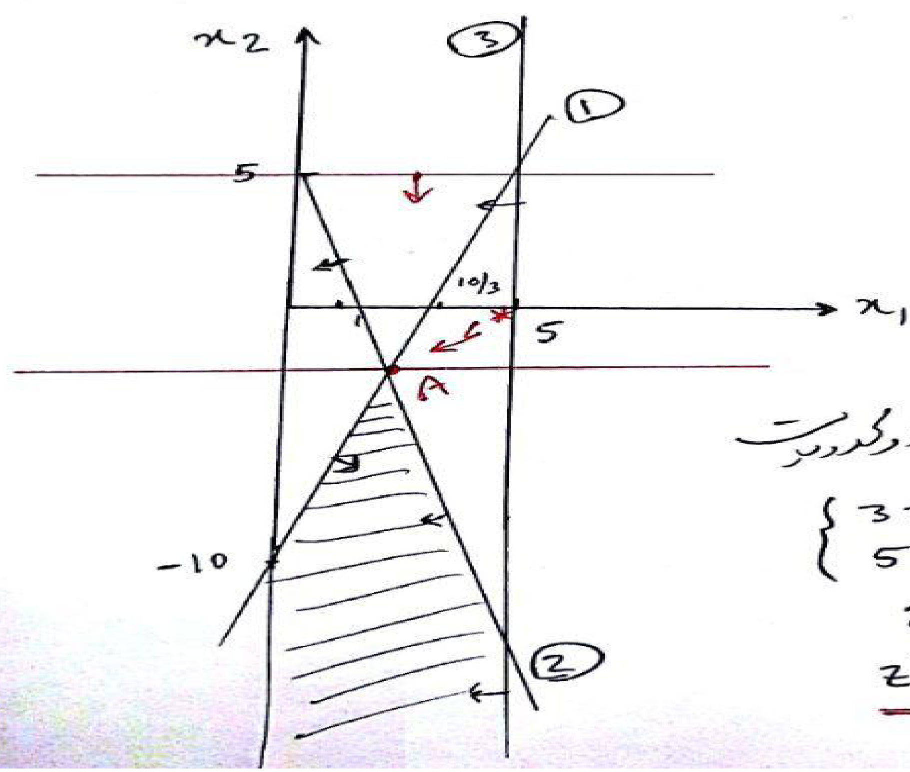
x_2 آزاد در علامت یا $-\infty \le x_2 \le +\infty$

$\Rightarrow$

$$\text{Max } Z = x_2$$

st:
$$3x_1 - x_2 \ge 10 \quad (1)$$
$$5x_1 + x_2 \le 5 \quad (2)$$
$$x_1 \le 5 \quad (3)$$
x_2 آزاد
$$x_1 \ge 0$$

حال محدودیت ها را رسم می‌کنیم:



$x_1 \ge 0$
x_2 آزاد } ?

$Z = 5 = x_2 =$ دلخواه

جواب بهینه نقطه A: محل برخورد دو محدودیت

$$\begin{cases} 3x_1 - \cancel{x_2} = 10 \\ 5x_1 + \cancel{x_2} = 5 \end{cases} \quad (2), (1)$$

$$8x_1 = 15 \quad \underline{\underline{x_1^* = 15/8}}$$

$$\underline{\underline{Z^* = x_2^* = -35/8}}$$

- مثال ۴ – مسئله LP زیر را از طریق ترسیمی حل کنید:

$$Max \quad Z = x_1 + x_2$$

$$st: \quad x_1 + (i - M)x_2 \le {i(i-1)}/{2}$$

$$(i - M)x_1 + x_2 \le {i(i-1)}/{2}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, M$$

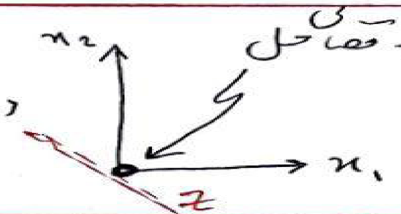
$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

st:
$$x_1 + (i - M)x_2 \leq \frac{i(i-1)}{2}$$
$$(i - M)x_1 + x_2 \leq \frac{i(i-1)}{2}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad i = 1, 2, \dots, M$$

اگر $M = 1 \Rightarrow i = 1 \Rightarrow x_1 \leq 0$

$x_2 \leq 0 \Rightarrow$

$x_1, x_2 \geq 0$

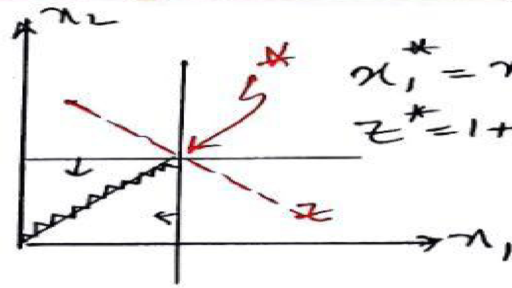


$x_1^* = x_2^* = 0$

$Z^* = 0 + 0 = 0$

اگر $M = 2 \Rightarrow \begin{cases} i = 1 & \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 0 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \end{cases} \\ , & \\ i = 2 & \begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \end{cases} \end{cases}$

$x_1, x_2 \geq 0$

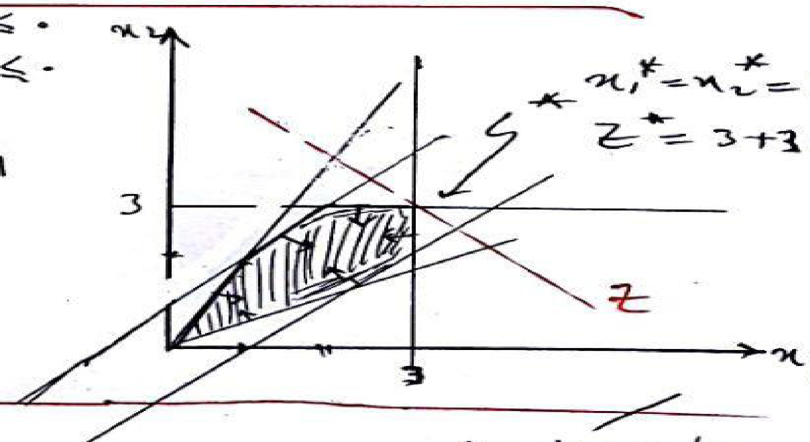


$x_1^* = x_2^* = 1$

$Z^* = 1 + 1 = 2$

اگر $M = 3 \Rightarrow \begin{cases} i = 1 \Rightarrow & \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ 2x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases} \\ i = 2 & \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases} \\ i = 3 & \begin{cases} x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 3 \end{cases} \end{cases}$

$x_1, x_2 \geq 0$



$x_1^* = x_2^* = 3$

$Z^* = 3 + 3 = 6$

درحالت کلی؛

$$\left.\begin{aligned} x_2^* &= x_1^* = M(M-1)/2 \\ Z^* &= M(M-1) \end{aligned}\right\} \text{؟ اگر}$$

☐ **2–1** An electronic company manufactures two radio models, each on a separate production line. The daily capacity of the first line is 60 radios and that of the second is 75 radios. Each unit of the first model uses 10 pieces of a certain electronic component, whereas each unit of the second model requires 8 pieces of the same component. The maximum daily availability of the special component is 800 pieces. The profit per unit of models 1 and 2 is \$30 and \$20, respectively. Determine the optimum daily production of each model.

☐ **2–2** Two products are manufactured by passing sequentially through three machines. The machine time allocated to the two products is limited to 10 hours per day. The production time and profit per unit of each product are given below.

	Minutes per Unit			
Product	Machine 1	Machine 2	Machine 3	Profit
1	10	6	8	\$2
2	5	20	15	\$3

Find the optimal mix of the two products.

☐ **2–3** A company can advertise its product by using local radio and TV stations. Its budget limits the advertisement expenditures to \$1000 a month. Each minute of radio advertisement costs \$5 and each minute of TV advertisement costs \$100. The company would like to use the radio at least twice as much as the TV. Past experience shows that each minute of TV advertisement will usually generate 25 times as many sales as each minute of radio advertisement. Determine the optimum allocation of the monthly budget to radio and TV advertisements.

☐ **2–4** A company produces two products, A and B. The sales volume for product A is at least 60% of the total sales of the two products. Both products use the same raw material, of which the daily availability is limited to 100 lb. Products A and B use this raw material at the rates of 2 lb/unit and 4 lb/unit, respectively. The sales price for the two products are \$20 and \$40 per unit. Determine the optimal allocation of the raw material to the two products.

☐ **2–5** A company produces two types of cowboy hats. Each hat of the first type requires twice as much labor time as does each hat the second type. If all hats are of the second type only, the company can produce a total of 500 hats a day. The market limits daily sales of the first and second types to 150 and 200 hats. Assume that the profit per hat is \$8 for type 1 and \$5 for type 2. Determine the number of hats of each type to produce in order to maximize profit.

☐ **2–6** Determine the solution space graphically for the following inequalities.

$$
\begin{aligned}
x_1 + \quad x_2 &\le 4 \\
4x_1 + 3x_2 &\le 12 \\
-x_1 + \quad x_2 &\ge 1 \\
x_1 + \quad x_2 &\le 6 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Which constraints are redundant? Reduce the system to the smallest number of constraints that will define the same solution space.

☐ 2–7 Write the constraints associated with the solution space shown in Figure 2–10 and identify all redundant constraints.

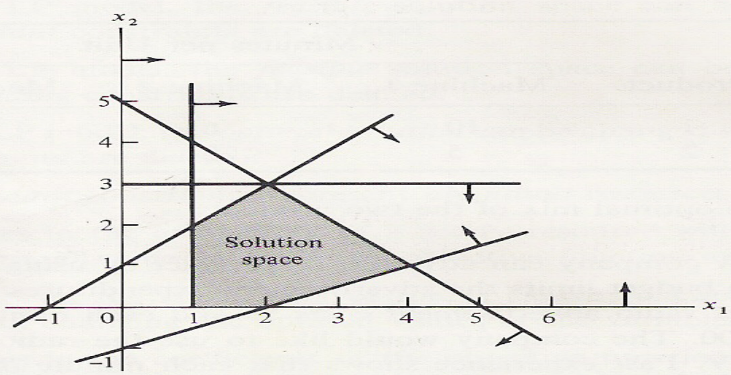


Figure 2–10

☐ 2–8 Consider the following problem:

$$\text{maximize } z = 6x_1 - 2x_2$$

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\le 1 \\
3x_1 - x_2 &\le 6 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Show graphically that at the optimal solution the variables x_1 and x_2 can be increased indefinitely while the value of the objective function remains constant.

☐ 2–9 Consider the following linear programming problem:

$$\text{maximize } z = 4x_1 + 4x_2$$

subject to

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 7x_2 &\le 21 \\
7x_1 + 2x_2 &\le 49 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Find the optimal solution (x_1^*, x_2^*) graphically. What are the ranges of variation of the coefficients of the objective function that will keep (x_1^*, x_2^*) optimal?

☐ **2–10** Solve the following problem graphically:

$$\text{maximize } z = 5x_1 + 6x_2$$

subject to

$$x_1 - 2x_2 \geq 2$$
$$-2x_1 + 3x_2 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \text{ unrestricted in sign}$$

☐ **2–11** Consider the following problem:

$$\text{maximize } z = 3x_1 + 2x_2$$

subject to

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Show graphically that the problem has no *feasible* extreme points. What can one conclude concerning the solution to the problem?

☐ **2–12** Solve the following problem graphically:

$$\text{maximize } z = 5x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 = 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

☐ **2–13** In Problem 2–12, identify numerically the extreme points of the solution space. If the constraint $x_1 = 5$ is changed to $x_1 \leq 5$, determine all the *feasible* extreme points and find the optimum by evaluating the objective function numerically at each point. Show that the answer agrees with the graphical solution. Repeat the procedure with $x_1 = 5$ replaced by $x_1 \geq 5$.

☐ **2–14** Consider the solution space in Figure 2–10 (Problem 2–7). Determine the optimum solution assuming that the objective function is as given below.

(a) Minimize $z = 2x_1 + 6x_2$.
(b) Maximize $z = -3x_1 + 4x_2$.
(c) Minimize $z = 3x_1 + 4x_2$.
(d) Minimize $z = x_1 - 2x_2$.
(e) Minimize $z = x_1$.
(f) Maximize $z = x_1$.

□ **2–15** Consider the following linear program:

$$\text{maximize } z = 5x_1 + 3x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 \leq 4 \qquad \text{(resource 1)}$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10 \qquad \text{(resource 2)}$$
$$x_1, x_2 \leq 0$$

Determine the following.

(a) The *increase* in resource 1 that will make its constraint just redundant, and the associated change in the value of z.

(b) The *decrease* in resource 2 that will make constraint 1 just redundant, and the associated change in the value of z.

□ **2–16** In Problem 2–1, the optimum solution shows that the constraints associated with the availability of the special component and the capacity of production line 1 are both scarce whereas those of line 2 are abundant.

(a) Determine the maximum *increase* in the capacity of line 1 beyond which the objective value will not improve.

(b) Determine the maximum *decrease* in the capacity of line 2 that will leave the current optimum unchanged.

(c) Determine the maximum increase in the daily availability of the special component beyond which the objective value will cease to improve.

(d) Basing your decision on the worth per resource unit, determine the scarce resource that must be given higher priority for level increase.

□ **2–17** Consider Problem 2–2, where three machines are used to manufacture two products.

(a) Identify the machine(s) with abundant capacity at the optimum solution, then determine the amount of unused capacity (in machine hours).

(b) For each machine with full utilization, determine the worth per unit increase in its capacity.

(c) Which of the three machines should be given the highest priority for capacity increase?

□ **2–18** Consider Problem 2–3. Determine the maximum increase in the monthly budget beyond which any further increase will not affect the optimal solution. Analyze the result from the standpoint of its implementation in real-life situations.

□ **2–19** Consider Problem 2–1. The optimum solution specifies the daily production as 60 radios of model 1 and 25 of model 2, with an optimum profit of \$2300.

(a) Determine the range of change in the per unit profit of model 1 that will keep the optimum solution unchanged.

(b) Repeat part (a) for model 2.

(c) Determine the per unit profit of model 1 that can result in an optimum solution in which both constraints representing the line capacities become *nonbinding*. The per unit profit of model 2 is assumed fixed at \$20.

(d) Suppose that we vary the per unit profits of models 1 and 2 *simultaneously*. Determine a range of the ratio of the two profit coefficients that will keep the current optimum solution unchanged.

☐ **2–20** Consider Problem 2–3. Determine the increase in sales per minute of radio advertisement that will make it more attractive to assign the entire monthly budget to radio advertisement only.

☐ **2–21** Four products are processed successively on two machines. The manufacturing times in hours per unit of each product are tabulated below for the two machines.

	Time per Unit (hr)			
Machine	Product 1	Product 2	Product 3	Product 4
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

The total cost of producing 1 unit of each product is based directly on the machine time. Assume that the cost per hour for machines 1 and 2 is \$10 and \$15, respectively. The total hours budgeted for all the products on machines 1 and 2 are 500 and 380. If the sales price per unit for products 1, 2, 3, and 4 are \$65, \$70, \$55, and \$45, formulate the problem as a linear programming model to maximize total net profit.

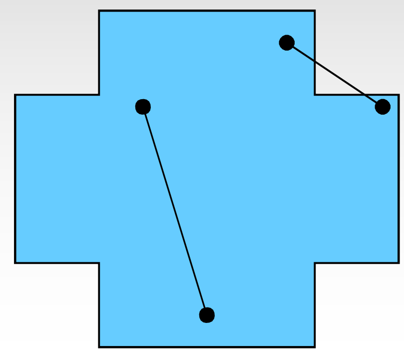
☐ **2–22** A manufacturer produces three models (I, II, and III) of a certain product. He uses two types of raw material (A and B), of which 4000 and 6000 units are available, respectively. The raw material requirements per unit of the three models are given below.

	Requirements per Unit of Given Model		
Raw Material	I	II	III
A	2	3	5
B	4	2	7

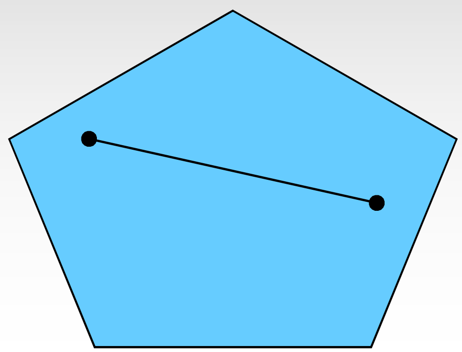
The labor time for each unit of model I is twice that of model II and three times that of model III. The entire labor force of the factory can produce the equivalent of 1500 units of model I. A market survey indicates that the minimum demand for the three models is 200, 200, and 150 units, respectively. However, the ratios of the number of units produced must be equal to 3:2:5. Assume that the profit per unit of models I, II, and III is \$30, \$20, and \$50, respectively.

تحدب در فضای حل

- فضای حل حاصل از محدودیت های یک مسئله LP همواره فضایی است محدب



- فضای غیر محدب



فضای محدب

تعریف فضای محدب

- دو تعریف از فضای محدب وجود دارد.

تعریف غیر ریاضی :

- فضایی را محدب گویند هرگاه هروجه این فضا را ادامه دهیم شکل در یک طرف این وجه امتداد یافته قرار گیرد.

تعریف ریاضی :

- فضایی را محدب گویند هرگاه هر دو نقطه دلخواهی متعلق به این فضا را در نظر بگیریم ، تمام نقاط خط واصل بین این دونقطه متعلق به این فضا باشد.

ترکیب محدب بین k نقطه

- ترکیب محدب بین k نقطه $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \cdots + \alpha_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$$

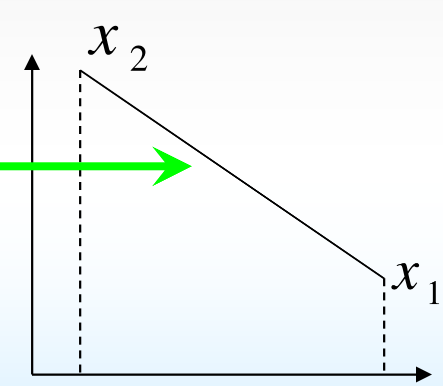
$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \qquad \& \qquad 0 \le \alpha_i \le 1$$

در این صورت ترکیب محدب بین ۲ نقطه به صورت زیر است :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \qquad 0 \le \alpha_1, \alpha_2 \le 1$$

یا :

$\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \qquad 0 \le \alpha \le 1$
تمام نقاط خط واصل بین x_1 و x_2



ترکیب اکیداً محدب $\qquad \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \qquad 0 < \alpha < 1$

- حال با دانستن این تعریف اثبات محدب بودن فضا براحتی قابل انجام است .

$$x_1, x_2 \in S \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha(Ax_1 \le b) \\ (1-\alpha)(Ax_2 \le b) \end{array}\right\} +$$

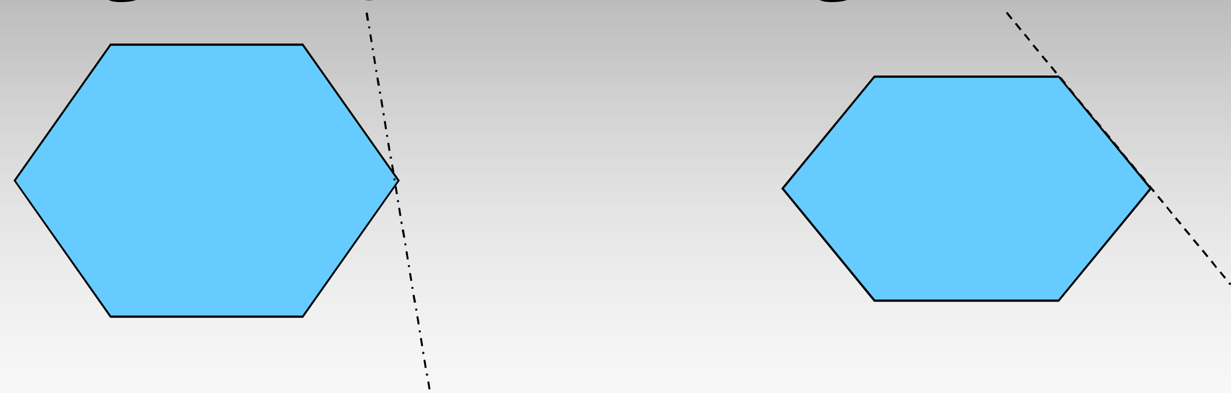
$$\underbrace{A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)}_{x_3} \le \alpha b + (1-\alpha)b = b$$

$$Ax_3 \le b$$

$$x_3 \in S$$

تعریف گوشه

- بعد از اثبات محدب بودن فضای حل مسئله حال می توان نشان داد که ماکزیمم تابع هدف در یک مسئله LP در یک فضای محدب همواره در حداقل یکی از **گوشه** های آن اتفاق می افتد .



- بنابراین گوشه در مسئله LP از ارزش خاصی برخوردار است . برای تعریف گوشه ابتدا خاصیت زیر را برای تمام نقاط غیر گوشه تعریف می کنیم :
- **برای هر نقطه غیر گوشه متعلق به فضای حل وجود دارد دونقطه دیگر متعلق به همین فضا به طوریکه آن نقطه غیر گوشه را می توان از ترکیب محدب این دونقطه بدست آورد.**

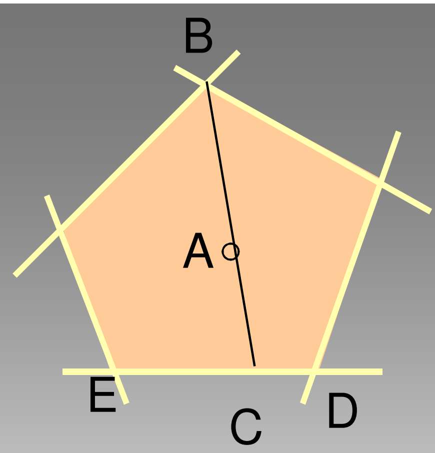
بنابراین گوشه نقطه ای است که نمی توان آن را از ترکیب محدب هیچ دونقطه دیگری متعلق به فضای حل مسئله نوشت .

توجه کنید که این تعریف دقیق بوده بطوریکه اگر کلمه دیگر حذف گردد تعریف فوق غلط است

توجه کنید که اگر کلمه محدب به اکیداً محدب تبدیل شود بدون کلمه **دیگر** باز هم تعریف فوق صحیح است .

قضیه نمایش برای فضای محدود

- فرض کنید در یک فضای حل محدود p گوشه موجود باشد، در این صورت هر نقطه متعلق به این فضای حل محدود را می توان به صورت ترکیب محدب از بخشی یا همه گوشه های فضای حل مسئله نوشت .



$$A = \alpha B + (1-\alpha)C \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

$$C = \beta E + (1-\beta)D \qquad 0 \le \beta \le 1$$

$$A = \alpha B + (1-\alpha)[\beta E + (1-\beta)D]$$

$$A = \underbrace{\alpha}_{0\le\lambda_1\le1} B + \underbrace{(1-\alpha)\beta}_{0\le\lambda_2\le1} E + \underbrace{(1-\alpha)(1-\beta)}_{0\le\lambda_3\le1} D$$

$$\alpha + (1-\alpha)\beta + (1-\alpha)(1-\beta) = 1$$

اثبات قضیه : از طریق برهان خلف آن را اثبات می کنیم. فرض کنید x_m بهینه باشد ولی گوشه نباشد .(مقدار تابع هدف $Z_m = cx_m$) بنابراین می توان x_m را به صورت ترکیب محدب از تمام p گوشه مسئله نوشت:

$$x_m = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \qquad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1 \qquad 0 \le \alpha_i \le 1$$

$$cx_m = \sum_{i=1}^{p} c\,\alpha_i x_i \Rightarrow Z_m = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \underbrace{cx_i}_{Z_i} \le \sum_{i=1}^{p} \alpha_i Z_u = Z_u \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = Z_u$$

u یکی از گوشه های بین p گوشه است

$\Rightarrow Z_m \le Z_u$ خلاف فرض

ساختار فضای حل مسئله LP

1. Bounded $\vec{C}$

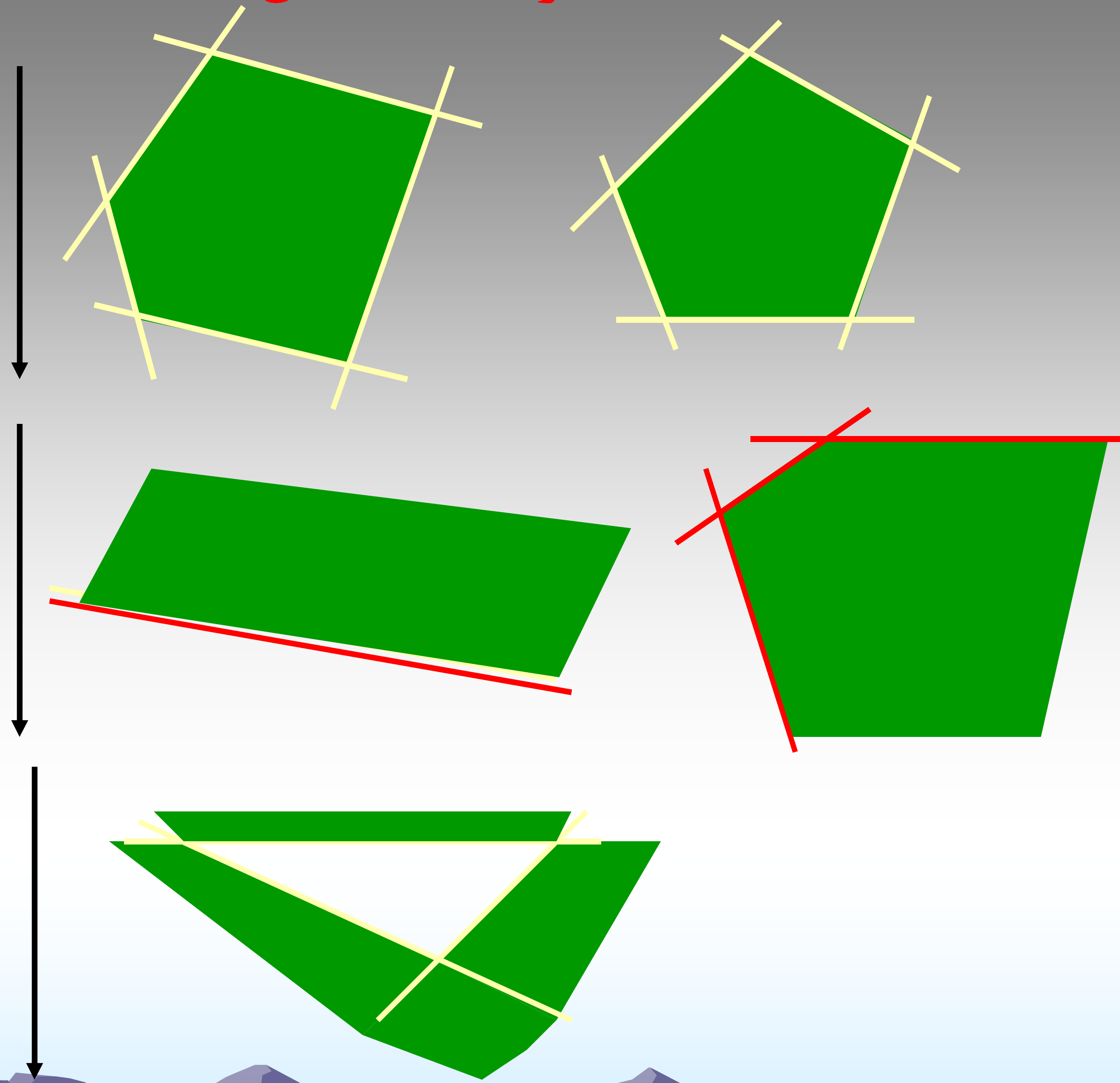
محدود

2. Unbounded $\vec{C}$

نامحدود

3. Empty $\vec{C}$

تهی



سئوال ۱

- در یک مسئله تولیدی اگر منابع تولید تماما صرف تولید محصول اول شود می تواند ۱۰۰ واحد ازآن را تولید کند اگرمنابع مورد نیاز هر واحد محصول دوم ثلث منابع مورد نیاز هرواحدمحصول اول باشد .اگر x_j میزان تولید محصول **J** ام باشد محدودیت متناظر این اطلاعات را بنویسید.

$$r_2 = \tfrac{1}{3} r_1 \;\Rightarrow\; r_1 x_1 + r_2 x_2 \le 100\ r_1$$
$$r_1 x_1 + \tfrac{1}{3} r_1 x_2 \le 100\ r_1 \;\Rightarrow x_1 + \tfrac{1}{3} x_2 \le 100$$

سئوال ۲

- یک شرکت تولیدی کلاً ۴۰ ساعت وقت جهت تولید محصولات زیر دارد:تولید هرواحدمحصول A نیازمند ۱ ساعت کار $1x_A$
- تولید هر واحد محصول B نیازمند ۲ ساعت کار و دو واحد محصول A است . $(2+2)x_B$
- تولید هر واحد محصول C نیازمند ۳ ساعت کار و یک واحد محصول B است . $(4+3)x_C$
- محصولاتي که در تولید محصولات دیگر مورد استفاده قرار می گیرند جزئی از آن ها شده و قابل تفکیک نمی باشند اگر میزان تولید اولیه محصولات A وBوC را بترتیب با x_C , x_B , x_A نشان دهیم محدودیت معادل این اطلاعات را بنویسید؟

$$x_A + 4x_B + 7x_C \le 40$$

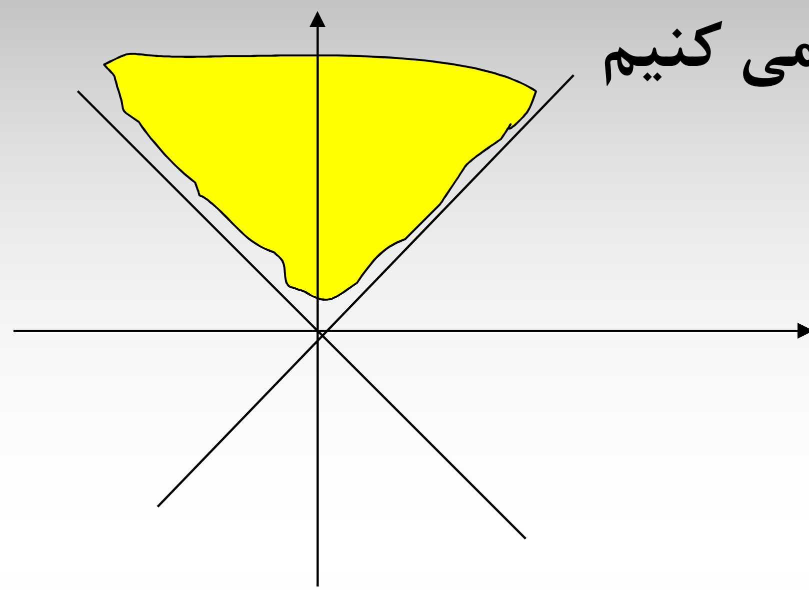
سئوال ۳

- مجموعه $S=\{(x_1,x_2)\mid x_2\ge |x_1|\}$ رادرنظر بگیرید . در این صورت **S** یک مجموعه ...محدب...و ...یک... گوشه دارد.

حل : رسم می کنیم

$$x_2-x_1\ge 0$$

$$x_2+x_1\ge 0$$



سئوال ۴

- این مسئله ...۶..گوشه دارد ؟

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_{1,2,3,4} \geq 0 \end{cases}$$

روش جبری

- این روش اساس کار روش سیمپلکس را نشان می دهد .
- روش جبری شامل ۵ قدم می باشد.

- قدم اول – استاندارد کردن مسئله LP

- هر مسئله LP را می توان به دوفرم کلی نشان داد.

- ۱ – فرم کانونیک یا متعارف Canonical form
- ۲ – فرم استاندارد Standard form

فرم متعارف (کانونیک)

- فرم متعارف شامل سه شرط زیر است (این عرف بیشتر از دید کتاب ها مورد توجه است):

۱ – تابع هدف از نوع Max

۲ – تمام محدودیت ها از نوع کوچکتریا مساوی

۳ – تمام متغیر ها از نوع بزرگتر یا مساوی صفر

$$\begin{aligned} &Max\ Z = CX \\ &st: \quad AX \le b \\ &\qquad\quad X \ge 0 \end{aligned}$$

عرف کتاب طاها

$$\begin{aligned} &Min\ Z = CX \\ &st: \quad AX \ge b \\ &\qquad\quad X \ge 0 \end{aligned}$$

عرف کتاب بازارا

فرم استاندارد

- فرم استاندارد دارای ۴ شرط زیر است :

- ۱- تابع هدف ازنوع Max یا Min
- ۲ – مقادیر سمت راست بزرگتریا مساوی صفر
- ۳ – مقادیر متغیر ها بزرگتر یا مساوی صفر
- ۴ – محدودیت ها از نوع = یا معادله

روش جبری

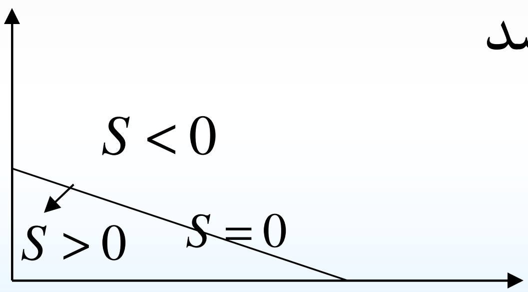
- موارد ۱ و ۲ و۳ براحتی قابل درک و اجرا می باشد.
- اما در مورد ۴ می توان گفت :

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

- از نظر ریاضی یعنی سمت چپ نسبت به
- سمت راست کم دارد .(کمبود – تهی و ...)

$$x_1 + 2x_2 + S = 6$$

- S از نظر عملی به معنی منبع بلااستفاده می باشد



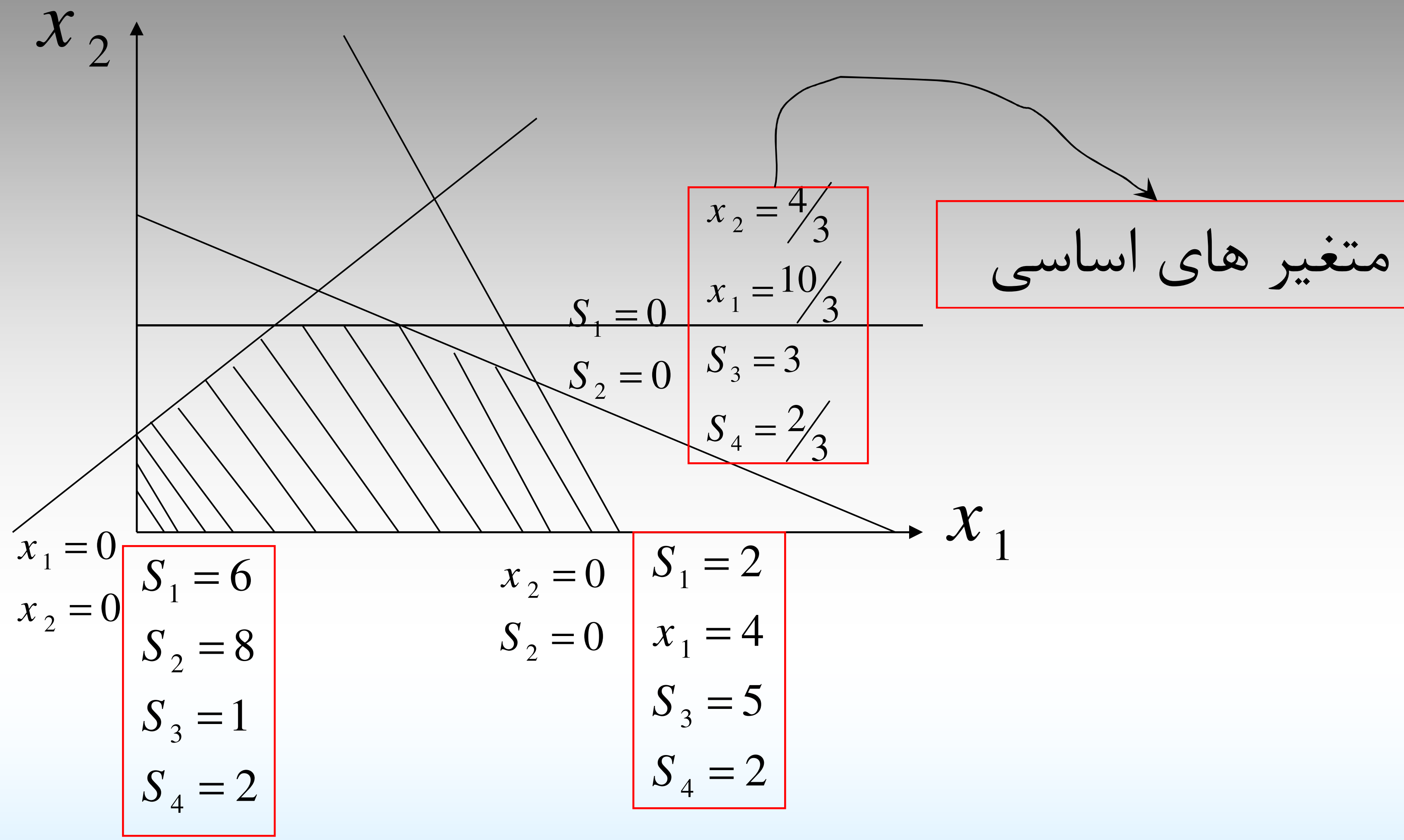
روش جبری

- فرم استاندارد مسئله قبلی به صورت زیر است :

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 3x_1 + 2x_2 \\
&st: \quad x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + s_2 = 8 \\
&\qquad -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\
&\qquad x_2 + s_4 = 2
\end{aligned}
\qquad s_1, s_2, s_3, s_4, x_1, x_2 \geq 0
$$

روی هر محدودیت که حرکت می کنیم s مربوطه آن صفر است

بنابراین در گوشه ها در این مسئله ۲ متغیر صفر است .



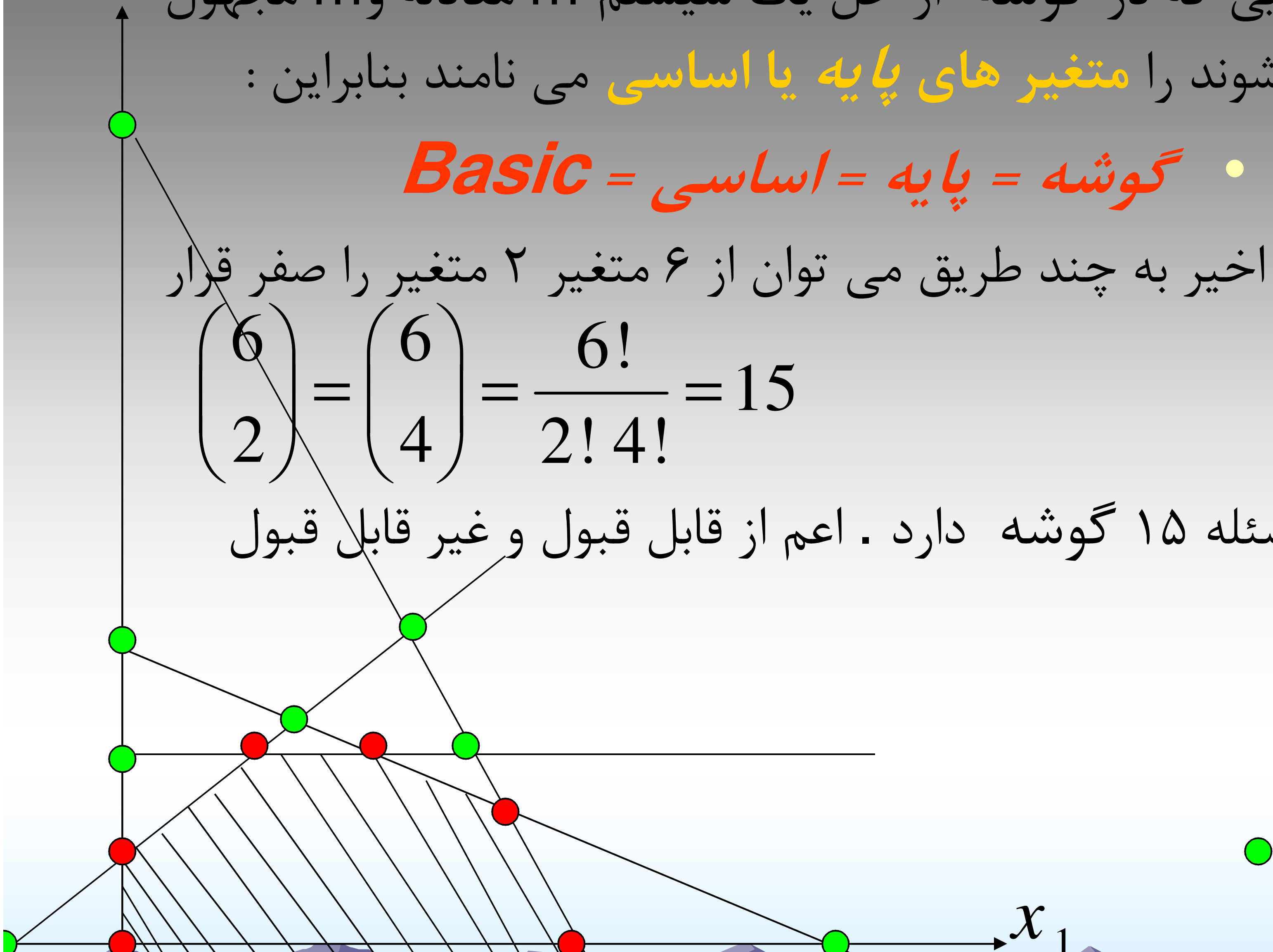
- به متغیر هایی که در گوشه از حل یک سیستم m معادله وm مجهول حاصل می شوند را **متغیر های پایه یا اساسی** می نامند بنابراین :

- ***گوشه = پایه = اساسی = Basic***

حال در مسئله اخیر به چند طریق می توان از ۶ متغیر ۲ متغیر را صفر قرار داد؟

$$\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$$

بنابراین این مسئله ۱۵ گوشه دارد . اعم از قابل قبول و غیر قابل قبول



روش جبری

- بنابراین در مسئله زیر**حداکثر** تعداد گوشه های مسئله به صورت زیر محاسبه می گردد :

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = CX \\ &st: \quad AX \le b \\ &\qquad\ \ X \ge 0 \\ &no \quad of \quad BS \quad is = \frac{(m+n)!}{m!n!} \end{aligned}$$

- و در مسئله زیر :

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = CX \\ &st: \quad AX = b \\ &\qquad\ X \ge 0 \ , n > m \\ &no \quad of \quad BS \quad is = \frac{n!}{m!(n-m)!} \end{aligned}$$

- مثال – در مسئله زیر با بررسی همه گوشه ها جواب بهینه را بدست آورید ؟

$$Min \quad Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4$$

$$st: \quad -x_1 - x_2 + x_4 = 1$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$x_{1,2,3,4} \geq 0$$

- حل :

$$(x_1, x_2) = (-4, 3) \quad (x_1, x_3) = (\quad , \quad)$$

$$(x_1, x_4) = (\quad , \quad) \quad (x_2, x_3) = (\quad , \quad)$$

$$(x_2, x_4) = (\quad , \quad) \quad (x_3, x_4) = (\quad , \quad)$$

- مثال ۱ – محدودیت های یک مسئله LP به صورت زیر است : آیا جواب $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ یک گوشه از فضای حل مسئله می باشد؟

$$st:$$

$$x_1 + x_3 \geq 6$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 - s_1 = 6 \\ x_2 - s_2 = 2 \end{cases}$$

خیر زیرا جواب فوق از حل یک سیستم ۲ معادله و ۲ مجهول حاصل نشده است .

- مثال ۲ – برای محدودیت های زیر کدام جواب یک گوشه از فضای حل مسئله می باشد.

$$(1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T \qquad (3\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$$

$$
\begin{aligned}
& st: \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\
& 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

- مثال ۳ – ناحیه شدنی یک مسئله LP به صورت زیر تعریف شده است در مورد هریک از جواب های زیر بحث کنید ؟

$$S=\{x_1,x_2 / x_1+2x_2\le 4, -x_1+x_2\le 1\,,\ x_1,x_2\ge 0\}$$

$A)\ x_1=x_2=0$	**گوشه قابل قبول**
$B)\ x_1=\frac{2}{3}\ x_2=\frac{5}{3}$	**گوشه قابل قبول**
$C)\ x_1=0\ \ x_2=1$	**گوشه قابل قبول**
$D)\ x_1=\frac{1}{3}\ x_2=\frac{4}{3}$	**گوشه نمی باشد**

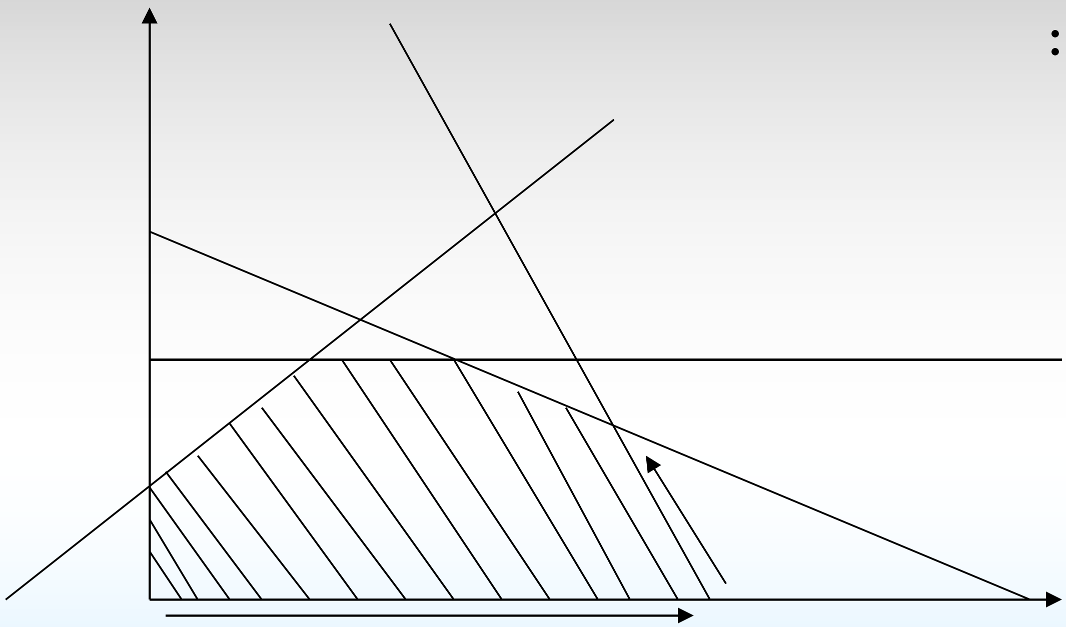
روش جبری

- **گوشه = پایه = اساسی = Basic**
- متغیر هایی که از حل سیستم همگن m معادله و m مجهول حاصل می شوند را **متغیر های پایه یا اساسی** می نامند .
- بنابراین در مسئله زیرحداکثر تعداد گوشه های مسئله به صورت زیر محاسبه می گردد :

$$Max \quad Z = CX$$
$$st: \quad AX \leq b$$
$$X \geq 0$$
$$no \quad of \quad BS \quad is = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

فلسفه روش جبری

- شروع از یک گوشه قابل قبول در دسترس و حرکت به گوشه مجاور گوشه فعلی به طوریکه مقدار تابع هدف در گوشه جدید بهبود یابد و ادامه دادن این راه تا رسیدن به گوشه بهینه ، به شکل زیر دقت کنید :



روش جبری

- قدم دوم : **شروع از یک گوشه قابل قبول اولیه و در دسترس**
- در مسائلی که بصورت زیر می باشند همواره مبداء مختصات به عنوان یک گوشه قابل قبول اولیه می باشد.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = CX \\
&st: \quad AX \le b \\
&\qquad\quad X, b \ge 0
\end{aligned}
$$

- در غیر اینصورت با استفاده از تکنیک های متغیرمصنوعی(Big M) و دوفاز می توان به گوشه قابل قبول اولیه ای دست یافت .

روش جبری

- قدم سوم : تعیین راستای حرکت
- در گوشه قابل قبول بدست آمده با توجه به تابع هدف در راستای متغیری حرکت می کنیم که تابع هدف را ماکزیمم کند. در مثال فوق در راستای متغیر x_1 (زیرا ضریبش در مسئله Maxاز همه مثبت تر است)حرکت می کنیم . اگر چنین راستایی موجود نباشد گوشه فعلی گوشه بهینه بوده و متوقف می شویم .
- قدم چهارم : تعیین حداکثر مقدار حرکت در راستای مربوطه
- تعیین مقدار حرکت با توجه به محدودیت ها تعیین می شود. به طور مثال در مسئله اخیر حداکثر مقدار حرکت در راستای x_1 برابر ۴ می باشد ! چرا؟

روش جبری

$$x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 8$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_2 \le 2$$

با محدودیت	حداکثر x_1	
۱	۶	Min
۲	۴	
۳	بینهایت	
۴	بینهایت	

- حداقل مقادیر فوق ماکزیمم مقدار برای متغیر x_1 می باشد.

روش جبری

- قدم پنجم : نوشتن صورت مسئله به تفکیک متغیرهای پایه و غیر پایه در گوشه جدید
- ازآنجائیکه مقدار ۴ از محدودیت دوم حاصل شد لذا از محدودیت دوم متغیر x_1 را برحسب سایر متغیر ها بدست آورده و در سایر محدودیت ها و تابع هدف قرار می دهیم .
- این قدم یک قدم ریاضی است و تحت عنوان روش حذف گوس معروف می باشد.

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 8 \Rightarrow x_1 = 4 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}s_2$$

$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$$

$$x_2 + s_4 = 2$$

$$Max\ Z = 3(4 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}s_2) + 2x_2$$

$$st: 4 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}s_2 + 2x_2 + s_1 = 6$$

$$x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}s_2 = 4$$

$$-4 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}s_2 + x_2 + s_3 = 1$$

$$x_2 + s_4 = 2$$

$$Max\ Z = 12 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{3}{2}s_2$$

$$st: \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}s_2 + s_1 = 2$$

$$x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}s_2 = 4$$

$$\tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}s_2 + s_3 = 5$$

$$x_2 + s_4 = 2$$

مجددا به قدم سوم برمی گردیم با نگاهی به تابع هدف در این مرحله در راستای x_2 حرکت می کنیم . قدم چهارم به صورت زیر است :

با محدودیت	حداکثر	
۱	4/3	
۲	8	
۳	10/3	Min
۴	2	

- حداقل مقادیر فوق ماکزیمم مقدار برای متغیر x_2 می باشد.
- در قدم پنجم متغیر x_2 را از محدودیت ۱ بر حسب سایر متغیر ها محاسبه و در سایر محدودیت ها و تابع هدف قرار می دهیم .

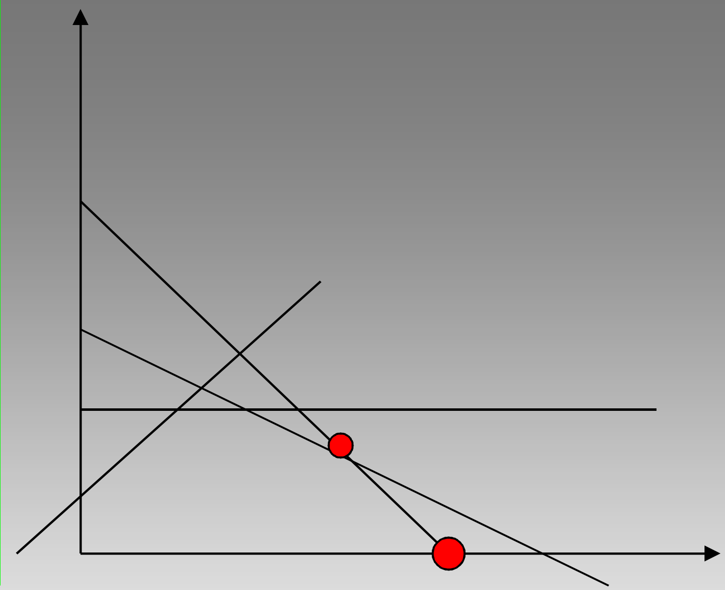
$$Max\ Z = 12 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{3}{2}s_2$$

$$st:\ \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}s_2 + s_1 = 2 \quad \Rightarrow x_2 = \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}s_2 - \tfrac{2}{3}s_1$$

$$x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}s_2 = 4$$

$$\tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}s_2 + s_3 = 5$$

$$x_2 + s_4 = 2$$



$$Max\ Z = 12 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}s_2 - \tfrac{2}{3}s_1) - \tfrac{3}{2}s_2$$

$$st:\quad x_2 - \tfrac{1}{3}s_2 + \tfrac{2}{3}s_1 = \tfrac{4}{3}$$

$$x_1 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}s_2 - \tfrac{2}{3}s_1) + \tfrac{1}{2}s_2 = 4$$

$$\tfrac{3}{2}(\tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}s_2 - \tfrac{2}{3}s_1) + \tfrac{1}{2}s_2 + s_3 = 5$$

$$\tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}s_2 - \tfrac{2}{3}s_1 + s_4 = 2$$

$$Max\ \ Z = \frac{38}{3} - \frac{4}{3}s_2 - \frac{1}{3}s_1$$

$$\begin{aligned}
st:\quad & x_2 - \tfrac{1}{3}s_2 + \tfrac{2}{3}s_1 = \tfrac{4}{3} \\
& x_1 + \tfrac{2}{3}s_2 - \tfrac{1}{3}s_1 = \tfrac{10}{3} \\
& s_2 - s_1 + s_3 = 3 \\
& \tfrac{1}{3}s_2 - \tfrac{2}{3}s_1 + s_4 = \tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$x_1+2x_2+s_1=6$$
$$2x_1+x_2+s_2=8$$
$$-x_1+x_2+s_3=1$$
$$x_2+s_4=2$$

$$Max\ Z=12+\tfrac{1}{2}x_2-\tfrac{3}{2}s_2$$
$$st:\quad \tfrac{3}{2}x_2-\tfrac{1}{2}s_2+s_1=2$$
$$x_1+\tfrac{1}{2}x_2+\tfrac{1}{2}s_2=4$$
$$\tfrac{3}{2}x_2+\tfrac{1}{2}s_2+s_3=5$$
$$x_2+s_4=2$$

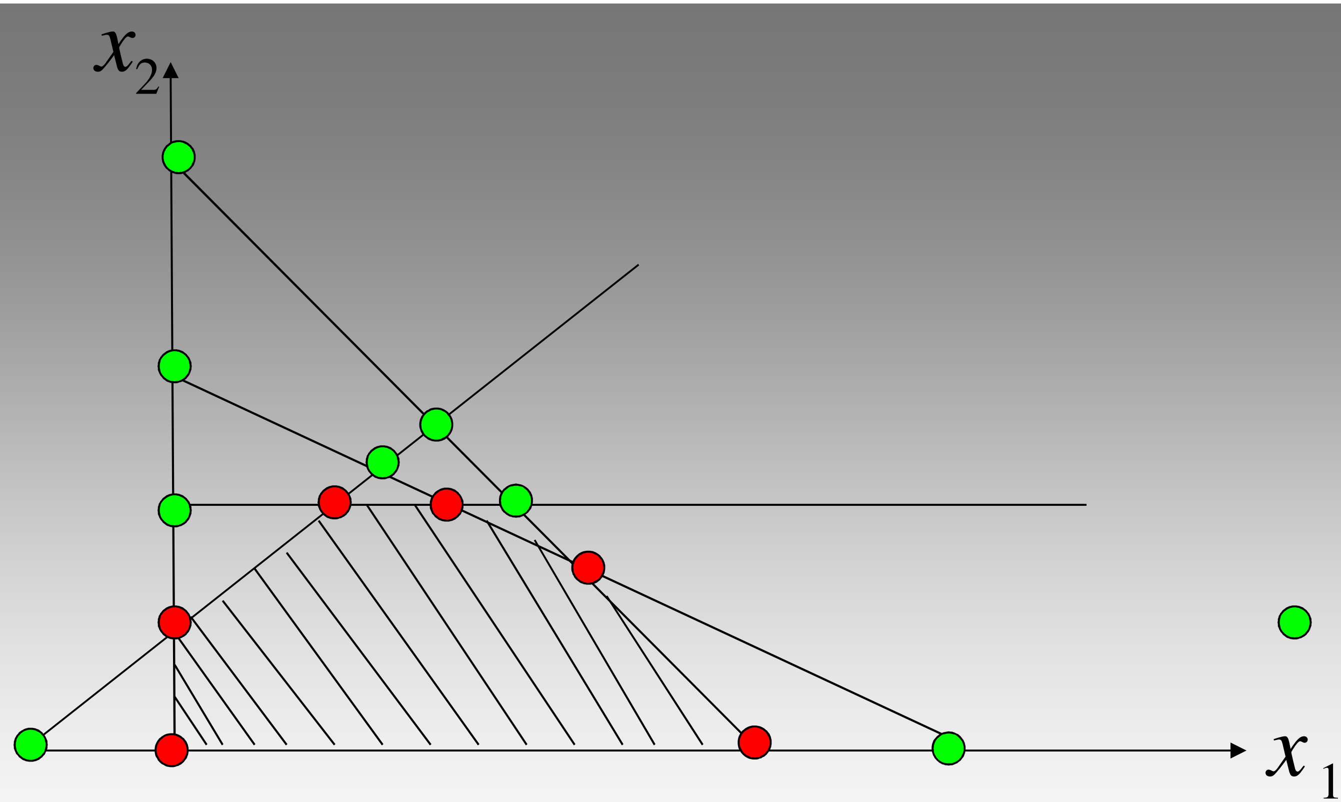
$$Max\ Z=\frac{38}{3}-\frac{4}{3}s_2-\frac{1}{3}s_1$$
$$st:\quad x_2-\tfrac{1}{3}s_2+\tfrac{2}{3}s_1=\tfrac{4}{3}$$
$$x_1+\tfrac{2}{3}s_2-\tfrac{1}{3}s_1=\tfrac{10}{3}$$
$$s_2-s_1+s_3=3$$
$$\tfrac{1}{3}s_2-\tfrac{2}{3}s_1+s_4=\tfrac{2}{3}$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \tfrac{3}{2} & 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \tfrac{3}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

به متغیر های پایه (بردار های واحد)دقت کنید . این سه مسئله یکسانند فقط هر کدام به تفکیک پایه و غیر پایه در هر گوشه نوشته شده اند



- Simplex روش کامپیوتری و قدم به قدم است که می تواند مسئله را در هر گوشه به تفکیک پایه و غیر پایه بیان کند.

روش SIMPLEX

این روش اولین بار در سال ۱۹۴۷ توسط دکتر جرج بی دانتزیگ مطرح شد و هنوز هم در نرم افزار های کامپیوتری از این روش حل استفاده شده است .

نرم افزارهایی که مسئله LP را حل می کنند عبارتند از :

LINGO &LINDO

STORM

TORA

LINPROG

WINQSB

در طول ترم با LINGO و WINQSB آشنا خواهید شد.

Simplex

- این روش مشابه روش جبری عمل می کند فقط در هر گوشه مسئله را به فرم جدولی مطرح می کند .
- قدم اول – استاندارد کردن
- قدم دوم – شروع از یک گوشه قابل قبول اولیه
- مقادیر سمت راست تابع هدف به سمت چپ منتقل کرده و تابع هدف را به صورت یک محدودیت می نویسیم و سپس مسئله را در جدول استانداردی به فرم زیر قرار می دهیم.
- فرض بر این است که همواره مبداء به عنوان یک گوشه شروع اولیه در اختیار است !

$$Z - 3x_1 - 2x_2 = 0$$

Simplex

متغیرپایه	اسامی کلیه متغیرها	مقدارسمت راست
اسامی متغیرهای پایه	ضرائب متغیرها در محدودیت ها	مقادیرسمت راست در محدودیت ها
z	ضرائب متغیر ها در تابع هدف	مقدارسمت راست در تابع هدف

x_B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
s_1	0	1	2	1	0	0	0	6
s_2	0	2	1	0	1	0	0	8
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0

Simplex

قدم سوم – (تعیین راستای حرکت) –(تعیین متغیر وارده به پایه) – (تعیین ستون لولا) –(بررسی شرائط بهینگی)

- متغیر غیر پایه با منفی ترین در سطر **Z** (در مسئله **Max**) را بعنوان متغیر وارده به پایه در نظر می گیریم ، ستون ضرائب این متغیررا به عنوان ستون لولا در نظر می گیریم ، اگر چنین متغیری موجود نباشد جدول فعلی (گوشه فعلی) بهینه می باشد و متوقف می شویم .

x_B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
s_1	0	1	2	1	0	0	0	6
s_2	0	2	1	0	1	0	0	8
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0

Simplex

قدم چهارم – (تعیین مقدار حرکت در راستای مربوطه) –(تعیین متغیر خروج از پایه) – (تعیین سطر لولا) –(بررسی شرائط شدنی بودن)

- برای تعیین حداکثر مقدار متغیر وارده به پایه از رابطه زیر استفاده می شود :

$$\text{حداکثرمتغیر وارده به پایه} = Min \left\{ \frac{(RHS)_i}{\text{عناصر ستون لولا}} \;/\; \text{عناصرستون لولا} \succ 0 \right\}$$

x_B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
s_1	0	1	2	1	0	0	0	6
s_2	0	2	1	0	1	0	0	8
s_3	0	−1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2
z	1	−3	−2	0	0	0	0	0

Simplex

- قدم پنجم – بروزآوری جدول سیمپلکس
- محل برخورد سطرو ستون لولا را عنصر لولا بنامید ، از ستون لولا در محل عنصر لولا و به کمک عنصر لولا بردار واحد بسازید.

x_B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
s_1	0	1	2	1	0	0	0	6
s_2	0	2	1	0	1	0	0	8
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0

عنصرلولا

Simplex

- جدول جدید به صورت زیر می باشد :

x_B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
s_1	0	0	$3/2$	1	$-1/2$	0	0	2
x_1	0	1	$1/2$	0	$1/2$	0	0	4
s_3	0	0	$3/2$	0	$1/2$	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2
z	1	0	$-1/2$	0	$3/2$	0	0	12

x_B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
x_2	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	$4/3$
x_1	0	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	$10/3$
s_3	0	0	0	-1	1	1	0	3
s_4	0	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	$2/3$
z	1	0	0	$1/3$	$4/3$	0	0	$38/3$

۴ نکته در جدول سیمپلکس

- ۱ – z در دو تکرار متوالی بایکدیگر چه رابطه ای دارد ؟

پاسخ :

$$Z_{next} = Z_{before} - (\text{ضریب متغیر وارده به پایه}) \times \min\{\text{نسبت ها}\}$$

x_B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
s_1	0	0	$3/2$	1	$-1/2$	0	0	2
x_1	0	1	$1/2$	0	$1/2$	0	0	4
s_3	0	0	$3/2$	0	$1/2$	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2
z	1	0	$-1/2$	0	$3/2$	0	0	12

x_B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
x_2	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	$4/3$
x_1	0	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	$10/3$
s_3	0	0	0	-1	1	1	0	3
s_4	0	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	$2/3$
z	1	0	0	$1/3$	$4/3$	0	0	$38/3$

$$Z = 12 - (-1/2) \times 4/3 = 38/3$$

- مثال – اطلاعات تکراری از حل یک مسئله LP از نوع ماکزیمم سازی به صورت زیر است ، اگر متغیر x_4 وارد پایه شده و باعث ۱۰۰ واحد افزایش در تابع هدف گردد بین A وB چه رابطه ای برقرار است ؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_3	0	0	1	-2	20
x_2	0	1	0	B	10
x_1	1	0	0	-1	30
$-Z$	0	0	0	A	

$$Z = \alpha \underbrace{-\frac{10}{B}(-A)}_{100} \quad \Rightarrow -\frac{10}{B}(-A) = 100 \Rightarrow A = 10B$$

۲– فقط اشتباه در انتخاب متغیر خروجی مسئله را با چه مشکلی مواجه می کند ؟

پاسخ : حتماً از فضای حل مسئله خارج می شویم .

حداقل یکی از مقادیر ستون **RHS** منفی می گردد

x_B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
s_1	0	0	$3/2$	1	$-1/2$	0	0	2
x_1	0	1	$1/2$	0	$1/2$	0	0	4
s_3	0	0	$3/2$	0	$1/2$	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2
z	1	0	$-1/2$	0	$3/2$	0	0	12

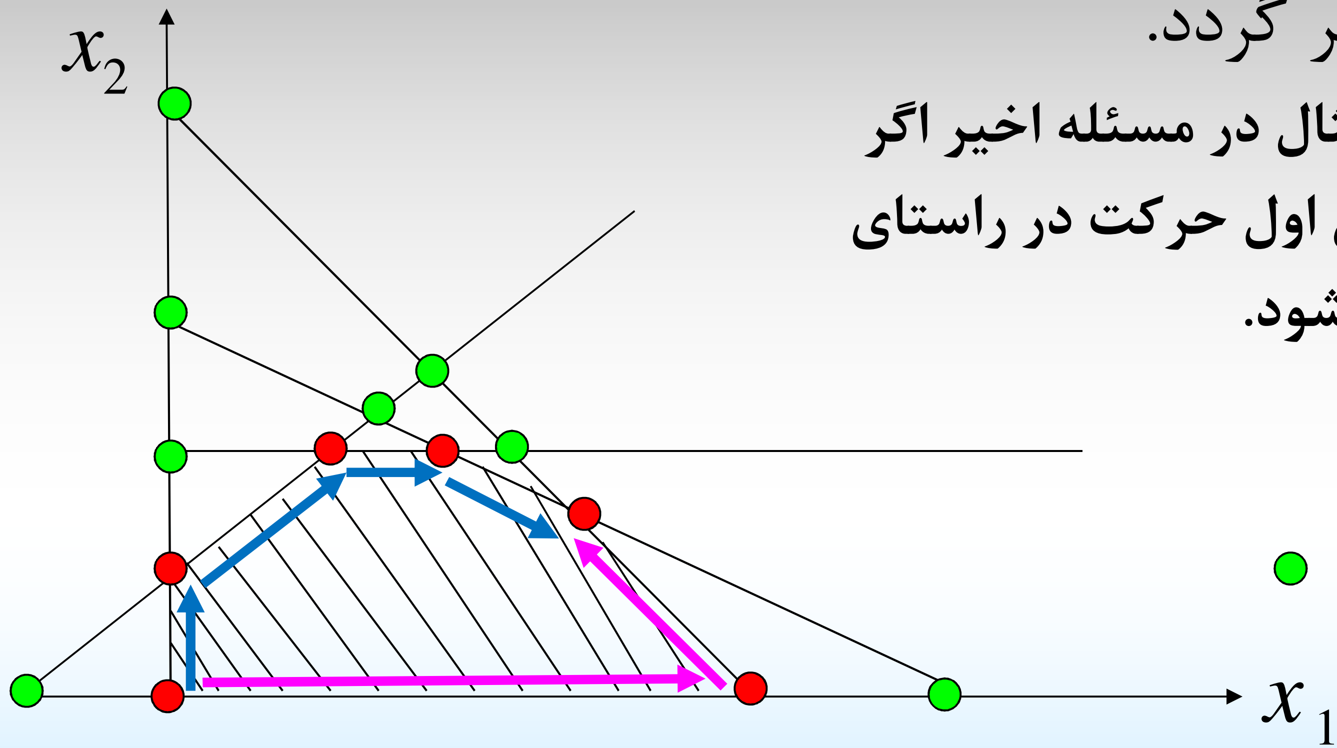
x_B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
s_1	0	0	0	1	-1	$-1/2$	0	-3
x_1	0	1	0	0	$1/3$	$-1/3$	0	$7/3$
x_2	0	0	1	0	$1/3$	$2/3$	0	$10/3$
s_4	0	0	0	0	$-1/3$	$-2/3$	1	$-4/3$
z	1	0	0	0	$5/3$	$1/3$	0	$41/3$

مثال :دراین جدول x_2 وارد پایه و s_1 از پایه خارج می گردد . حال فرض کنید اشتباها s_3 از پایه خارج شود. در این صورت جدول بعدی به صورت زیر است . همانطور که مشاهده می شود برخی از متغیر های پایه منفی شده اند.

- **۳ – فقط اشتباه در انتخاب متغیر ورودی مسئله را با چه مشکلی مواجه می کند ؟**

پاسخ : اگر مسئله دارای جواب باشد باز هم به جواب بهینه خواهیم رسید فقط ممکن است تعداد گوشه های مورد بررسی بیشتر گردد.

به طور مثال در مسئله اخیر اگر در جدول اول حرکت در راستای x_2 انجام شود.



۴ – آیا روش سیمپلکس با انتخاب درست متغیر ورودی و خروجی بیشترین مقدار بهبود را در تابع هدف ایجاد می کند؟

پاسخ : خیر ! چرا؟ به مثال زیر دقت کنید:

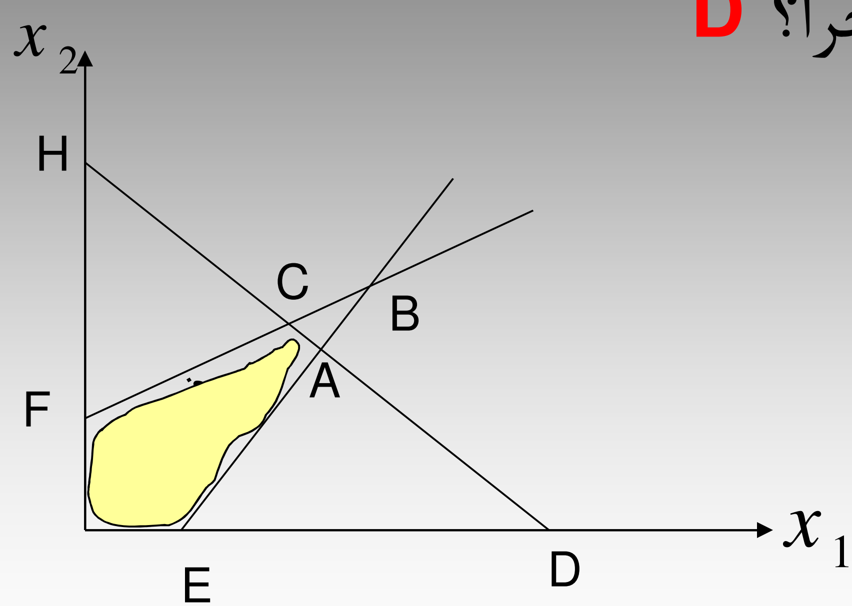
Max problem

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	Rhs
x_1	1	0	2	$1/20$	5
x_2	0	1	1	$1/30$	2
Z	0	1	-10	-1	10

$$Z_{next} = 10 - (-10) \times 2 = 30$$

$$Z_{next} = 10 - (-1) \times 60 = 70$$

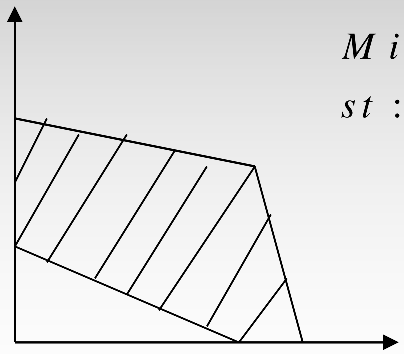
- در مسئله قبلی فرض کنید در حالت ترسیمی در نقطه A باشیم ، چنانچه x_4 وارد پایه و x_3 از پایه خارج گردد به کدام نقطه خواهیم رسید ؟ چرا؟ **D**



- در این حالت مقادیر متغیر های پایه چیست ؟
- با توجه به جدول تعداد گوشه های مجاور گوشه فعلی چه تعداد است ؟

حال فرض کنید مبداء جزء فضای حل نباشد

- مسئله LP زیر را در نظر بگیرید . به وضوح مشخص است که مبداء مختصات به عنوان گوشه قابل قبول شروع اولیه متعلق به فضای حل مسئله نمی باشد . حال بدون این آزمون مسئله را استاندارد کرده و درجدول سیمپلکس قرار می دهیم .



$$\begin{aligned} Min \quad & Z = 4x_1 + x_2 \\ st: \quad & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} Min \quad & Z = 4x_1 + x_2 \\ st: \quad & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - s_1 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \end{aligned}$$

x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
?	3	1	0	0	3
?	4	3	-1	0	6
s_2	1	2	0	1	4
Z	-4	-1	0	0	0

مشاهده می کنید که به تعداد محدودیت ها بردار واحد مستقل وجود ندارد ، یعنی دو متغیر پایه ای کم داریم .

توجه کنید که بردار واحد زیر متغیر s_2 مربوط به محدودیت سوم بوده که از نوع کوچکتر یامساوی است .

- بنابراین هرگاه پس از استاندارد سازی و قراردادن مسئله در جدول به تعداد محدودیت ها بردار مستقل واحد موجود نباشد این بدان معنی است که گوشه یا پایه شروع اولیه ای در اختیار نمی باشد و باید به یکی از دو روش زیر متوسل شد:

روش متغیر مصنوعی یا روش M بزرگ

روش دوفازیا دو مرحله ای

روش متغیر مصنوعی

- در این روش به محدودیت هایی که بردار واحد ایجاد نمی کنند متغیری بنام R بطور مصنوعی اضافه می کنیم . این عمل از نظر ریاضی اشتباه است زیرا به یک طرف معادله نمی توان مقداری را اضافه کرد . این کار به شرطی صحیح است که مقدار این متغیر در نهایت صفر باشد. بنابراین ضریب این متغیر را در تابع هدف Max برابر M- و در تابع هدف Min برابر M+ قرار می دهیم .(چرا؟)
- به مسئله زیر دقت کنید :

روش متغیر مصنوعی

- مسئله LP زیر را در نظر بگیرید : (x_3 , x_4 متغیر های مازاد و کمبود هستند.)

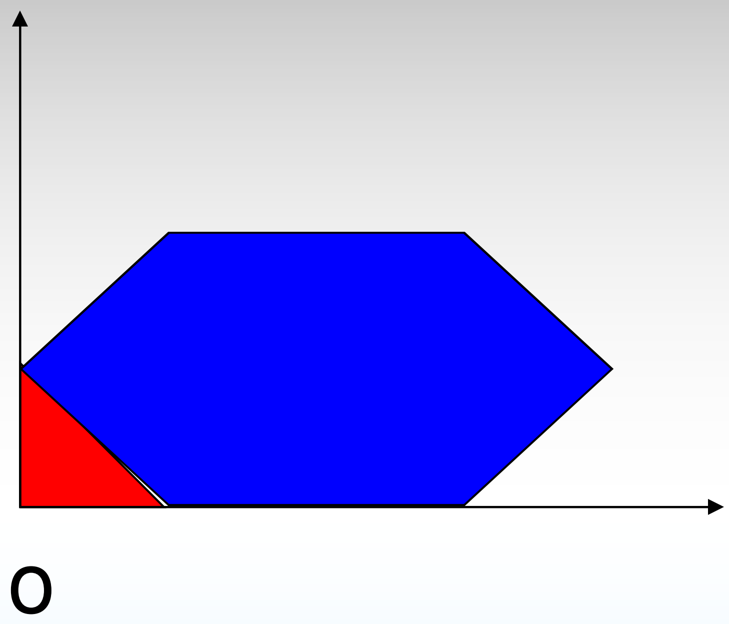
$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = 4x_1 + x_2 \\
&st: \quad 3x_1 + x_2 = 3 \\
&\qquad 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
&\qquad x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2 \\
&st: \quad 3x_1 + x_2 + R_1 = 3 \\
&\qquad 4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 = 6 \\
&\qquad x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- اضافه شدن متغیر مصنوعی به معنی بزرگتر شدن فضای حل مسئله LP به طور مصنوعی می باشد. برای درک این موضوع به شکل زیر دقت کنید.

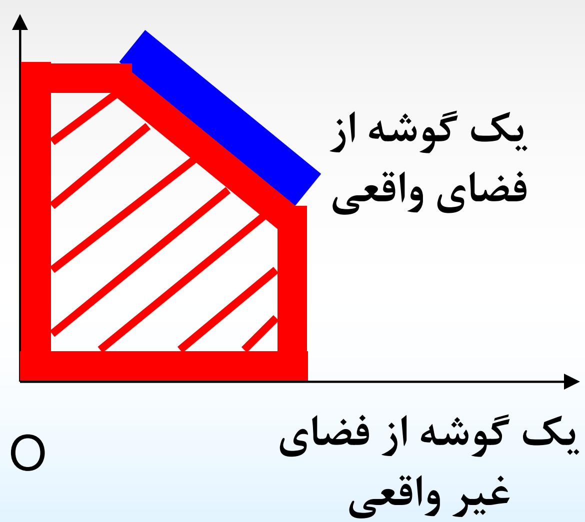
روش متغیر مصنوعی یاM بزرگ

- در شکل زیر فضای آبی رنگ فضای حل قابل قبول اصلی مسئله بوده و ناحیه قرمز رنگ ناحیه اضافه شده می باشد.



روش متغیر مصنوعی یاM بزرگ

- مسئله از نقطه O با الگوریتم سیمپلکس شروع به حل کرده و گوشه به گوشه جلو رفته تا به یکی از گوشه های فضای حل واقعی مسئله (ناحیه آبی رنگ) برسیم .در مثال اخیر با توجه به دوبعدی بودن مسئله فضای حل موجه (قابل قبول) یک خط می باشد با اضافه شدن دو متغیر مصنوعی ناحیه قرمزرنگ به ناحیه آبی رنگ اضافه می شود.



روش متغیر مصنوعی یا M بزرگ

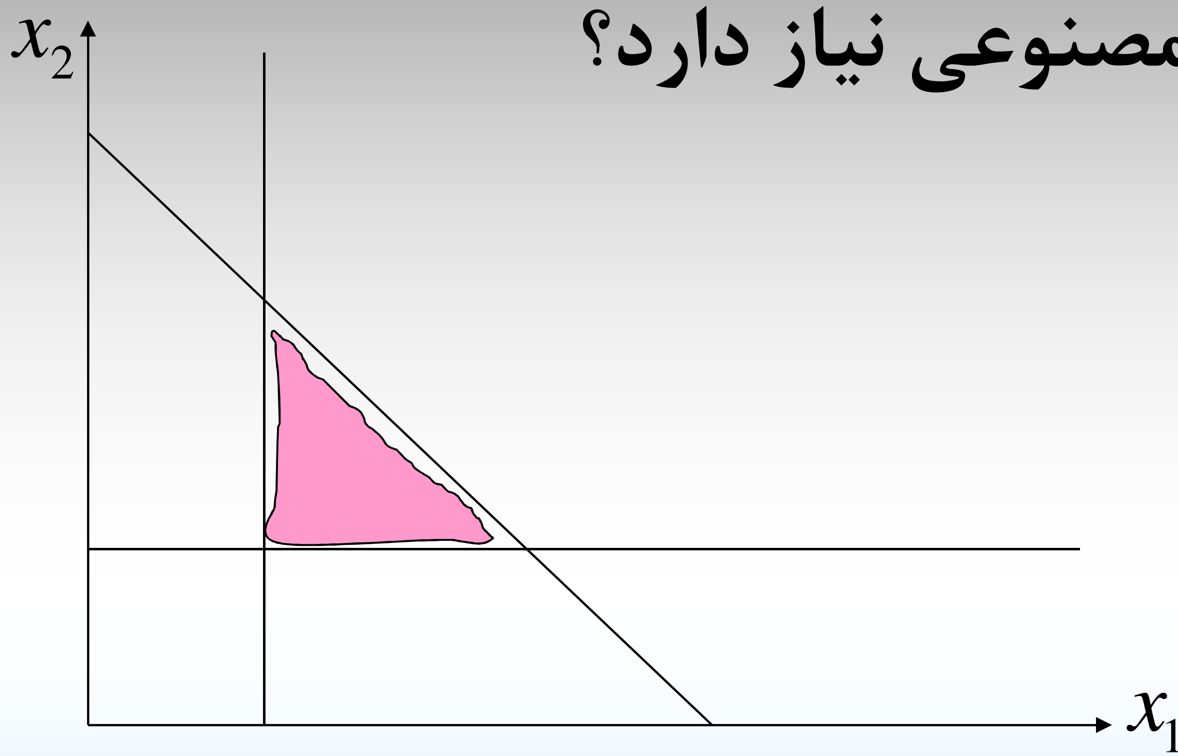
x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	RHS
R_1	3	1	0	0	1	0	3
R_2	4	3	-1	0	0	1	6
s_2	1	2	0	1	0	0	4
Z	-4	-1	0	0	$-M$	$-M$	0

باید صفر شوند

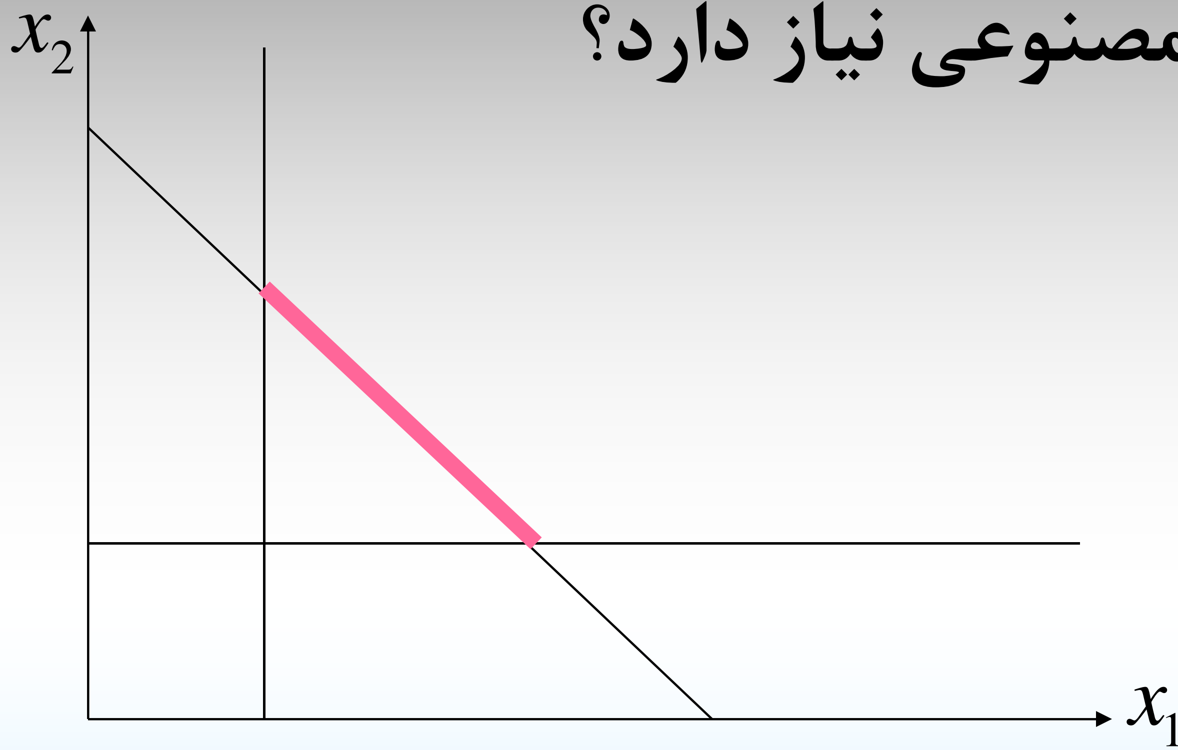
زیرا جواب در گوشه با مقدار Z هماهنگ نمی باشد

Iteration	Basic	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solution
0 (starting)	z	$-4+7M$	$-1+4M$	$-M$	0	0	0	$9M$
x_1 enters	R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_1 leaves	R_2	4	3	-1	0	1	0	6
	x_4	1	2	0	0	0	1	4
1	z	0	$\frac{1+5M}{3}$	$-M$	$\frac{4-7M}{3}$	0	0	$4+2M$
x_2 enters	x_1	1	1/3	0	1/3	0	0	1
R_2 leaves	R_2	0	5/3	-1	$-4/3$	1	0	2
	x_4	0	5/3	0	$-1/3$	0	1	3
2	z	0	0	1/5	$8/5-M$	$-1/5-M$	0	18/5
x_3 enters	x_1	1	0	1/5	3/5	$-1/5$	0	3/5
x_4 leaves	x_2	0	1	$-3/5$	$-4/5$	3/5	0	6/5
	x_4	0	0	1	1	-1	1	1
3	z	0	0	0	$7/5-M$	$-M$	$-1/5$	17/5
(optimum)	x_1	1	0	0	2/5	0	$-1/5$	2/5
	x_2	0	1	0	$-1/5$	0	3/5	9/5
	x_3	0	0	1	1	-1	1	1

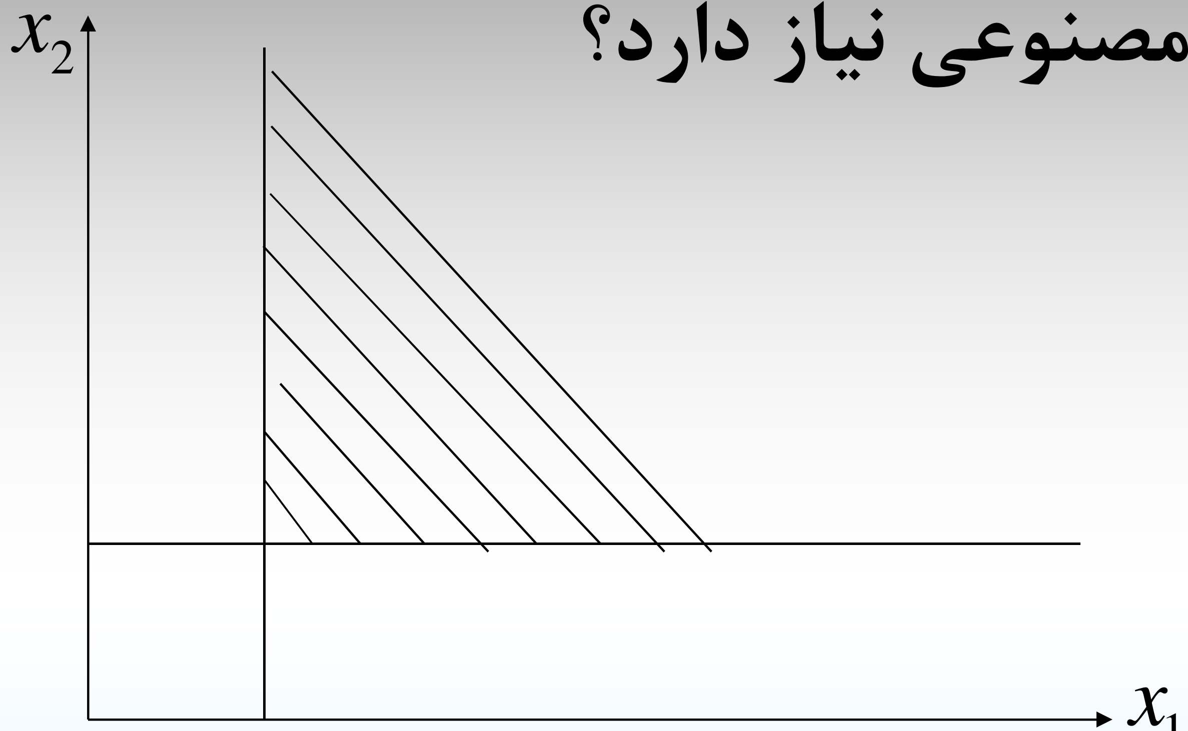
مثال ۱: فضای حل یک مسئله LPبه صورت زیر است اگر این مسئله را با روش سیمپلکس حل کنیم بدون در نظر گرفتن متغیر z مسئله به چند متغیر اعم از اصلی ، کمکی و مصنوعی نیاز دارد؟



مثال۲ : فضای حل یک مسئله LPبه صورت زیر است اگر این مسئله را با روش سیمپلکس حل کنیم بدون در نظر گرفتن متغیر z مسئله به چند متغیر اعم از اصلی ، کمکی و مصنوعی نیاز دارد؟



مثال۳ : فضای حل یک مسئله LPبه صورت زیر است اگر این مسئله را با روش سیمپلکس حل کنیم بدون در نظر گرفتن متغیر z مسئله به چند متغیر اعم از اصلی ، کمکی و مصنوعی نیاز دارد؟

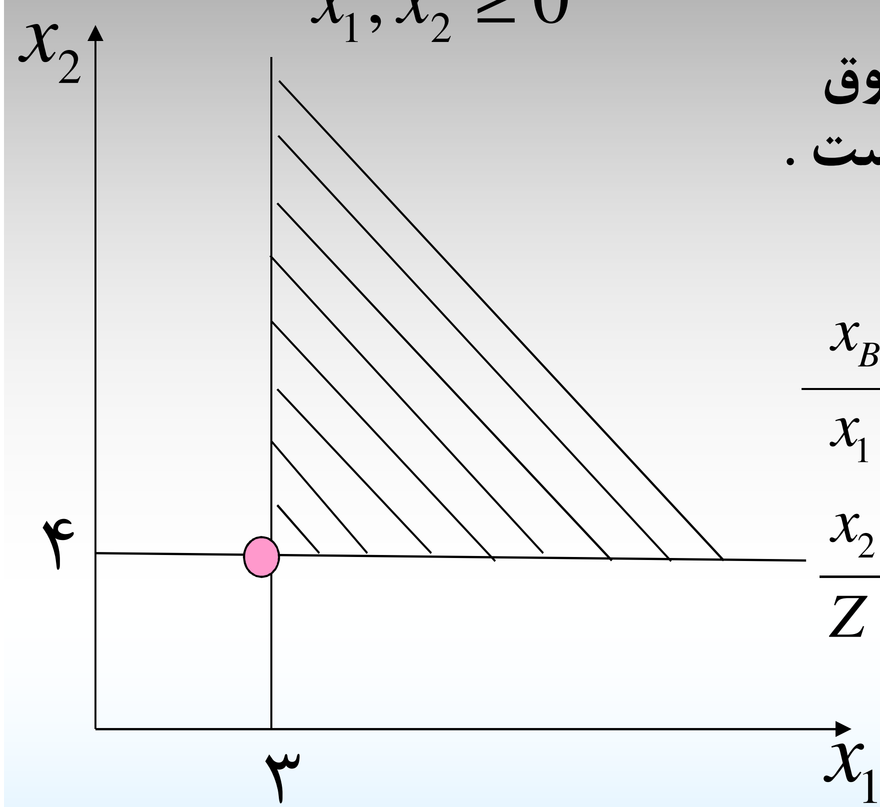


$$Min\ Z = 4x_1 + x_2$$

$$st: \quad x_1 \ge 3$$

$$x_2 \ge 4$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	Rhs
x_1	1	0	-1	0	3
x_2	0	1	0	-1	4
Z	-4	-1	0	0	0

پس از هماهنگ کردن Z با جواب در گوشه فوق جدول زیر حاصل می شود که جدول بهینه است .

x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	Rhs
x_1	1	0	-1	0	3
x_2	0	1	0	-1	4
Z	0	1	-4	-1	16

روش متغیر مصنوعی

- بنابراین اگر در مسئله ای به تعداد محدودیت ها بردار واحد مستقل داشته باشیم نیازی به روش متغیر مصنوعی نمی باشد. به طور مثال در مسئله زیر نیازی به متغیر مصنوعی نمی باشد.

$$
\begin{array}{llr}
Max & Z = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 & \\
st: & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 6 \\
 & \quad 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = 8 \\
 & \quad x_1, \ldots, x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

دوبردار واحد

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	Rhs
x_1	1	2	3	0	6
x_4	0	1.5	1	1	4
Z	-3	-4	-3	-2	0

پس از هماهنگ کردن **Z** با جواب در گوشه فوق جدول زیر حاصل می شود که جدول بهینه است .

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	Rhs
x_1	1	2	3	0	6
x_4	0	1.5	1	1	4
Z	0	5	8	0	26

روش دوفاز

- اگر مسئله ای را ماشین با روش متغیر مصنوعی حل کند ممکن است با مشکل مواجه گردد زیرا باید M را تخمین بزند و سپس مسئله را با روش متغیر مصنوعی حل کند ولی انسان هیچگاه در روش متغیر مصنوعی دچار مشکل نمی گردد . برای مقابله با این مشکل روش دیگری طراحی گردیده است که از نظر تعداد تکرار ها و از نظر فلسفه هندسی و از نظر تعداد متغیر مصنوعی شبیه روش متغیر مصنوعی می باشد ، فقط در این روش از M استفاده نمی شود.این روش را روش دومرحله ای یا روش دو فاز گویند .

روش دوفاز

- بعد ازاضافه کردن متغیرهای مصنوعی به تعداد مورد نیاز وارد فاز یک می شویم:
- فاز یک : تابع هدف اصلی مسئله را کنار گذاشته و تابع هدف جدیدی به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$Min \quad W = \text{مجموع متغیر های مصنوعی}$$

- سپس مسئله را با این تابع هدف وارد جدول سیمپلکس کرده و مسئله را حل کرده تا به جواب بهینه برسید. در پایان فاز یک دو حالت رخ می دهد یا $W=0$ شده که بدان معنی است که به اولین گوشه از فضای حل واقعی مسئله رسیده ایم . یا $W>0$ می باشد و این بدان معنی است که در یکی از گوشه های فضای حل غیرواقعی مسئله متوقف شده ایم زیرا مسئله اصلی فضای حل واقعی ندارد.

روش دوفاز

- شرط ورود به فاز ۲ صفر شدن W در انتهای فاز یک می باشد. بعد از صفر شدن W وارد فاز ۲ می شویم :
- فاز ۲ : در فاز ۲ کارهای زیر باید به ترتیب انجام شوند:

۱- تابع هدف اصلی مسئله را در جدول نهایی فاز یک جانشین تابع هدف W کنید (چرا؟).

۲ – ستون های R ها را حذف کنید .

۳ – پایه ها را بروز آوری کنید.

۴ – در صورت نیاز مسئله را با سیمپلکس ادامه دهید.

B. The Two-Phase Technique

As illustrated by the last computer drill above, a drawback of the M-technique is the possible computational error that could result from assigning a very large value to the constant M. The two-phase method is designed to alleviate this difficulty. Although the artificial variables are added in the same manner employed in the M-technique, the use of the constant M is eliminated by solving the problem in two phases (hence the name "two-phase" method). These two phases are outlined as follows:

Phase I. Augment the artificial variables as necessary to secure a starting solution. Form a new objective function that seeks the *minimization* of the *sum* of the artificial variables subject to the constraints of the original problem modified by the artificial variables. If the *minimum* value of the new objective function is zero (meaning that all artificials are zero), the problem has a feasible solution space. Go to phase II. Otherwise, if the minimum is positive, the problem has no feasible solution. Stop.

Phase II. Use the optimum basic solution of phase I as a starting solution for the original problem.

We illustrate the procedure using the M-technique example in Section 3.3.1A.

Phase I. Since we need artificials R_1 and R_2 in the first and second equations, the phase I problem reads as

$$\text{minimize } r = R_1 + R_2$$

subject to

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 \qquad + R_1 \qquad &= 3 \\
4x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad + R_2 \qquad &= 6 \\
x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_4 &= 4 \\
x_1, x_2, x_3, R_1, R_2, R_2, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Iteration	Basic	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solution
0	W	7	4	−1	0	0		9
(starting)	R_1	3	1	0	1	0	0	3
x_1 enters	R_2	4	3	−1	0	1	0	6
R_1 leaves	x_4	1	2	0	0	0	1	4
1	W	0	$5/3$	−1	$-4/3$	0	0	2
x_2 enters	x_1	1	1/3	0	1/3	0	0	1
R_2 leaves	R_2	0	5/3	−1	−4/3	1	0	2
	x_4	0	5/3	0	−1/3	0	1	3
2	W	0	0	0	−1	−1	0	0
x_3 enters	x_1	1	0	1/5	3/5	−1/5	0	3/5
x_4 leaves	x_2	0	1	−3/5	−4/5	3/5	0	6/5
	x_4	0	0	1	1	−1	1	1

$$W - R_1 - R_2 = 0$$

$$Z - 4x_1 - x_2 = 0$$

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	Solution
z	0	0	1/5	0	18/5
x_1	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	1	−3/5	0	6/5
x_4	0	0	1	1	1

z	0	0	0	−1/5	17/5
x_1	1	0	0	−1/5	2/5
x_2	0	1	0	3/5	9/5
x_3	0	0	1	1	1

حالات خاص در مسئله LP

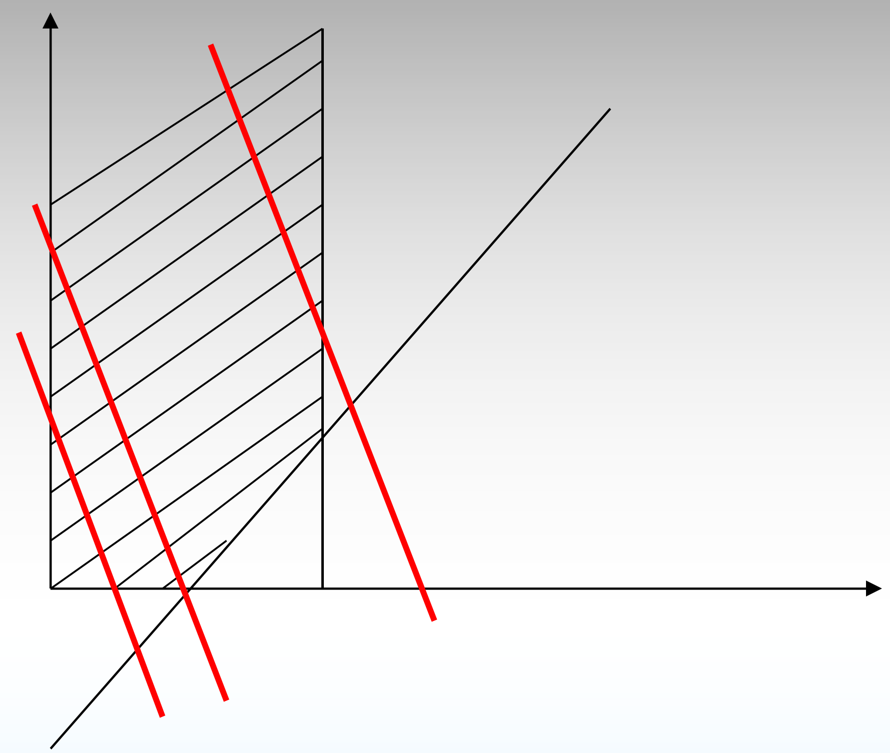
- ۶ حالت خاص در مسئله LP رخ می دهد :
- **۱ – بیکران بودن فضا و بیکران بودن Z**
- Unbounded space & unbounded solution
- **۲ – بیکران بودن فضا و محدود بودن Z**
- Unbounded space & bounded solution
- **۳ – تباهیدگی دائم**
- Permanent Degeneracy
- **۴ – تباهیدگی موقت**
- Temporary Degeneracy
- **۵ – جواب بهینه چندگانه**
- Alternative optimal solution
- **۶ – مسئله جواب ندارد**
- No exist solution

حالات خاص در LP

حالت ۱– بیکران بودن فضا و بیکران بودن Z

- مسئله LP زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = 2x_1 + x_2 \\ &st: \quad x_1 - x_2 \le 10 \\ &\qquad x_1 \le 20 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



حل Simplex

حل مسئله با استفاده از روش سیمپلکس به صورت زیر است:

x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
s_1	1	-1	1	0	10
s_2	1	0	0	1	20
Z	-2	-1	0	0	0

x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_1	1	-1	1	0	10
s_2	0	1	-1	1	10
Z	0	-3	2	0	20

x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_1	1	0	0	1	10
x_2	0	1	-1	1	10
Z	0	0	-1	3	50

دراین جدول ورودی داریم ولی خروجی نداریم .

تعریف ریاضی فضای بیکران

شرط لازم و کافی برای آنکه فضای یک مسئله متعارف LP

به صورت $\begin{matrix} AX \le b \\ X \ge 0 \end{matrix}$ بیکران باشد آن است که برداری مثل d وجود

داشته باشد ، بطوریکه $d \ge 0 \, , \, d \ne 0$ و این بردار d از

رابطه زیر حاصل شده باشد.

$$Ad \le 0$$

تعریف ریاضی فضای بیکران

تعریف فوق برای سیستم $\begin{matrix} AX = b \\ X \geq 0 \end{matrix}$ به صورت زیر خواهد بود:

بطوریکه :

$$\exists\, d \quad d \neq 0 \quad \&\, d \geq 0$$

و d از رابطه زیر حاصل شده باشد:

$$Ad = 0$$

با نرمالیزه کردن بردار d خواهیم داشت :

تعریف ریاضی فضای بیکران

مجموعه جهت های دورشونده

$$D \;=\{d\,/\,d\neq 0\;\&\;d\geq 0\;\&\;Ad=0\}$$

مجموعه جهت های نرمالیزه شده

$$D^{*}=\{d\,/\,d\neq 0\;\&\;d\geq 0\;\&\;1d=1\;\&\;Ad=0\}$$

تعریف جهت راسی : جهتی است که نمی توان آن را از هیچ دو جهت دورشونده متمایز دیگری نوشته شود .

چنانچه حاصل ضرب cd>0 در مسئله Max مقدار Z هم بیکران می باشد.

در مثال اخیر داریم :

تعریف ریاضی فضای بیکران

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad d=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix} \quad Ad\le 0 \quad => \begin{pmatrix}d_1-d_2\le 0\\ d_1\le 0\end{pmatrix}$$

$$==> \quad d_1=0 \quad \& \quad d_2\ge 0 \qquad \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$cd\succ 0 \quad ==> \quad (2 \quad 1)\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=1\succ 0$$

برگشت به منوی اصلی

مثال – در مورد فضای حل دو مسئله زیر قضاوت کنید :

$$st: \quad x_1 + x_2 = 3$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$$
$$x_{1,2,3} \geq 0$$

$$st: \quad x_1 + x_2 + x_4 = 3$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 6$$
$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0$$

$st: \; d_1 + d_2 = 3$ $3d_1 + 2d_2 - d_3 = 6$ $d_{1,2,3} \geq 0$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$st: \; d_1 + d_2 + d_4 = 3$ $2d_1 + 3d_2 - d_3 + d_5 = 6$ $d_{1,2,3,4,5} \geq 0$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

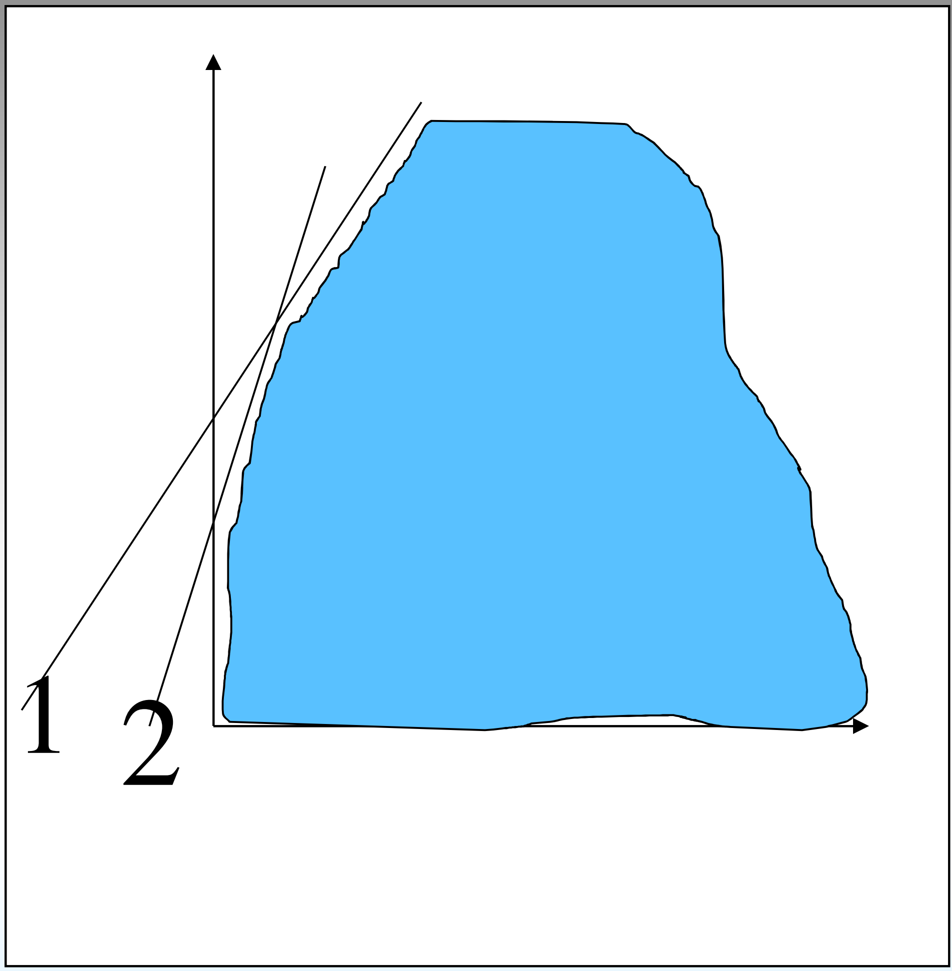
- مثال – تعداد بردارهای دورشونده و تعداد جهت های دورشونده و جهت های راسی در مسئله زیر چه تعدادی است ؟

$st:$

$$1)\qquad -x_1+x_2\le 6$$

$$2)\qquad -2x_1+x_2\le 4$$

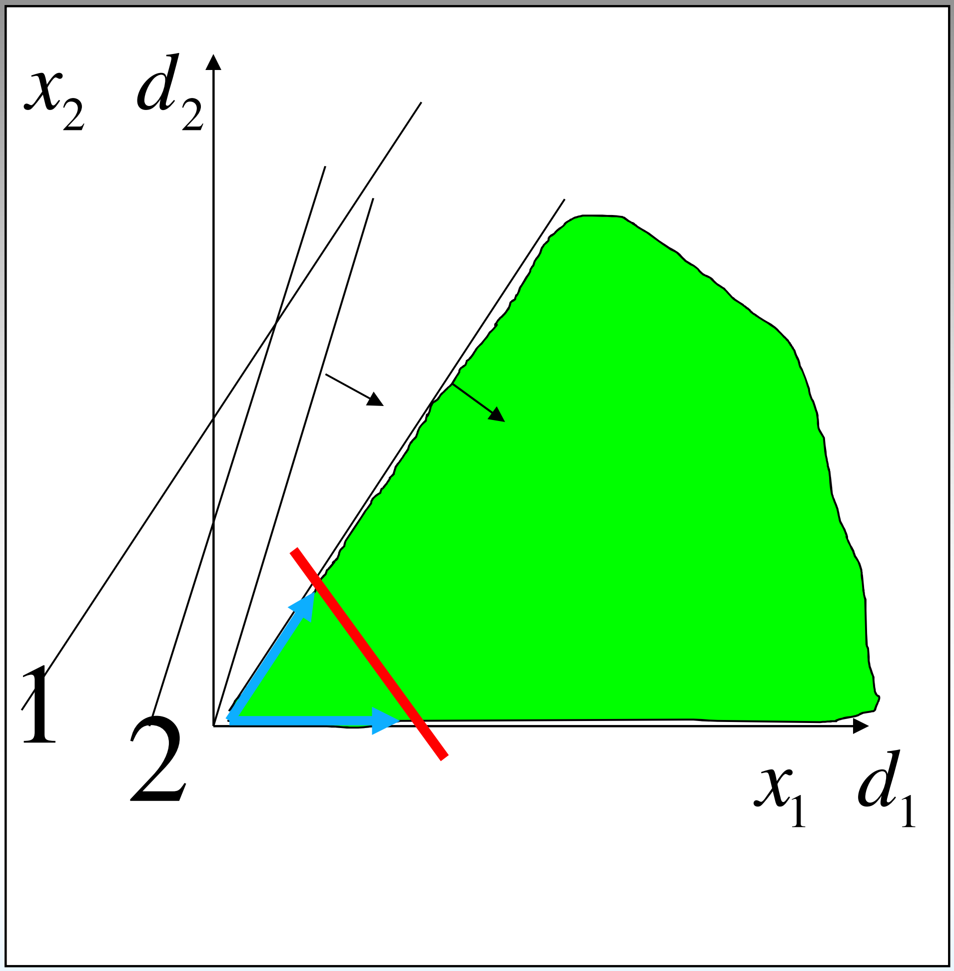
$$x_{1,2}\ge 0$$



$st:$

$$-d_1 + d_2 \le 0$$
$$-2d_1 + d_2 \le 0$$
$$d_{1,2} \ge 0$$

$$d_1 + d_2 = 1$$

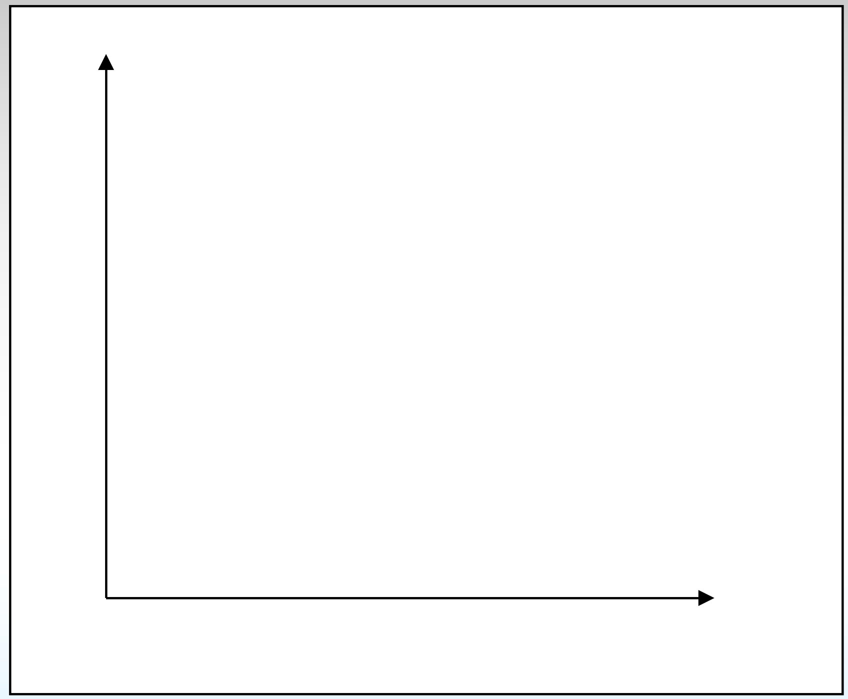


- مثال – شرط لازم و کافی روی a و b بطوریکه مسئله زیر یک جواب بهینه متناهی داشته باشد چیست ؟

$$Max \;\; Z = x_1 + x_2$$

$$st: \qquad a x_1 + b x_2 \leq 1$$

$$x_{1,2} \geq 0$$



• مثال – دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید. نقطه (۰و۰ و۰ و۴ و ۱۲) یک گوشه قابل قبول برای دستگاه فوق می باشد ، گوشه مجاور این گوشه چیست ؟

$$st: \quad x_1 + x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 2x_5 = 16$$

$$x_2 + x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 4$$

$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0$$

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Rhs
x_1	1	1	4	12	2	16
x_2	0	1	1	3	-4	4

• مثال – مسئله min سازی زیر را در نظر بگیرید. اگر a=3 باشد یک جواب شدنی با Z=-200 کدام است ؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1		-2		1		56
x_3		-1		2		23
x_5		0		3		10
Z		a		b		-8

$$-(3\times x_2)-8=-200 \Rightarrow x_2=64$$
$$x_1=56+2\times 64=184$$
$$x_3=23+64=87$$
$$x_5=10 \quad \& \quad x_4=0$$

- مثال – جدول یک مسئله **LP** به صورت زیر است اگر تابع هدف در این مسئله به صورت $Max \ \ Z = -x_1 + 3x_3 - 4x_5$ باشد جواب بهینه این مسئله را بدست آورید؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z						
x_3	0	-1	1	-2	-1	5
x_1	1	-2	0	-1	6	6

	0	-1	0	-5	-5	9

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$-\cancel{3}$	$\cancel{0}$	$\cancel{4}$	
x_3	0	-1	1	-2	-1	5
x_1	1	-2	0	-1	6	6

3

-1

حالت دوم : فضا بیکران ولی Z کراندار

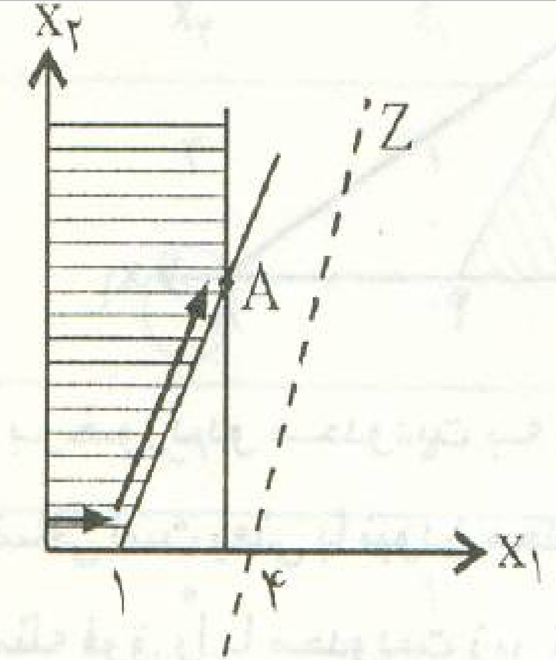
- مسئله LP زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } z = ۶x_۱ - ۲x_۲$$

$$\text{st: } ۲x_۱ - x_۲ \leq ۲$$

$$x_۱ \leq ۴$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$



حالت دوم : فضا بیکران ولی Z کراندار

x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
s_1	۲	-۱	۱	۰	۲
s_2	۱	۰	۰	۱	۴
z	-۶	۲	۰	۰	۰
x_1	۱	-۱/۲	۱/۲	۰	۱
s_2	۰	۱/۲	-۱/۲	۱	۳
z	۰	-۱	۳	۰	۶
x_1	۱	۰	۰	۱	۴
x_2	۰	۱	-۱	۲	۶
z	۰	۰	۲	۲	۱۲

- حل سیمپلکس این مسئله به صورت زیر است :

برگشت به منوی اصلی

حالت سوم :تباهیدگی دائم

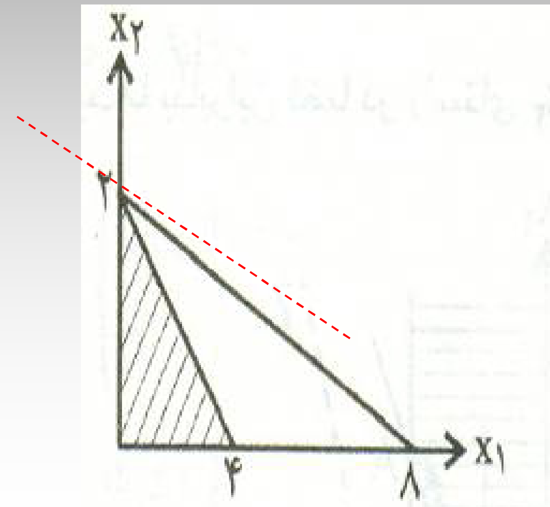
مسئله LP زیرو حل ترسیمی آن را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } z = 3x_1 + 9x_2$$

$$\text{st: } x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

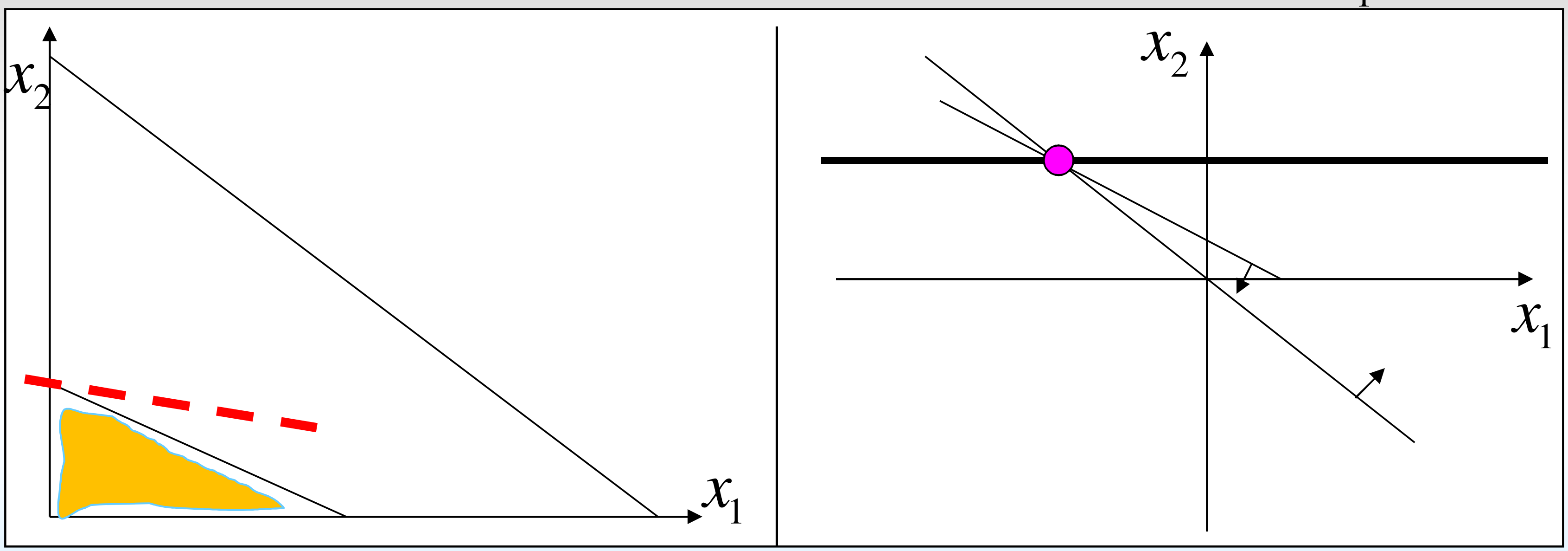


$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 2 \end{cases} \Rightarrow z^* = 18$$

- حال مسائل زیر را حل کنید ؟

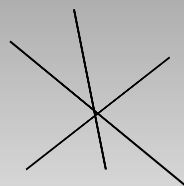
$$Max \quad Z = 3x_1 + 9x_2$$
$$st: \quad x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_{1,2} \ge 0$$

$$Max \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$
$$st: \quad x_1 + x_2 \ge 0$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$x_2 = 6$$
x_1 آزاد

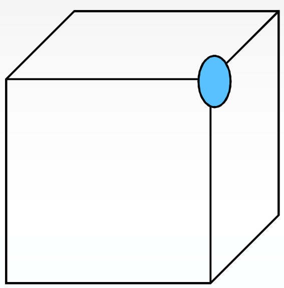


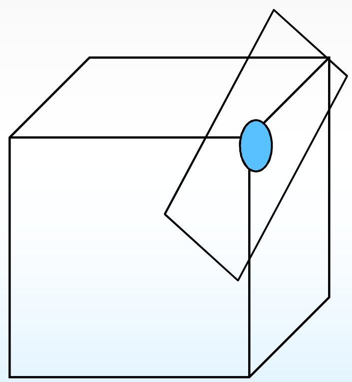
در فضای دوبعدی از برخورد ۲ تا محدودیت (۲ خط) یک گوشه حاصل می شود.

حال اگر سه خط یا بیشتر از یک گوشه عبور کندگوشه مزبور را تباهیده گویند.



در فضای سه بعدی از برخورد سه محدودیت (هر محدودیت یک صفحه) یک کنج حاصل می شود.

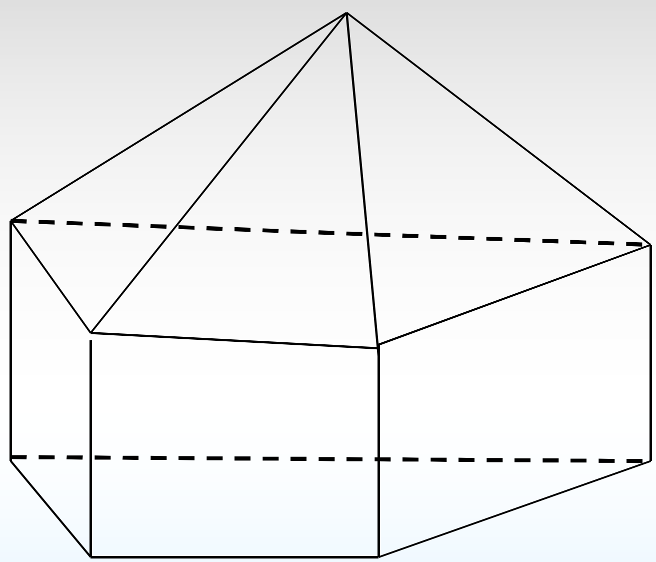




عبور بیش از سه صفحه از یک کنج

بنا براین در یک فضای **n** بعدی اگر بیش از بعد فضا یعنی **n** محدودیت از گوشه ای عبور کند گوشه مزبور تباهیده است .

مثال : هرم زیر را در نظر بگیرید اگر تعداد گوشه های تباهیده را **x** و تعداد محدودیت زائد را **y** بنامیم آنگاه **x** و **y** چقدر است ؟



حالت سوم :تباهیدگی دائم

در صورتی که مسئله با روش سیمپلکس حل شود داریم :

x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RH
s_1	۱	۴	۱	۰	۸
s_2	۱	۲	۰	۱	۴
	-۳	-۹	۰	۰	۰
s_1	-۱	۰	۱	-۲	$\boxed{۰}$
x_2	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲
z	$\frac{۳}{۲}$	۰	۰	$\frac{۹}{۲}$	۱۸

جواب بهینه

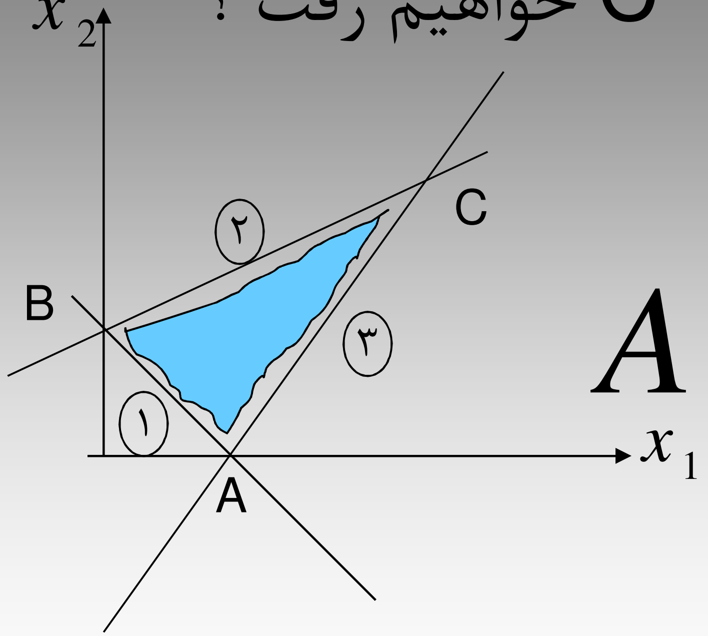
برگشت به منوی اصلی

- بنابراین صفر در RHS در محدودیت ها نشانه تباهیدگی است .
- هرگاه خروجی منحصربفرد نباشد جدول بعدی تباهیده است.
- تباهیدگی الزاماً تعدد پایه را باعث نمی گردد ، اما تعدد پایه الزاماً تباهیدگی را باعث می شود. به مثال زیر دقت کنید :

$$
\begin{aligned}
&Max \quad or \quad Min \quad Z = cx \\
&st: \qquad x_1 = 0 \\
&\qquad\qquad x_2 = 0 \\
&\qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	RHS
x_1	1	0	0
x_2	0	1	0
Z			

• مثال – در شکل زیر اگر در نقطه A باشیم و متغیر های (s_2, x_1, s_3) در پایه باشند حداقل با چند تکرار به نقطه C خواهیم رفت ؟



A

x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Rhs
s_2						>0
x_1						>0
s_3						0

C

x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Rhs
x_2						>0
x_1						>0
s_1						>0

- مثال : جواب بهینه مسئله LP زیر چقدر است ؟

$$Max \quad Z = 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 6x_4$$

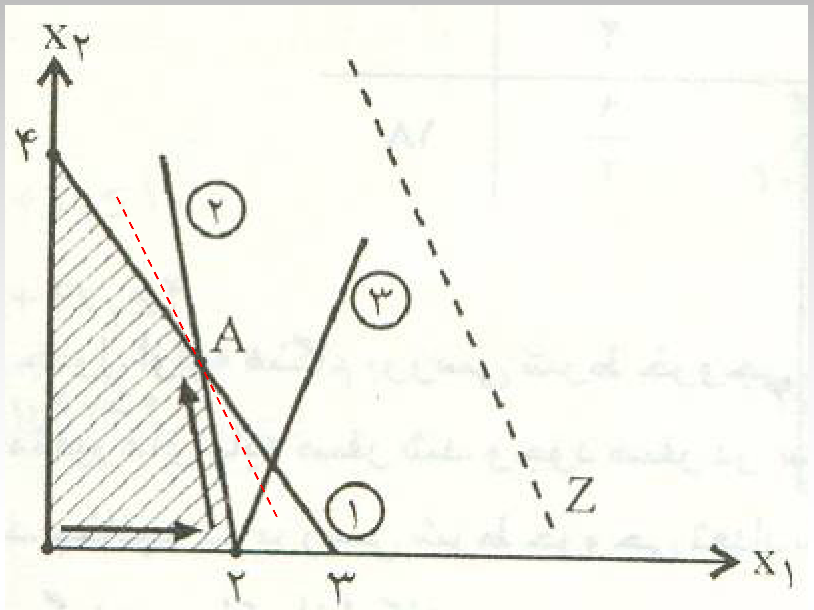
$$st: \quad 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 270$$

$$x_i \ge 0 \quad i \in 1,2,3,4$$

حالت چهارم :تباهیدگی موقت

مسئله LP زیرو حل ترسیمی آن را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\text{Max } z &= 3x_1 + 2x_2 \\
\text{st: } 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\
4x_1 + x_2 &\leq 8 \\
4x_1 - x_2 &\leq 8 \\
x_1 ,\, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$



حالت چهارم :تباهیدگی موقت

از آنجائیکه حداقل نسبت ها صفر نمی باشد لذا از تباهیدگی خارج می شویم :

x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS	
s_1	۴	۳	۱	۰	۰	۱۲	
s_2	۴	۱	۰	۱	۰	۸	
s_3	۴	۱-	۰	۰	۱	۸	
z	۳-	۲-	۰	۰	۰	۰	
s_1	۰	۲	۱	۱-	۰	۴	
x_1	۱	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	۲	
s_3	۰	$\boxed{-2}$	۰	۱-	۱	$\boxed{0}$	حالت تبهگنی
z	۰	$-\frac{5}{4}$	۰	$\frac{3}{4}$	۰	۶	
x_2	۰	۱	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۰	۲	
x_1	۱	۰	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	۰	$\frac{3}{2}$	رفع تبهگنی
s_3	۰	۰	۱	۲-	۱	۴	
z	۰	۰	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{17}{2}$	

برگشت به منوی اصلی

حالت پنجم :جواب بهینه چند گانه

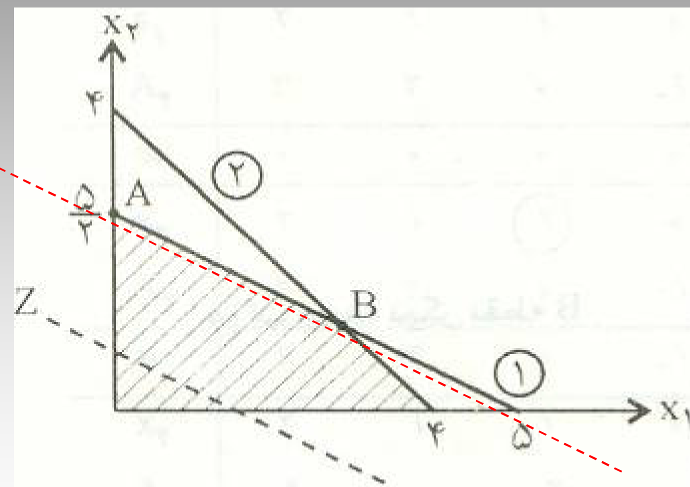
مسئله LP زیر و حل ترسیمی آن را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\text{st: } x_1 + 2x_2 \le 5$$

$$x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_1 , x_2 \ge 0$$



تمام نقاط خط $AB \in \alpha A + (1-\alpha)B$

$$\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3\alpha \\ 1+1/5\alpha \end{bmatrix} \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

به نکات زیر دقت کنید :

- آیا اگر تابع هدف موازی یکی از محدودیت های مسئله باشد دارای جواب بهینه چند گانه می باشیم ؟

- دو تعریف از محدودیت های مسئله LP موجود است :
- ۱- محدودیت های کارکردی functional constraints
- ۲- محدودیت های عمل کننده binding constraints

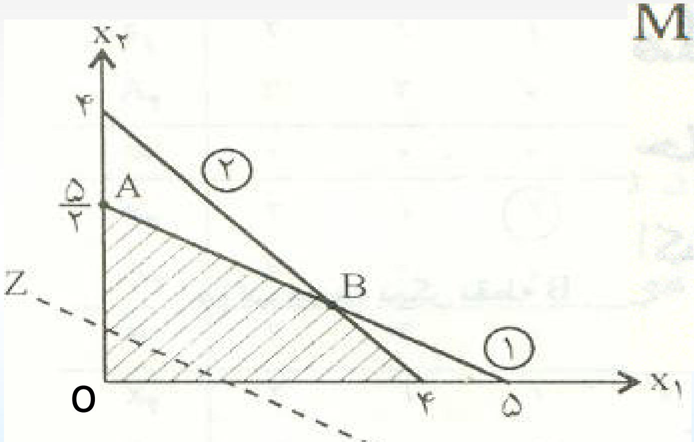
محدودیت های کارکردی

- به کلیه محدودیت های مسئله LP اطلاق می گردد. اعم از زائدو غیر زائد.

- بنابراین اگر یک مسئله LP دارای ۱۰۰ محدودیت باشد ، کلیه این محدودیت ها کارکرده و و از اشتراک آن ها فضای حلی ممکن است ایجاد شود.

محدودیت های عمل کننده

- این محدودیت ها همواره در نقطه ای مورد سئوال قرار می گیرند ، و به محدودیت هایی اطلاق می گردد که S (slack یا surplus) در نقطه مورد نظر در آن ها صفر باشد.
- به طور مثال در مسئله اخیری که حل شد داریم :



$$\text{Max } z = ۲x_۱ + ۴x_۲$$

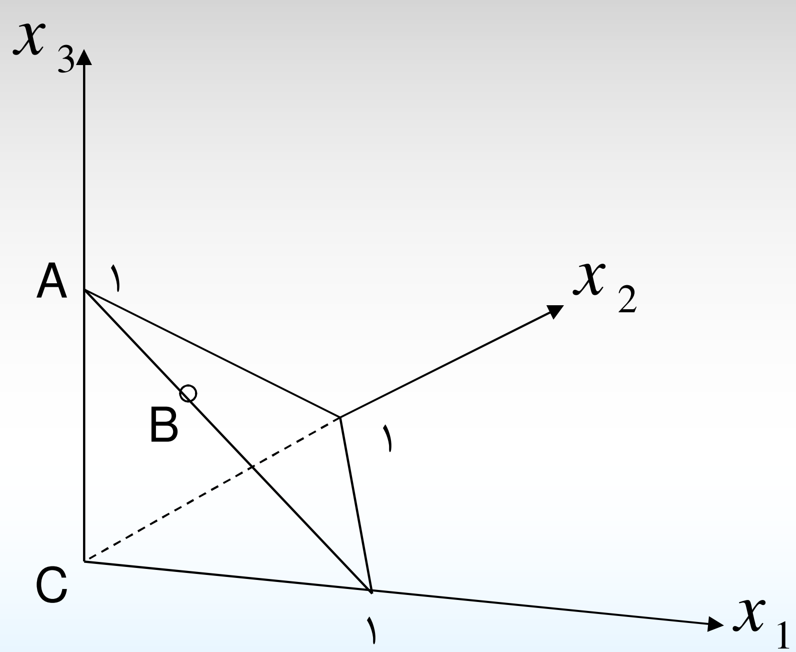
$$\text{st: } x_۱ + ۲x_۲ \le ۵ \quad ۱$$

$$x_۱ + x_۲ \le ۴ \quad ۲$$

$$x_۱ ، x_۲ \ge ۰$$

۳ ۴

- در نقطه B محدودیت های ۱ و ۲ عمل کننده اند.
- در نقطه A محدودیت های ۱و ۳ عمل کننده اند.
- در نقطه o محدودیت های ۳ و ۴ عمل کننده اند.
- مثال – در شکل زیر در نقاط A ،BوC به ترتیب چه تعداد محدودیت عمل کننده اند؟



- آیا اگر تابع هدف موازی یکی از محدودیت های **عمل کننده در نقطه بهینه** باشد دارای جواب بهینه چند گانه می باشیم ؟

- آیا اگر تابع هدف موازی یکی از محدودیت های **عمل کننده غیر زائد در نقطه بهینه** باشد دارای جواب بهینه چند گانه می باشیم ؟

ادامه حالت پنجم :جواب بهینه چند گانه

حل سیمپلکس مسئله به صورت زیر است :

x_B	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	RHS	
$s_۱$	۱	۲	۱	۰	۵	
$s_۲$	۱	۱	۰	۱	۴	
z	-۲	-۴	۰	۰	۰	
$x_۲$	۱/۲	۱	۱/۲	۰	۵/۲	
$s_۲$	۱/۲	۰	-۱/۲	۱	۳/۲	جواب بهینه دیگر نقطه B
z	$\boxed{۰}$	۰	۲	۰	۱۰	
$x_۲$	۰	۱	۱	-۱	۱	جواب بهینه نقطه A
$x_۱$	۱	۰	-۱	۲	۳	
z	۰	۰	۲	۰	۱۰	

برگشت به منوی اصلی

- بنابراین شرایط وجود جواب بهینه چندگانه به صورت زیر است :
- ۱ – جدول نهایی باشد .
- ۲ – ضریب تابع هدف متغیر غیر پایه در جدول نهایی صفر باشد.
- ۳ – شرط مینیمم نسبت ها صفر نباشد.

- مثال – در مسئله LP زیر در چه صورت نقطه $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ جواب بهینه است ؟

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= c_1x_1 + c_2x_2 \\ st: \quad & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_{1,2} \ge 0 \end{aligned}$$

- مثال – جدول تکرای از یک مسئله LP از نوع ماکزیمم سازی به صورت زیر است ، این مسئله در چه حالت خاصی بسر می برد ؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_1	1	0	1	2	2
x_2	0	1	2	1	0
Z	0	0	0	2	10

- مثال – در مسئله قبل اگر عناصر زیر متغیر x_3 بترتیب a و b باشند ، تحت چه شرایطی مسئله دارای چندین گوشه بهینه است .

- مثال – با توجه به فرض در مثال فوق تحت چه شرایطی مسئله دارای یک گوشه بهینه و بیشمار غیر گوشه بهینه است.

مثال - برای هریک از حالات قبل یک شکل در فضای دو بعدی رسم کنید ؟

حالت ششم :جواب وجود ندارد

مسئله LP و حل ترسیمی آن را در نظر بگیرید:

مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

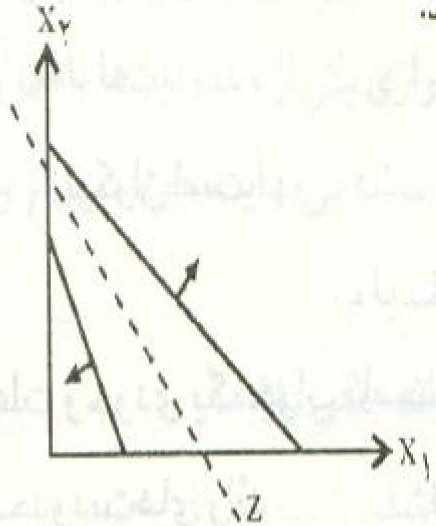
$$\text{Max } z = ۳x_۱ + ۲x_۲$$

$$\text{st:} \quad ۲x_۱ + x_۲ \leq ۲$$

$$۳x_۱ + ۴x_۲ \geq ۱۲$$

$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

حل ترسیمی این مسئله حاکی از نداشتن فضای قابل قبول می‌باشد.



حالت ششم :جواب وجود ندارد

حل به روش سیمپلکس به صورت زیر است :

$\text{Min } w = A_{۲}$

x_B	$x_{۱}$	$x_{۲}$	$s_{۱}$	$s_{۲}$	$A_{۲}$	RHS	
$s_{۱}$	۲	۱	۱	۰	۰	۲	
$A_{۲}$	۳	۴	۰	-۱	۱	۱۲	
w	۰	۰	۰	۰	-۱	۰	
$s_{۲}$	۲	۱	۱	۰	۰	۲	بروزآوری پایه $A_{۲}$
$A_{۲}$	۳	۴	۰	-۱	۱	۱۲	
w	۳	۴	۰	-۱	۰	۱۲	
$x_{۲}$	۲	۱	۱	۰	۰	۲	جواب بهینه فاز I
$A_{۲}$	-۵	۰	-۴	-۱	۱	۴	
w	-۵	۰	-۴	-۱	۰	۴	

برگشت به منوی اصلی

ریاضیات در جدول سیمپلکس

مسئله LP استاندارد را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} Max \quad & Z = CX \\ st: \quad & AX = b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

بردارهای C و X و ماتریس A را به تفکیک پایه و غیر پایه به صورت زیر نشان می دهیم :

$$C = (c_{B_{1\times m}}, c_{N_{1\times n-m}})$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{B_{m\times 1}} \\ x_{N_{n-m\times 1}} \end{pmatrix} \qquad A = \left(B_{m\times m}, N_{m\times (n-m)}\right)$$

$$\begin{aligned} Max \quad & Z = c_B x_B + c_N x_N \\ st: \quad & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

ریاضیات در جدول سیمپلکس

شرط اینکه سیستم $Bx_B + Nx_N = b$ دارای جواب باشد آن است که ماتریس B معکوس پذیر باشد. بنابراین بردارهای ستونی تشکیل دهنده ماتریس پایه باید مستقل از یکدیگر باشند و یا دترمینان ماتریس پایه B باید غیر صفر باشد.حال با فرض معکوس پذیر بودن ماتریس پایه خواهیم داشت :

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$Ix_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$\boxed{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N}$$

باقراردادن x_B در تابع هدف خواهیم داشت :

$$Z = c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N x_N$$

$$Z = c_B B^{-1}b - c_B B^{-1}Nx_N + c_N x_N$$

$$\boxed{Z = c_B B^{-1}b - (c_B B^{-1}N - c_N)x_N}$$

ریاضیات در جدول سیمپلکس

مقدار x_B و Z بدست آمده در واقع همان جدول سیمپلکس می باشد:

x_B	x_B	x_N	RHS
	$\vdots$	$\vdots$	
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	$\vdots$	$\vdots$	
Z	0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1}b$

$$\underbrace{Z_N - C_N}$$

$$(z_1 - c_1 \ , \ z_2 - c_2 \ \ , \ \ \ldots\ldots, \ z_j - c_j, \ldots\ldots, z_{m+n} - c_{m+n})$$

مثال ۱

- مسئله LP زیر را در نظر بگیرید، اگر در این مسئله در جواب نهایی متغیر های x_1 و s_2 در پایه بهینه باشند و دارای مقادیر ۳۰ و ۱۰ باشند ، مقادیر b_1 و b_2 و جدول نهایی سیمپلکس را بدست آورید.

$$Max \quad Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$st: \quad x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le b_1$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \le b_2$$

$$x_1 \dots x_3 \ge 0$$

مثال ۱

x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
x_1	1	$B^{-1}N$			0	30
s_2	0				1	10
Z	0	$Z_N - C_N$			0	150

بنابراین از جدول ،اطلاعات فوق در دسترس می باشد و فقط مقادیر مجهول را بدست می آوریم

مثال ۱

$$x_B=\begin{pmatrix}x_1\\ s_2\end{pmatrix}\qquad x_N=\begin{pmatrix}x_2\\ x_3\\ s_1\end{pmatrix}\qquad c_B=(5\quad 0)\quad c_N=(2\quad 3\quad 0)$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0\\ 1&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\ -1&1\end{pmatrix}\quad N=\begin{pmatrix}5&2&1\\ -5&-6&0\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}N=\begin{pmatrix}5&2&1\\ -10&-8&0\end{pmatrix}\quad Z_N-C_N=(23\quad 7\quad 5)$$

مثال ۱

- برای بدست آوردن مقادیر سمت راست در صورت مسئله داریم :

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 = 30 \\ b_2 = 40 \end{pmatrix}$$

مثال ۲

- جدول نهایی یک مسئله LP به صورت زیر است مقدار Z بهینه را بدست آورید ؟

x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
s_1	0	0	1	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	0	6
x_1	1	0	0	-1	1	2
Z	0	0	0	3	2	?

رتبه در ماتریس A

- تعریف رتبه ماتریس

رتبه یک ماتریس مثل A ، ماکزیمم تعداد بردارهای مستقل سطری یا ستونی در یک ماتریس را رتبه ماتریس می نامندو با R(A) یاRank(A) نشان داده می شود .

در مسئله LP داریم :

$$R(A) \leq \min(m, n)$$

رتبه ماتریس A هرچه باشد بعد از استاندارد کردن مسئله و قرار دادن آن در جدول سیمپلکس رتبه ماتریس A حاصل همواره m است .

کاربرد رتبه ماتریس

- شرط آنکه سیستم $X \geq 0$ $AX = b$ دارای جواب باشد چیست ؟

۱ – بردار b را بتوان از ترکیب خطی مثبت بردارهای ستونی ماتریس A نوشت .

۲ – یعنی به توان اسکالرهایی را یافت که اگر در بردارهای ستونی ماتریس A ضرب شوند بردار b حاصل شود.

۳ – بردار b از بردار های ستونی ماتریس A مستقل نباشد.

۴ – رابطه $R(A) = R(A|b)$ برقرار باشد.

۵ – b در مخروط حادث از بردارهای ستونی ماتریس A قرار گیرد.

- مثال : دستگاه معادلات خطی به فرم $AX = b$ را در نظر بگیرید. در این دستگاه فرض کنید داشته باشیم :

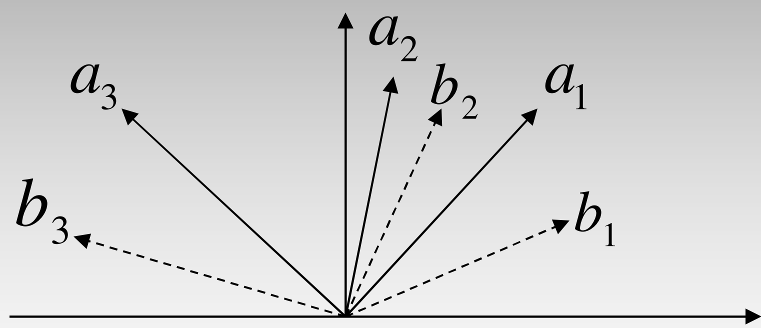
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

وماتریس افزوده $[A \mid b]$ عبارت است از:

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 1 & 6 & 12 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

در خصوص جواب های این دستگاه چه می توان گفت ؟

- مثال – فرض کنید ناحیه شدنی یک مسئله **LP** به صورت زیر تعریف شده باشد با توجه به شکل به ازاء **b=?** مسئله $X=\left\{x \mid a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\le b \ ,\ x\ge 0\right\}$ دارای جواب است ؟



خاصیت مهم در جدول سیمپلکس

- مسئله LP زیر را در نظر بگیرید:

$$Max \quad Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$st: \quad x_1 + 2x_2 \le 6$$

$$2x_1 + x_2 \le 8$$

$$x_{1,2} \ge 0$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
s_1	1	2	1	0	6
s_2	2	1	0	1	8
Z	-3	-2	0	0	0

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
s_1	0	$3/2$	1	$-1/2$	6
x_1	1	$1/2$	0	$1/2$	4
Z	0	$-1/2$	0	$3/2$	12

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	$4/3$
x_1	1	0	$-1/3$	$2/3$	$10/3$
Z	0	0	$1/3$	$4/3$	$38/3$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- B^{-1} در هر جدول ماتریس زیر آن متغیرهایی است که در جدول اول با آن متغیر ها مسئله را شروع به حل کرده ایم .

□ **3–1** Convert the following LP to the standard form:

$$\text{Maximize } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

Subject to

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq -5$$
$$-6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \leq 4$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_3 \text{ unrestricted}$$

□ **3–2** Repeat Problem 3–1 for each of the following independent changes.

(a) The first constraint is $x_1 + x_2 - x_3 \leq -5$.
(b) The second constraint is $-6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \geq 4$.
(c) The third constraint is $x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 10$.
(d) $x_3 \geq 0$
(e) x_1 unrestricted
(f) The objective function is minimize $z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$.
(g) Changes (a), (b), and (c) are effected simultaneously.
(h) Changes (c), (d), (e), and (f) are effected simultaneously.

□ **3–3** Consider the three-dimensional LP solution space shown in Figure 3–10 with its feasible extreme points identified by $A, B, C, \ldots, J$. The coordinates of each point are shown in the figure.

(a) Indicate whether or not the following pairs of extreme points are adjacent: (1) A, B; (2) B, D; (3) E, H; (4) A, I.
(b) From the standpoint of the simplex method, suppose that the solution starts at A and that the optimum occurs at H. Indicate whether or not

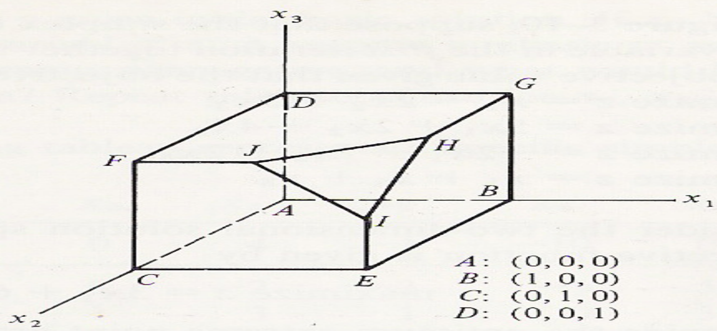


Figure 3–10

the simplex iterations from A to H can be identified by the following sequences of extreme points, and state the reason.

(1) $A \to B \to G \to H$
(2) $A \to F \to J \to H$
(3) $A \to C \to I \to H$
(4) $A \to I \to H$
(5) $A \to D \to G \to H$
(6) $A \to D \to A \to B \to G \to H$
(7) $A \to C \to F \to D \to A \to B \to G \to H$

☐ **3–4** In Figure 3–10, all the constraints associated with the solution space are of the type $\leq$. Let s_1, s_2, s_3, and s_4 represent the slack variables associated with the constraints represented by the planes $CEIJF$, $BEIHG$, $DFJHG$, and HIJ, respectively. Identify the basic and nonbasic variables associated with each feasible extreme point. (*Note:* The problem implicitly assumes that x_1, x_2, $x_3 \geq 0$.)

☐ **3–5** In Problem 3–4, identify the entering and leaving variables when the solution moves between the following pairs of extreme points: (a) $A \to B$. (b) $E \to I$. (c) $F \to J$. (d) $D \to G$.

☐ **3–6** Consider the following problem:

$$\text{maximize } z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4$$

subject to

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 \leq 2$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Determine:

(a) The maximum number of possible basic solutions.
(b) The feasible extreme points.
(c) The optimal basic feasible solution.

□ **3–7** In Figure 3–10, suppose that the simplex method starts at A. Determine the entering variable in the *first* iteration together with its value and the improvement in the objective value given that the objective function is defined as follows.

(a) Maximize $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$.
(b) Maximize $z = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$.
(c) Maximize $z = -2x_1 + 7x_2 + 2x_3$.
(d) Maximize $z = x_1 + x_2 + x_3$.

□ **3–8** Consider the two-dimensional solution space in Figure 3–11. Suppose that the objective function is given by

$$\text{maximize } z = 3x_1 + 6x_2$$

(a) Determine the optimum extreme point graphically.
(b) Suppose that the simplex method starts at A, identify the successive extreme points that will lead to the optimum obtained in part (a).
(c) Determine the entering variable and the ratios of the feasibility condition assuming that the simplex solution is at A and the objective function is given by

$$\text{maximize } z = 4x_1 + x_2$$

(d) Repeat part (c) when the objective function is replaced by

$$\text{maximize } z = x_1 + 2x_2$$

(e) In parts (c) and (d), determine the resulting improvements in the value of z.

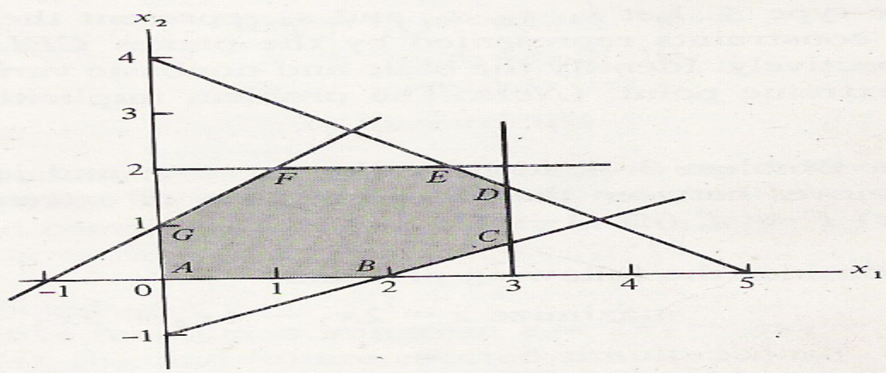


Figure 3–11

□ **3–9** Consider the following system of equations:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 \qquad\qquad &= 4\\
5x_1 - 2x_2 \qquad + 6x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 8\\
2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 3\\
-x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 \qquad\qquad\qquad + x_8 &= 0\\
x_1, x_2, \ldots, x_8 &\geq 0
\end{aligned}$$

Let $(x_5, \ldots, x_8)$ be a given initial basic solution. If x_1 becomes basic, which of the current basic variables must become nonbasic at zero level in order for all the variables to remain nonnegative, and what would be the value of x_1 in the new basic solution? Repeat this procedure for x_2, x_3, and x_4.

□ **3–10** The following tableau represents a specific simplex iteration.

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Solution
z	0	−5	0	4	−1	−10	0	0	620
x_8	0	3	0	−2	−3	−1	5	1	12
x_3	0	2	1	3	1	0	3	0	6
x_1	1	−1	0	0	6	−4	0	0	0

(a) Determine the leaving variable if the entering variable is (1) x_2; (2) x_4; (3) x_5; (4) x_6; (5) x_7.

(b) For each of the cases in part (a), determine the resulting increase *or* decrease in z.

□ **3–11** Solve the following sets of simultaneous linear equations by using the row operations (Gauss–Jordan) method introduced with the simplex method (Section 3.2.2).

(a)
$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 12 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

□ **3–12** Consider the following set of constraints:

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 &\le 46 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &\le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &\le 10 \end{aligned}$$

Solve the problem by the simplex method assuming that the objective function is given as follows:

(a) Maximize $z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$.
(b) Maximize $z = -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4$.
(c) Maximize $z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4$.
(d) Minimize $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 8x_4$.
(e) Minimize $z = 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4$.

□ **3–13** Solve the following problem by inspection and justify the method of solution in terms of the simplex method.

$$\text{maximize } z = 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 12x_5$$

subject to

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 3x_5 \leq 90$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

☐ **3–14** Consider the following LP:

$$\text{minimize } z = x_1 - 3x_2 - 2x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 7 \\ -2x_1 + 4x_2 &\leq 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 &\leq 10 \end{aligned}$$

(a) Solve the problem by the simplex method, where the entering variable is the nonbasic variable with the *most* positive objective coefficient.
(b) Resolve the problem by the simplex method, always selecting the entering variable as the nonbasic variable with the *least* positive coefficient.
(c) Compare the number of iterations in parts (a) and (b).
(d) Suppose that the sense of optimization is changed to maximization by multiplying the minimization objective function above by -1, in which case we must use the maximization optimality condition. How would this change affect the simplex computations compared with the case when the objective function is minimized?

☐ **3–15** Solve the following problem by using x_4, x_5, and x_6 for the starting basic (feasible) solution:

$$\text{maximize } z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 12x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 8x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 &= 10 \\ 3x_1 - x_6 &= 0 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0$$

☐ **3–16** Consider the following set of constraints:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &= 3 && (1) \\ 4x_1 + 5x_2 &\geq 10 && (2) \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 && (3) \\ 6x_1 + 7x_2 &\leq 3 && (4) \\ 4x_1 + 8x_2 &\geq 5 && (5) \end{aligned}$$

Assuming that $x_1, x_2 \geq 0$, determine the starting objective equation in each of the following cases after the artificial variables are substituted out in the *M*-technique.

(a) Maximize $z = 5x_1 + 6x_2$ subject to constraints (1), (3), and (4).
(b) Maximize $z = 2x_1 - 7x_2$ subject to constraints (1), (2), (4), and (5).
(c) Minimize $z = 3x_1 + 6x_2$ subject to constraints (3), (4), and (5).
(d) Minimize $z = 4x_1 + 6x_2$ subject to constraints (1), (2), and (5).
(e) Minimize $z = 3x_1 + 2x_2$ subject to constraints (1) and (5).

□ **3–17** Consider the following set of constraints:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Solve by using the *M*-technique, assuming that the objective function is given as follows:

(a) Maximize $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$.
(b) Minimize $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$.
(c) Maximize $z = x_1 + 2x_2 + x_3$.
(d) Minimize $z = 4x_1 - 8x_2 + 3x_3$.

□ **3–18** Consider the problem

$$\text{maximize } z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

subject to

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Let R be an artificial variable in the second constraint equation. Solve the problem by using x_3 and R for a starting basic solution.

□ **3–19** Consider the problem

$$\text{maximize } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

subject to

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Find the optimum solution by using (x_3, x_4) as the starting basic solution.

□ **3–20** Solve the following problem by using x_3 and x_4 as a starting basic feasible solution:

$$\text{minimize } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

subject to

$$x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 \geq 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

□ **3–21** In Problem 3–16, write the objective function for phase I in each case.

□ **3–22** Solve Problem 3–17 by the two-phase method and compare the resulting number of iterations with those in the *M*-technique.

□ **3–23** Consider the following linear program:

$$\text{maximize } z = c_1x_1 + c_2x_2$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

where $1 \le c_1 \le 3$, $4 \le c_2 \le 6$, $-1 \le a_{11} \le 3$, $2 \le a_{12} \le 5$, $8 \le b_1 \le 12$, $2 \le a_{21} \le 5$, $4 \le a_{22} \le 6$, and $10 \le b_2 \le 14$. Find the upper and lower bounds on the optimum value of z. (*Hint:* A more restrictive solution space yields a smaller value of z.)

□ **3–24** Consider the problem

$$\text{maximize } z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 10 \\ x_1 + x_2 \quad\quad &\le 5 \\ x_1 \quad\quad\quad\quad &\le 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Find at least three alternative optimal basic solutions and then write a general expression for all the *non*basic optimal solutions comprised by the basic optima obtained.

□ **3–25** Suppose that a linear program has the following four alternative optima:

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 5), (6, 1, 3), (4, 2, 1), (2, 1, 2)$$

Write a general expression for all the alternative basic and nonbasic solutions.

□ **3–26** Consider the following linear programming problem:

$$\text{maximize } z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$

subject to

$$x_1 - x_2 + 5x_3 \le 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 40$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Show that the problem has alternative solutions which are all *non*basic. What could one conclude concerning the solution space and the objective function?

Show that the values of the optimal basic variables can be increased indefinitely while the value of z remains constant.

□ **3–27** Consider the problem

$$\text{maximize } z = 3x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad &\leq 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2 \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Show that the optimal solution is degenerate and that there exist alternative solutions that are all nonbasic.

□ **3–28** In the problem

$$\text{maximize } z = 20x_1 + 10x_2 + x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 &\leq 50 \\ x_1 \quad\quad + x_3 &\leq 10 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

in which direction is the solution space unbounded? Without further computations, what could one conclude concerning the optimal solution to the problem?

□ **3–29** Consider the problem

$$\text{maximize } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

By using the *M*-technique, show that the optimal solution can include an artificial basic variable at the *zero* level. Hence conclude that a feasible optimal solution exists.

□ **3–30** Consider the following LP allocation model:

$$\text{maximize } z = 3x_1 + 2x_2 \qquad \text{(profit)}$$

subject to

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 &&\text{(resource 1)} \\ 4x_1 + x_2 &\leq 8 &&\text{(resource 2)} \\ 4x_1 - x_2 &\leq 8 &&\text{(resource 3)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

The optimum tableau of the model is given by

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solution
z	0	0	5/8	1/8	0	17/2
x_2	0	1	1/2	−1/2	0	2
x_1	1	0	−1/8	3/8	0	3/2
x_5	0	0	1	−2	1	4

(a) Determine the status of each resource.
(b) Determine the unit worth of each resource.
(c) Based on the unit worth of each resource, which resource should be given priority for an increase in level?
(d) Determine the maximum range of change in the availability of the first resource that will keep the current solution feasible.
(e) Repeat part (d) for resource 2.
(f) In parts (d) and (e), determine the associated change in the optimal value of z.
(g) Determine the maximum change in the profit coefficient of x_1 that will keep the solution optimal.
(h) Repeat part (g) for x_2.

□ **3–31** Consider the following LP allocation model:

$$\text{maximize } z = 2x_1 + 4x_2 \qquad \text{(profit)}$$

subject to

$$x_1 + 2x_2 \leq 5 \qquad \text{(resource 1)}$$
$$x_1 + x_2 \leq 4 \qquad \text{(resource 2)}$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

The optimal tableau is given by

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	Solution
z	0	0	2	0	10
x_2	1/2	1	1/2	0	5/2
x_4	1/2	0	−1/2	1	3/2

(a) Classify the two resources as scarce or abundant.
(b) Determine the maximum range of change in the availability of each resource that will keep the solution optimal.
(c) Compute the range of optimal z associated with the results in part (b).
(d) Compute the maximum change in the unit profit of x_1 that will keep the solution optimal.
(e) Repeat part (d) for x_2.

□ **3–32** Consider the following LP allocation model:

$$\text{maximize } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \qquad \text{(profit)}$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 430 \qquad \text{(resource 1)}\\ 3x_1 + + 2x_3 &\le 460 \qquad \text{(resource 2)}\\ x_1 + 4x_2 &\le 420 \qquad \text{(resource 3)}\\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

The optimal tableau of the model is given by

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solution
z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	−1/4	1	0	1/2	−1/4	0	100
x_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
x_6	2	0	0	−2	1	1	20

(a) In each of the following cases, indicate whether the given solution remains feasible. If feasible, compute the associated values of x_1, x_2, x_3, and z.
 (1) Resource 1 availability is increased to 500 units.
 (2) Resource 1 availability is decreased to 400 units.
 (3) Resource 2 availability is decreased to 450 units.
 (4) Resource 3 availability is increased to 440 units.
 (5) Resource 3 availability is decreased to 380 units.

(b) In each of the following cases, indicate whether the given solution remains optimal.
 (1) The profit coefficient of x_1 is decreased to 2.
 (2) The profit coefficient of x_1 is increased to 9.
 (3) The profit coefficient of x_2 is increased to 5.
 (4) The profit coefficient of x_3 is reduced to 1.

□ **3–33** In Problem 3–30, determine the optimal values of x_1 and x_2 when resource 1 is increased by 2 units and, simultaneously, resource 2 is decreased by 1 unit.

□ **3–34** In Problem 3–31, suppose that resource 1 and resource 2 are changed simultaneously by the quantities Δ_1 and Δ_2. Determine the relationship between Δ_1 and Δ_2 that will always keep the solution optimal.

□ **3–35** Show that the *m equalities*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

are equivalent to the $m + 1$ *inequalities*

$$\sum_{j=1} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right) x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i$$

☐ **3–36** In linear programming problems in which there are several unrestricted variables, a transformation of the type $x_j = x_j' - x_j''$ will double the corresponding number of nonnegative variables. Show that it is possible, in general, to replace k unrestricted variables with exactly $k + 1$ nonnegative variables and develop the details of the substitution method. (*Hint:* Let $x_j = x_j' - w$, where $x_j', w \geq 0$.)

☐ **3–37** Show how the following inequality in absolute form can be replaced by two regular inequalities.

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq b_i, \qquad b_i > 0$$

☐ **3–38** Show how the following objective function can be linearized.

$$\text{Minimize } z = \max\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_j\right|, \ldots, \left|\sum_{j=1}^{n} c_{mj}x_j\right|\right\}$$