فصل سوم:

دینامیک سیالات

۱)قـــــانون بقـــــاء جـــــرم *1)The law of conservation of mass*

۲)قانون دوم نیوتن در مورد حرکت

2)The second Newtonian law of motion

۳)قانون بقاءانرژی ***3)The law of conservation of energy***

۴)قانون دوم ترمودینامیک ***4)The second law of thermodynamics***

مطالعه حرکت سیالات بر خلاف تعادل آنها ساده نیست و برای بررسی آن بایستی تحقیقات علمی را با مشاهدات تجربی توام نمود .

در حالت کلی ،مشخصات یک سیال یعنی جرم مخصوص ، گرانروی (ویسکوزیته), فشار و سرعت آن تابع شرایط زمانی و مکانی می باشد یعنی :

$$\mu = g(x, y, z, t), V = \phi(x, y, z, t), P = \psi(x, y, z, t)$$

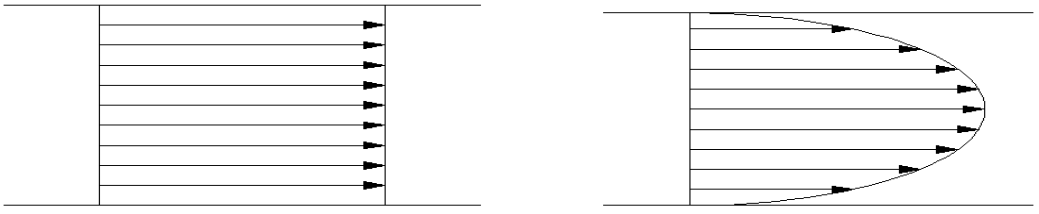
که در آن x, y, z مختصات مکانی ذره سیال $t,$ زمان ، ρ جرم مخصوص ، μ ویسکوزیته V سرعت ، P فشـار آن می باشد ولی به طوریکه خواهیم دید بسته به موقعیت سیال ،حـالات خاصـی وجـود دارد کـه مـی تـوان تعـداد متغیرها را کمتر در نظر گرفت.

انواع سیال

سیالات ایده آل و حقیقی

سیال ایده آل سیال فرضی ای است که ویسکوزیته و قابلیت تراکم آن صفر باشد . در یک سیال ایده آل به علـت نبودن ویسکوزیته ،قشرهای مختلف سیال به موازات هم و باسرعت ثابت در حرکتنـد در صـورتی کـه در مـورد سیال واقعی ، به علت وجود ویسکوزیته سرعت قشرهای مختلف سیال با هم متفاوت است .

سیال حقیقی در دیواره شرط **no slip** داریم.



جریان دائم وغیر دائم — *Steady and unsteady flow*

اگر مشخصات جریان سیال در هر نقطه ،به زمان بستگی نداشته و فقط تابع شرایط مکانی آن نقطه باشد ، جریان را دائم(پایدار) می گویند. به عنوان مثال ،اگر سرعت سیالی در یک نقطه معین و در امتداد مشخص x برابر V باشد ،در جریان دائم همواره میزان سرعت دراین نقطه از نظر مقدار و جهت ثابت خواهد ماند . در جریان دائم سایرمشخصات سیال نیز ثابت می ماند . یعنی :

$$\frac{\partial V}{\partial t}\Big|_x = 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial t}\Big|_x = 0 \quad , \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}\Big|_x = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial t}\Big|_x = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mu}{\partial t}\Big|_x = 0$$

در حالتی که مشخصات سیال در یک نقطه ، در طول زمان تغییر کند ، جریان به نام غیر دائم خوانده می شود.

$$\frac{\partial V}{\partial t}\Big|_x \neq 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial t}\Big|_x \neq 0 \quad , \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}\Big|_x \neq 0$$

جریان آرام و مغشوش *Laminar and Turbalent flow*

در جریان آرام ،حرکت ذرات مختلف سیال در طول خطوط و لایه های موازی صورت می گیرد به عبارت دیگر، حرکت ذره سیال اثری روی حرکت سایر ذرات نخواهد داشت. حرکت آرام سیال تابع قانون نیوتن $\tau = \mu \dfrac{du}{dy}$ می باشد. بایستی توجه داشت که حرکت آرام فقط در مواردی که سرعت جریان کم یا ویسکوزیته آن زیاد باشد، صورت می گیرد و غالباًحرکت سیال به حالت مغشوش می باشد.

در جریان مغشوش حرکت ذرات مختلف سیال، طی مسیرهای درهم صورت گرفته و حرکت هر ذره سیال، در حرکت سایر ذرات نیز مؤثر است. در نتیجه در جریان مغشوش افت انرژی بیشتری نیز تولید می شود.

جریان یکنواخت و غیر یکنواخت *Uniform and nonuniform flow*

در جریان یکنواخت بردار سرعت در هر لحظه داده شده در تمامی نقاط از نظر اندازه وجهت یکسان می باشد. به عبارت دیگر اگر V سرعت و S مسیر جریان باشد.

در این نوع جریان داریم:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_t = 0$$

مانند مایعی که در طول یک لوله مستقیم حرکت می کند. اگر $\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_t \neq 0$ جریان غیر یکنواخت است مثل مایعی که در یک لوله منحنی حرکت می کند؛ یا جریان در یک کانال واگرا یا همگرا.

(باید توجه داشت که جریان یکنواخت خود ممکن است دائم یا غیر دائم باشد)

پس می توان چهار جریان را تعریف کرد:

۱- دائمی و یکنواخت : مثل جریان مایع درون یک لوله بلند با دبی ثابت.

۲- دائمی و غیر یکنواخت: مثل جریان با دبی ثابت درون لوله ای با سطح مقطع افزایش یابنده .

۳-غیر دائمی یکنواخت: مثل جریان مایع درون یک لوله بلند با دبی کاهش یابنده.

۴-غیر دائمی و غیر یکنواخت: مثل جریان درون یک لوله با سطح مقطع افزایش یابنده و دبی افزایش یابنده.

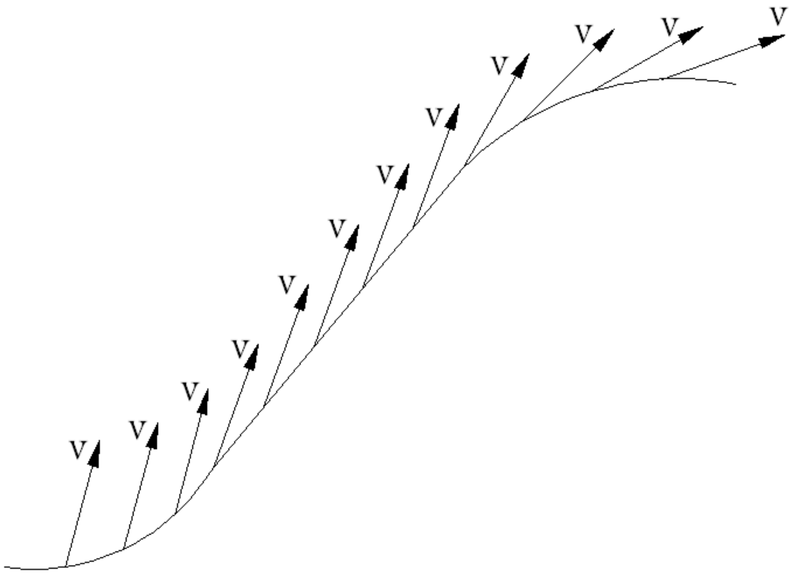
جریان یک بعدی $\vec{V}|u$ **جریان دو بعدی** $\vec{V}\begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}$ **جریان سه بعدی** $\vec{V}\begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}$

جریان تراکم پذیر

اگردانسیته در طول حرکت تغییر کند آنگاه سیال تراکم پذیر است و اگردانسیته ثابت باشد جریان تراکم ناپذیر است؛ مثلا جریان گازطبیعی در لوله ها تراکم پذیر است، بنابراین دانسیته تابع فشار است؛ ولی جریان آب در لوله ها را تراکم ناپذیر می گیریم .

خط جریان *Stream-line*

یک خط فرضی پیوسته که در هر نقطه در هر لحظه t بر بردار سرعت مماس است.



باید توجه کرد که خطوط جریان هیچگاه همدیگر را قطع نمی کنند(حتی در جریان توربالنت). هر قدر بهم نزدیکتر باشند معرف سرعت بیشتر است.

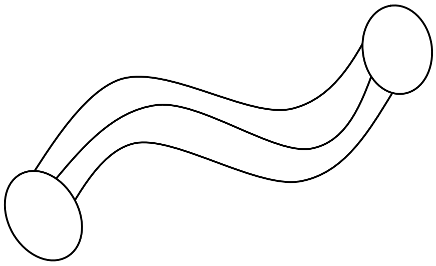
مسیر ذره

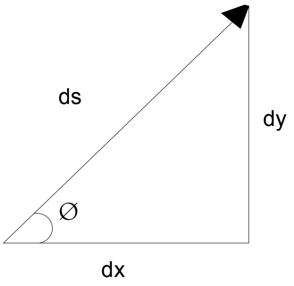
مکان هندسی نقاطی است که ذره سیال در زمانهای مختلف طی می کند.

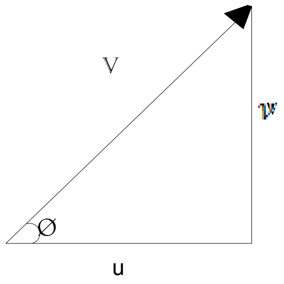
البته در جریانهای دائمی خط جریان و مسیر ذره بر هم منطبق هستند.

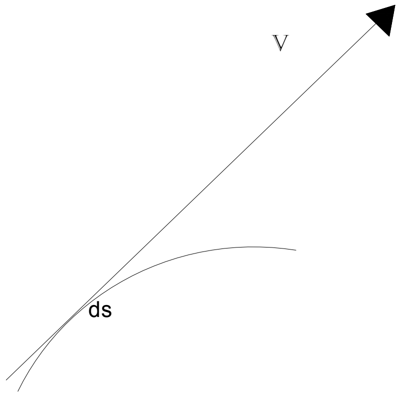
در جریان دائم از آنجا که بردار سرعت در هر نقطه از نظر مقدار و جهت ثابت است خط جریان در هر نقطـه انحنـای ثابتی دارد و به عبارت دیگر موقعیت فضائی آن ثابت می ماند و چون ذره سیال همواره مماس بر خط جریان حرکت می کند بنابراین در جریان دائم مسیر ذره سیال در حقیقت خود یک خط جریان خواهد بود. در جریان غیـر دائـم از آنجا که جهت بردار سرعت در یک نقطه نسبت به زمان تغییر می کند بنابراین وضعیت خطوط جریان نسـبت بـه زمان متغیر است بنابراین در جریان غیر دائم مسیر و خطوط لزوماً بر هم منطبق نخواهـد بـود و ذره در یـک لحظـه یک خط جریان و در لحظه دیگر خط جریان دیگری را طی می کند.

مجموعه خطوط جریان را لوله جریان گویند.(در عرض خط یا لوله جریان وجود نخواهد داشت.)









$$\tan \emptyset = \frac{dy}{dx}$$

$$\tan \emptyset = \frac{v}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

معادله مسیر ذره $u = \frac{dx}{dt} \quad , V = \frac{dy}{dt} \quad ,W = \frac{dz}{dt}$

و اگر dx, dy, dz مولفه های ds باشند داریم:

$\vec{V} = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{\vec{V}} \Rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{V} = \frac{dz}{W}$ *The Stream Line Differential Eq*

مثال۳-۱-: با توجه به اطلاعات خطوط جریان را رسم کنید

U=-Ax
V=Ay
W=0
Aثابت

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{-Ax} = \frac{dy}{Ay} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{-x}$$

$$\rightarrow \ln y = -\ln x + c_1 \quad \rightarrow \quad \ln y = -\ln x + \ln c$$

$$\ln xy = \ln c \quad \rightarrow \quad xy = c$$

$$if\ c = 0 \quad \rightarrow \quad xy = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad or \quad y = 0$$

$$if\ c = -1 \quad \rightarrow \quad xy = -1 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{x}$$

$$if\ c = -2 \quad \rightarrow \quad xy = -2 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{2}{x}$$

$$if\ c = -3 \quad \rightarrow \quad xy = -3 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{3}{x}$$

$$xy = c \quad \rightarrow \quad \Psi = xy$$

$$\begin{cases} v = \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} \\ u = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} v = Ay \\ u = -Ax \end{cases}$$

مثال۳-۲-: اگر داشته باشیم $u = a$ و $V = b + kt$ تعیین کنید که جریان ،دائمی یا غیر دائمی است.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$ جریان غیر دائمی

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{V} \Rightarrow \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b+kt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b+kt}{a}$$

معادله خط جریان $\Rightarrow y = \dfrac{b+kt}{a} x + c$

$$a = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = a\,dt \Rightarrow x = at \Rightarrow t = \frac{x}{a}$$

$$b + kt = \frac{dy}{dt} \Rightarrow y = bt + \frac{k}{2}t^2 + c \Rightarrow y(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = \frac{bx}{a} + \frac{kx^2}{2a^2}$$

معادله مسیر ذره در صورتیکه جریان پایدار باشد داریم:

$u = a\,,\ V = b$ در نتیجه داریم:

$$y = \frac{b}{a}x + c \quad , \quad t = \frac{x}{a} \qquad \Rightarrow \qquad y = bt = \frac{b}{a}x$$

که هم معادله خط جریان و هم معادله مسیر ذره است.

تابع جریان برای جریان دوبعدی تراکم ناپذیر

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \Delta(\rho \vec{v}) = 0$$

در مورد یک جریان دو بعدی و تراکم ناپذیر (ثابت = ρ)داریم:

$$\Delta \vec{V} = 0 \frac{\partial u}{\partial y}\ ,\ V = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

اگر تابع پیوسته $\psi(x, y, t)$ به نام تابع جریان تعریف کنیم به طوریکه :

$$U=\frac{\partial\psi}{\partial y},V=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

دراین صورت این تابع در معادله پیوستگی صدق می کند یعنی: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}=0$

خطوط جریان در هر لحظه بر بردار سرعت مماس می باشند . بنابراین اگر $d\vec{r}$ المان طول در امتداد خط جریان باشد خواهیم داشت .

$$\vec{V}\times d\vec{r}=0=\left(\hat{i}u+\hat{j}V\right)\times\left(\hat{i}dx+\hat{j}dy\right)=\hat{k}\left(udy-Vdx\right)=0$$

معادله خط جریان در جریان دوبعدی

$$\begin{bmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ u & V & 0\\ dx & dy & 0\end{bmatrix}\Rightarrow udy-Vdx=0$$

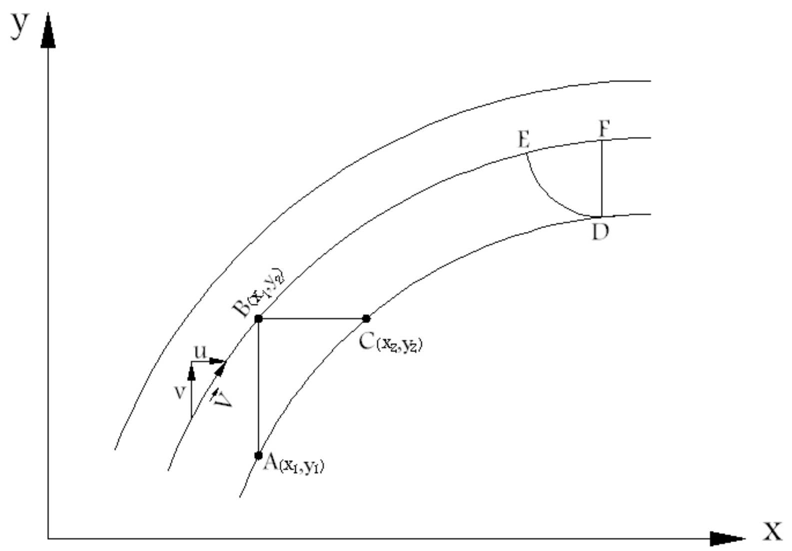
اگر به جای u,V بر حسب ψ جانشین کنیم داریم :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=0$$

از آنجا که $\psi=\psi(x,y,t)$ در این لحظه با تصور اینکه در لحظه t_0 داریم $\psi=\psi(x,y,t_0)$ می توان تغییر ψ را محاسبه کرد. $\psi=\psi(x,y)$

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy$$
$$\Rightarrow d\psi=0\Rightarrow\psi=Cte\ \text{Along stream-line}$$

یعنی ψ در روی خط جریان ثابت است . بنابراین خطوط ثابت = ψ خطوط جریان را نشان می دهند.بنـابراین بـا توجه به تعریف خط جریان ،تشخیص می دهیم که هیچ جریانی خـط جریـان را قطـع نمـی کنـد . از ایـن رو بـرای جریان دو بعدی و تراکم ناپذیر در هر لحظه از زمان دبی سیال بین دو خط جریان در تمام مقاطع یکسان است .



دبی در روی خط AB برابر است با :

$$Q_{AB} = \int_{y_1}^{y_2} u dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

وچون (ثابت = x)است در نتیجه $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{d\psi}{dy} \Rightarrow Q_{AB} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{d\psi}{dy} . dy = \int_{y_1}^{y_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

دبی در روی خط BC برابر است با :

$$Q_{BC} = \int_{x_1}^{x_2} V dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$$

و چون ثابت = y است در نتیجه $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$

$$\Rightarrow Q_{BC} = -\int_{X_1}^{X_2} d\psi = -\int_{\psi_2}^{\psi_1} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Velocity field میدان سرعت

جهت مطالعه حرکت سیال, از روش اویلری استفاده می کنند که در هر نقطه از میدان جریان سرعت بصورت تـابعی از مختصات مکان و زمان می باشد.

یعنی :

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

در حالت کلی نمایش کامل هر خاصیت سیال در یک نقطه بصورت زیر می باشد :

$$\eta = \eta(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t})$$

و برای جریان دائم :

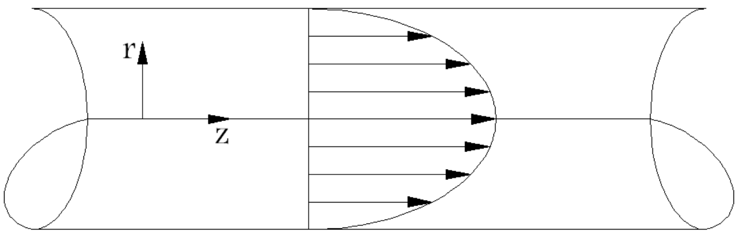
$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{dt}} = 0 \quad \text{یا} \quad \eta = \eta(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$$

بنابراین در جریان دائم ،خواص جریان ممکن است از نقطه به نقطه دیگر در میدان جریان تغییر کند ولی آن خواص در یک نقطه با زمان ثابت خواهد بود.

جریانهای یک ،دو و سه بعدی

بسته به تعداد مختصات مکانی لازم برای مشخص نمودن میدان سرعت ،جریان را یک ، دو یا سه بعدی می خوانند.

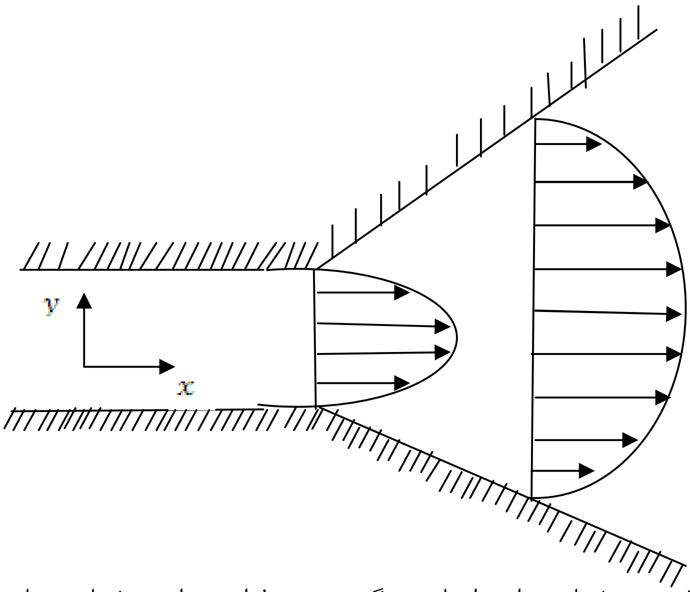
One Dimensional جریان یک بعدی



$$u=U_{\max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

در حالتیکه تغییرات سرعت ،فشار و سایر مشخصات جریان در مقطع عمود بر جهت جریان ناچیز باشد جریان را یک بعدی می خوانند.به عبارت دیگر در این نوع جریان ،خطوط جریان مستقیم و موازی یکدیگر می باشند . بعنوان مثالی در این مورد می توان حرکت مایع ایده آل را از درون لوله های با مقطع یکنواخت ذکر نمود.

جریان دو بعدی ***Two dimensional***



حرکت ذرات سیالات در صفحات موازی انجام می گیرد مسیر ذرات در این صفحات مشابه هم است . در ایـن نـوع جریان خطوط جریان در سطح قرار دارند و در جهت عمود بر این سطوح هیچ جریـانی وجـود نـدارد. حرکـت آب از بالای سرریزها را می توان از این نوع دانست .

جریان سه بعدی

در حالت کلی که سرعت سیال در سه امتداد متغیر بوده و سه مولفه $u.V.w$آن تابع مختصات مکانی x, y, z و زمانی t باشد. جریان راسه بعدی می گویند مثل حرکت مغشوش آب در رودخانه ها.

جریان چرخشی و غیر چرخشی

اگر ذرات سیال ضمن حرکت ،در هر نقطه علاوه بر حرکت انتقالی ، دارای سرعت زاویه ای نیز باشند ، جریان را به نام جریان چرخشی $(Rotational)$ و در غیر این صورت آن را به نام جریان غیر چرخشی $(Irrotational)$ می گویند .

دیدگاههای لاگرانژ و اولر

برای بررسی جریان سیالات از دو روش لاگرانژ و اولر استفاده می شود .

سیستم لاگرانژ *Lagrangion System*

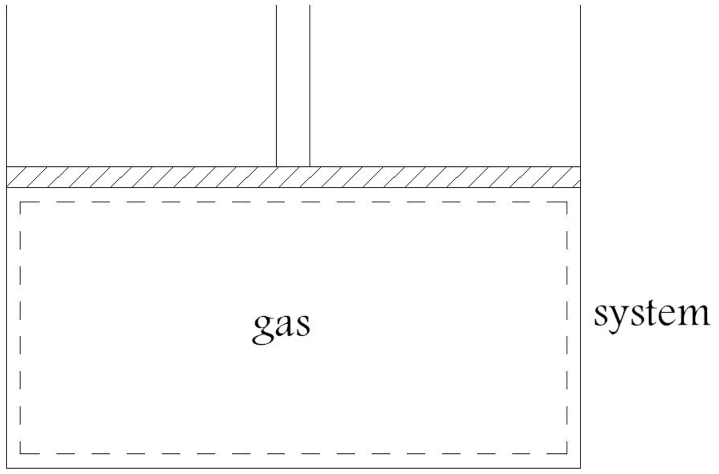
در این روش ما یک ذره را دنبال می کنیم که محور مختصات سوار بر ذره است، وبا سیال حرکت می کند؛ و نقاط مختلف را بررسی می کنیم که در دینامیک جامدات مورد استفاده قرار می گیرد.

سیستم اولر **Eulerian system**

در این روش ما در یک نقطه ثابت هستیم و ذرات مختلف را که از این نقطه عبور می کند بررسی می کنیم ؛ یعنی از یک محور ساکن، سیال را بررسی می کنیم.

معادلات اصلی به فرم انتگرال برای حجم کنترل سیستم :

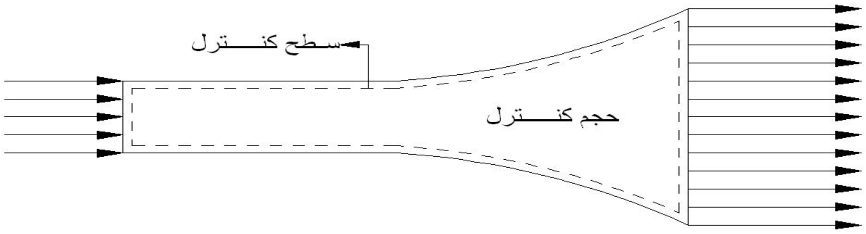
یک سیستم به جرم معینی از ماده اطلاق می شود که برای فرموله کردن یک مساله از بقیه مواد که محیط نامیده می شود جدا می شود . مرز های یک سیستم ممکن است منبسط یا منقبض شوند و لی در هر حال جرم ثابتی را شامل خواهد بود به عنوان مثال در شکل زیر وقتی پیستون حرکت کند ،حجم سیستم تغییر می کند اما در مقدار جرم داخل سیستم هیچگونه تغییری به وجود نمی آید .



حجم کنترل *Control Volume*

همانند سیستم است بجز اینکه محیط ممکن است مرزهای حجم کنترل (به آن سطح کنترل $(Control\ Surface)$ گویند) را در یک یا چند نقطه قطع کند . مقدار ماده در حجم کنترل ممکن است با زمان تغییر کند ، اما شکل حجم کنترل ثابت است .برای مثال برای مطالعه جریان در یک نازل (شیپوره) داخل نازل به عنوان حجم کنترل می توان در نظر گرفت.

مفهوم $Control\ Volume$ در یافتن معادلات پیوستگی ،اندازه حرکت ،انرژی و در حل مسائل دیگر مورد استفاده قرار می گیرد .



چرا حجم کنترل؟

زیرا سیال می تواند بطور پیوسته تغییر شکل بدهد و اغلب بی نهایت مشکل است که ذرات سیال را مشخص نمود ودر هر لحظه آنها را دنبال نمود . دلیل دیگر اینکه غالباً حرکت سیال و رفتار آن در یک ناحیه مشخص از فضا مطرح است و حرکت ذرات مشخص از سیال اصلاً مطرح نمی باشد .

قوانین اصلی برای یک سیستم

۱) بقاء جرم

چون سیستم بنا به تعریف مجموعه ای از ذرات مشخص مادی است بنابراین جرم آن درتمام مسیر یکسان خواهد بود (ثابت است) یعنی :

$$\frac{dm}{dt})_{sys} = 0$$

جرم سیستم $m = \int dm = \int_V \rho dV$

۲) قانون دوم نیوتن

برای سیستمی که نسبت به یک دستگاه مختصات اینرسی (ساکن) است. مجموع نیروهای خارجی وارده بر سیستم برابر است با شدت تغییر ممنتوم خطی سیستم یعنی:

$$\overline{F} = \frac{d\vec{p}}{dt})_{sys}$$

ممنتوم خطی $\vec{p}$ برای یک سیستم برابر است با :

$$\vec{P}_{sys} = \int_{sysmass} \vec{V} dm = \int_{v} \vec{V} \rho \, dV$$

۳) بقاء ممنتوم زاویه ای *Angular Momentum*

بقای ممتوم زاویه ای یا همان ممنتوم بیانگر این مطلب است که: برای یک سیستم شدت تغییر ممنتوم زاویه ای برابر است با مجموع ممانهای وارده بر سیستم یعنی :

$$\vec{T} = \frac{d\vec{H}}{dt})_{sys}$$

ممنتوم زاویه ای $\vec{H}$ برای یک سیستم برابر است با :

$$\vec{H}_{SyS} = \int_{mass} \vec{r} \times \vec{V} dm = \int_{V} \vec{r} \times \vec{V} \rho dV$$

ممان های وارده بر سیستم ناشی از نیروهای سطحی و حجمی وارده بر آن است و همچنین ناشی از محورهایی است که مرز سیستم را قطع می کنند یعنی :

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}_S + \int \vec{r} \times \vec{g} dm + \vec{T}_{shoft}$$

۴) قانون اول ترمودینامیک

قانون اول ترمودینامیک موازنه انرژی برای یک سیستم است یعنی :

$$\delta Q - \delta w = \Delta E$$

$$Q - W = \frac{dE}{dt})sys$$

$$E = \int_{mass} edm = \int_{V} e\rho dV$$

۵) قانون دوم ترمودینامیک

قانون دوم ترمودینامیک بیان موازنه انتروپی برای یک سیستم است یعنی:

اگر مقدار حرارت SQ در درجه حرارت T به سیستم انتقال یابد از قانون دوم می توان نتیجه گرفت که تغییر آنتروپی سیستم dS برابر است با :

$$ds \geq \frac{\delta Q}{T}$$

$$\frac{ds}{dt})_{sys} \geq \frac{1}{T} Q^{\cdot}$$

$$S_{SYS} = \int_{sysmass} sdm = \int_{V} s\rho\, dV$$

رابطه روش سیستم با روش حجم کنترل

قبلاً در مورد دو دیدیگاه اولری ولاگرانژی مطالبی بیان شد ، این دیدگاهها به ما اجازه مـی دهنـد کـه یاحرکـت ذره های جریان را که در یک مکان ثابت در فضا حرکت می کنند مورد مشاهده قرار دهیم (دیدگاه اولری) یا اینکـه هـر ذره را تعقیب کنیم (دیدگاه لاگرانژی).

در اینجا این دیدگاهها را برای توده ای از اجزای سیال بررسی خواهیم کرد که جرم معینی را تشکیل می دهند ودر تعقیب این انبوه از روش سیستم استفاده می کنیم . از طرف دیگر با ساکن قرار دادن خودمان و مشاهده کردن در ناحیه معینی از فضا روش حجم کنترل را می پذیریم ، مـی خـواهیم روش سیسـتم و روش حجـم کنتـرل را بـرای بعضی از خاصیت های سیال و جریان به هم ارتبـاط دهـیم بایـد یـادآوری کـرد کـه روش سیسـتم مطـابق دیـدگاه لاگرانژی و روش حجم کنترل مطابق دیدگاه اولری است .

در ترمودینامیک به خواصی که به مقدار ماده بستگی دارند خواص مقداری گویند مانندوزن اندازه حرکت و انرژی زیرا تغییر دادن مقدار جرم ، اندازه این خواص را به طور مستقیم تغییر می دهد در مقابل این خواص ،خواصی وجود دارد که به مقدار ماده بستگی ندارند که به آنها خواص شدتی گویند مثل دما و فشار بدین ترتیب هر قسمتی از یک میله فلزی در دمای یکنواخت T_0 همان دمای T_0 را دارد . برای هرمتغیر مقداری مانند حجم V و انرژی E با سنجشهای توزیعی می توان خواص شدتی متناظر را وارد کرد ، مثلاً v ،حجم واحد جرم ، e انرژی واحد جرم که داریم :

$$V = \int_v v\rho \, dv = \int vdm$$

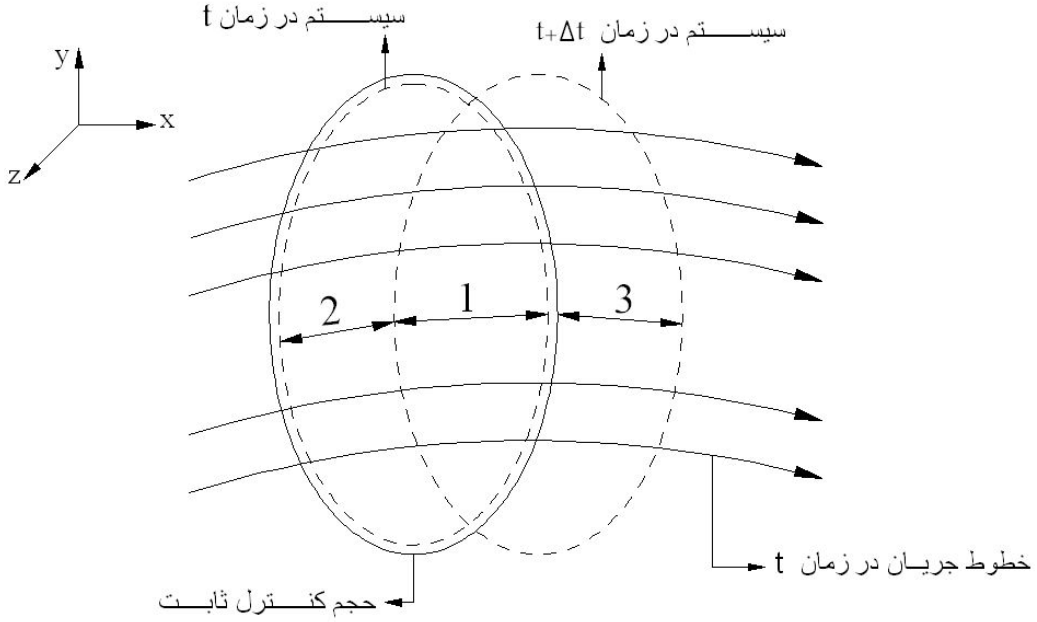
$$E = \int_v e\rho \, dv$$

N= Property (Mass. Momentum. Energy…)

اکنون می خواهیم با خواص مقداری روش سیستم را به روش حجم کنترل مربوط کنیم .

میدان جریان اختیاری $V(x, y, z, t)$ یعنی سرعت یک سیال را نسبت به یک سیستم مختصات xyz درنظر بگیرید که در زمان t یک سیستم با مرز نقطه چین مشخص شده است که حاوی جرم معینی از سیال می باشد . هم چنین یک حجم کنترل ثابت نسبت به محورهای xyz در نظر بگیرید که درزمان t کاملاً بر مرزهای سیستم فوق منطبق است . از آن جایی که هر ذره از سیال با سرعتی که بستگی به موقعیت آن دارد حرکت می کند در زمان $t + \Delta t$ سیستم مقداری حرکت کرده است .(سیستم در هر لحظه باید شامل همان ذرات سیال باشد . بنابراین سیستم باید با جریان سیال حرکت کند)

اکنون یک خاصیت مقداری اختیاری N از سیال را در نظر می گیریم که از درون $C.V$ عبور می کند با این هدف که آهنگ تغییر این خاصیت برای سیستم و تغییرات این خاصیت در ارتباط با حجم کنترل را به هم مربوط سازیم توزیع N برای واحد جرم به صورت η داده میشود



به طوریکه $N = \int_{v} \eta\rho\, dV$

$\eta = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ برای انجام این کار ،سیستم در زمان $t + \Delta t$ و سیستم در زمان t را به سه ناحیه تقسیم می کنیم.

ناحیه ۱ برای سیستم در هر دو زمان t و $t + \Delta t$ مشترک است . با فرایند حد گیری آهنگ تغییر N نسبت به زمان را برای سیستم محاسبه می کنیم .

$$N_{SyS} = \int_{sysmass} \eta dm = \int_{v} \eta\rho dv$$

جرم سیستم $\mathrm{N} = \mathrm{m} \qquad \eta = 1$

ممنتوم خطی سیستم $N = \vec{p} \qquad \eta = \vec{V}$

ممنتوم زاویه ای سیستم $N = \vec{H} \qquad \eta = r \times \vec{V}$

انرژی سیستم $\mathrm{N} = \mathrm{E} \qquad \eta = \mathrm{e}$

آنتروپی سیستم $N = S \qquad \eta = s$

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{sys} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_{sys}\right)_{t+\Delta t} - \left(N_{sys}\right)_{t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_{c.v} - N_2 + N_3\right)_{t+\Delta t} - \left(N_{c.v}\right)_{t}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_{c.v}\right)_{t+\Delta t} - \left(N_{C.v}.\right)_{t}}{\Delta t} - Lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_2\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_3\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t}$$

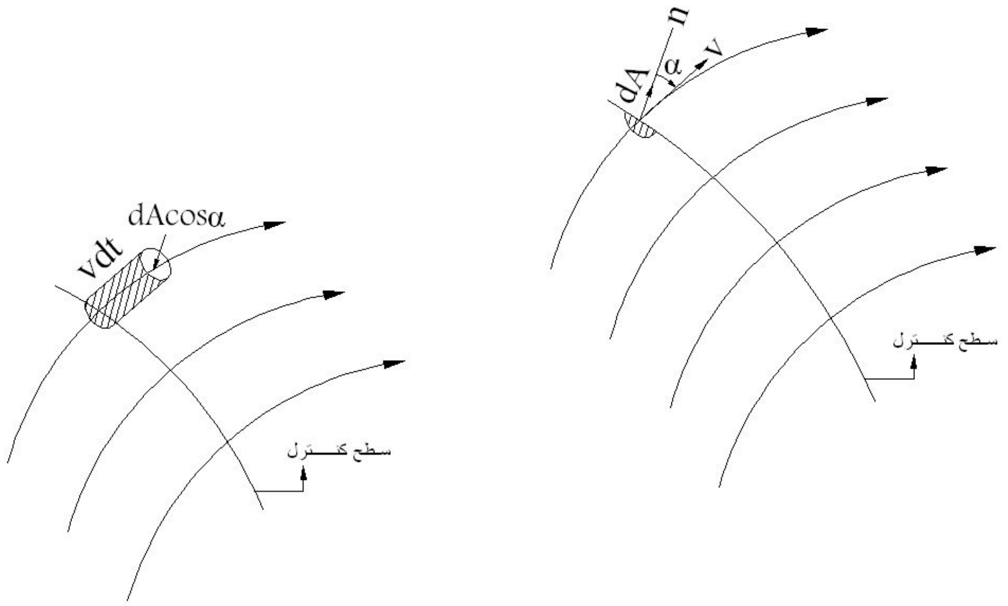
زمانی که $\Delta \mathrm{t} \to 0$ ناحیه (1) بر حجم کنترل منطبق می شود و جمله $\frac{\left(N_{c.v}\right)_{t+\Delta t} - \left(N_{c.v}\right)_{t}}{\Delta t}$ نـرخ زمـانی تغییر N داخل حجم کنترل را می دهد از آنجائیکه N علاوه بر زمان به مکان $(S\ pace)$ نیز بسـتگی دارد و زمانی که $\Delta \mathrm{t} \to 0$ به حجم کنترل ثابت بر می گردیم در نتیجه به مشتق جزئی $\frac{\partial N_{C.V}\cdot}{\partial t}$ می رسـیم زیـرا کـه حجم ثابت گرفته شده است .

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{sys} = \frac{\partial N_{c.v}}{\partial t} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_2\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(N_3\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t}$$

اگر یک dm که جرم کوچکی در داخل حجم کنترل است در نظر بگیریم داریم : $\left(\eta = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)$

$$\frac{\partial N_{C.V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \eta \, dm = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \eta\rho \, dV$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(N_3\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\int_3 \eta dm\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\int_3 \eta\rho dv)_{t+\Delta t}}{\Delta t}$$
$$= \int_3 \rho\eta\frac{dv}{dt}$$



فصل مشترک dA در سطح کنترل   فصل مشترک dA در سطح کنترل کنترل در زمان t برای خروجی

در زمان tبرای جریان خروجی

حجم سیالی که در زمان dt از سطح کنترل dA خارج می شود عبارت از :

$$dV = (Vdt)(dA\cos\alpha)$$

با توجه به تعریف ضرب داخلی داریم :

$$dV = \vec{V}.d\vec{A}.dt \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \vec{V}.d\vec{A}$$

نرخ زمانی جریان(خروجی N از $C.V$)

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(N_3)_{t+\Delta t}}{\Delta t} = \int_3 \rho\eta \frac{dV}{dt} = \int_3 \rho\eta \vec{V}.d\vec{A}$$

$$= \int_2 \rho\eta \frac{dv}{dt} = -\int_2 \rho\eta \vec{V}.d\vec{A}$$

$$dv = (Vdt)(dACos\alpha), \cos < 0 \Rightarrow dv = -(vdt)$$

$\cos < 0$ چون حجم یک کمیت اسکالر است که باید مثبت باشد.

نرخ زمانی جریان ورودی N از میان $= C.V = -\rho\eta V dA \cos\alpha$

از آنجایی که $\vec{V}.d\vec{A}$ برای جریان ورودی منفی است زیرا $\alpha > \frac{\pi}{2}$ است ، علامت منفی مورد نیاز است تا نتیجه را مقداری مثبت کند.

$$\Rightarrow \left(\frac{dN}{dt}\right)_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \rho\eta d\upsilon + \int_2 \rho\eta\vec{v}.d\vec{A} + \int_3 \rho\eta\vec{V}.d\vec{A}$$

The Reynolds Transport Theorem	
$\Rightarrow \left(\frac{dN}{dt}\right)_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \rho\eta dv + \int_{c.s} \rho\eta\vec{V}.d\vec{A}$	***رابطه انتقال رینولدز***

رابطه فوق به ما اجازه می دهد که روش سیستم را به روش حجم کنترل تبدیل کنیم و نشان می دهد که نرخ زمانی افزایش N داخل سیستم برابر نرخ زمانی افزایش خاصیت N در داخل حجم کنترل (که نسبت به محور xyz ثابت است) به اضافه نرخ خالص فلوی خروجی N از مرزهای حجم کنترل.

در ارائه معادله صفحه قبل باید توجه کرد که میدان سرعت نسبت به یک مرجع xyz اندازه گیری شده و حجم کنترل در این مرجع ثابت است . این مطلب آشکار می سازد که V در این معادله در واقع نسبت به حجم کنترل اندازه گیری می شود. در این معادله می بینیم که آهنگ تغییر زمانی N در واقع از حجم کنترل مشاهده می شود . بدین ترتیب که تمام سرعت ها و آهنگهای تغییر زمانی آنهایی هستند که از حجم کنترل مشاهده می شوند.

مفهوم فیزیکی روابط

شدت تغییر هر خاصیت مقداری سیستم = $\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sys}$

شدت تغییر هر خاصیت مقداری N داخل حجم کنترل = $\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v.}\eta\rho dV$

خاصیت شدتی متناظر با N است = η

المان جرم داخل حجم کنترل = ρdV

کل خاصیت مقداری N داخل حجم کنترل است = $\int_{C.V}\eta\rho dV$

شدت خروجی خالص خاصیت N از حجم معیار = $\int_{C.S}\eta\rho\vec{V}.d\vec{A}$

$\rho\vec{V}.d\vec{A}$ شدت جرم خروجی از المان سطح $d\vec{A}$ حجم کنترل

سرعت $\vec{V}$ نسبت به سطح حجم کنترل اندازه گیری می شود.

$\eta\rho\vec{V}.d\vec{A}$ شدت خروجی خاصیت مقداری N از المان سطح $d\vec{A}$ حجم کنترل

معادله پیوستگی : ***Continuity equation***

قانون بقا جرم *Law Of Conservation Of Mass*

جرم داخل سیستم ثابت است : $\frac{dm}{dt}=0$, $\eta=\frac{N}{m}=1$, $N=m$

$$\Rightarrow\left(\frac{dm}{dt}\right)_{sys}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v}\rho dv+\int_{c.s.}\rho\vec{V}.d\vec{A}$$

معادله انتگرالی پیوستگی جرم به فرم انتگرالی

$$\Rightarrow 0=\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v}\rho\, dV+\int_{c.s}\rho\,\vec{v}.d\vec{A}$$

در عبارت $\vec{V}.d\vec{A}$ سرعت $\vec{V}$ در سطحی است که مایع وارد یا خارج می شود و برابر با حجم مایع ورودی یا خروجی است وقتی که در ρ ضرب می شود جرم ورودی یا خروجی می باشد . علاومت ورودی منفی و خروجی مثبت خواهد بود.

پس:

تغییرات جرم در حجم کنترل نسبت به زمان: $\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v.}\rho dV$

جرم ورودی به حجم کنترل در واحد زمان - جرم خروجی حجم کنترل در واحد زمان :

$$\int_{c.s}\rho\vec{V}.d\vec{A}$$

وقتی که مقدار ورودی بیش از خروجی باشد دلیل بر این است که تراکم داریم .

حالت پایدار:

$$For\quad steady\quad fluid\quad flow\ :\ \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v}\rho\, dV=0$$

یعنی هیچ چیزی با زمان تغییر نمی کند پس انتگرال اولیه برابر صفر است و داریم :

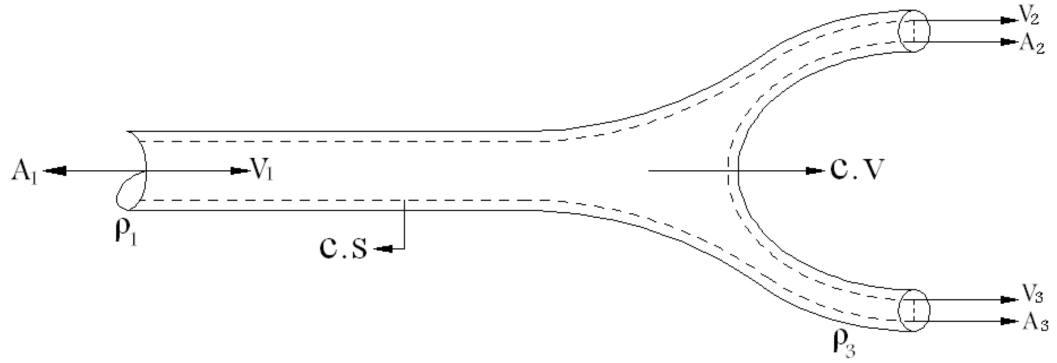
$$0=0+\int_{c.s}\rho\vec{v}.d\vec{A}$$

$$\Rightarrow\int_{C.S}\rho\vec{V}.d\vec{A}=0$$

یعنی برای جریان دائم و پایدار جرم ورودی نسبت به زمان برابر جرم خروجی است حال اگر سیال غیر قابل تراکم باشد $\rho=cte$ داریم :

$$\rho = cte \Rightarrow \rho \int_{e.s} \vec{V}.d\vec{A} = 0 \ \Rightarrow \int \vec{V}, d\vec{A} = 0$$

برای مثال شکل زیر را در نظر می گیریم. (A همواره عمود بر سطح به طرف بیرون است)



فرض

می کنیم ρ متغیر باشد پس $\vec{V}$ یا سرعت را مقدار متوسط فرض می کنیم تا از انتگرال خارج شود و نیز جریان را یک بعدی فرض می کنیم پس :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \rho dV + \int_{c.s} \rho \vec{V}.d\vec{A} = 0 \Rightarrow -\rho_1 V_1 A_1 + \rho_2 A_2 V_2 + \rho_3 V_3 A_3 = 0$$

چون A_1 و V_1 خلاف جهت یکدیگرند منفی می گذاریم.

در سایر نقاط $C.V$ $\vec{V} = 0$, است پس در محاسبات وارد نمی شوند.

$$\Rightarrow -\rho_1 V_1 A_1 + \rho_2 A_2 V_2 + \rho_3 V_3 A_3 = 0$$

بنابراین دبی جرمی ورودی و خروجی با هم مساویند .و اگر ρ ثابت باشد .

$$V_1 A_1 = A_2 V_2 + V_3 A_3$$
$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

دبی حجمی $Q = AV$

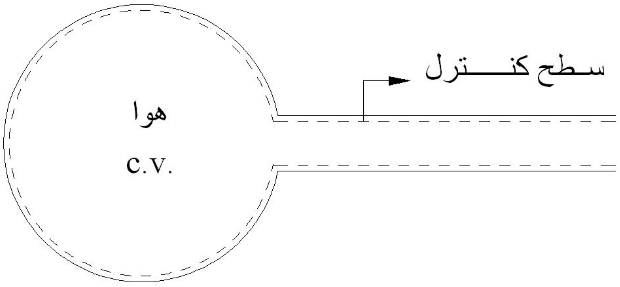
اگر شاخه سه بسته باشد داریم :

$$V_1A_1 = A_2V_2$$
$$\Rightarrow steady\ state\ \ flow$$
$$incompressible\ \ fluid$$

کاربرد روابط حجم کنترل برای قانون بقای جرم در حالت غیر دائم

مثال ۳-۳-: یک ظرف به حجم $2ft^3$ حاوی هوا در فشار $100psig$ و $60F$ در زمان $t=0$ است . هوا از طریق شیری با سطح مقطع $0.1in^2$ از طرف خارج می شود. سرعت هوای خروجی از شیر $1020 ft/s$ و جرم مخصوص آن $0.0117\,slug/ft^3$ می باشد .

خواص هوا داخل ظرف را می توان یکنواخت فرض نمود .شدت تغییرات جرم مخصوص هوای داخل ظرف را در لحظه $t=0^+$ (بلافاصله پس از باز شدن شیر) بدست آورید؟



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v}\rho\, dV + \int_{c.s}\rho\vec{V}.d\vec{A} = 0$$

چون خواص هوای داخل ظرف یکنواخت فرض می شود ، جرم مخصوص تابع مکان نمی باشد و بنابراین $\rho \neq \rho(V)$ است . لذا ρ را می توان از انتگرال اول خارج نمود و داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\ \rho\int_{c.v} dV\ ] + \int_{c.s}\rho\vec{V}.d\vec{A} = 0$$

چون $\int_{c.v} dV = V$ است :

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \int_{c.s} \rho \vec{V}.d\vec{A} = 0$$

تنها جایی که جرم از مرز حجم کنترل می گذرد سطح (1) است لذا :

$$\int_{c.s} \rho \vec{V}.d\vec{A} = \int_{A_1} \rho \vec{V}.d\vec{A}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \int_{A_1} \rho \vec{V}.d\vec{A} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \rho_1 V_1 A_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho V) = -\rho_1 V_1 A_1$$

چون V حجم ظرف است و تابع زمان نیست می توان نوشت :

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho V) = V\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_1 V_1 A_1$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho_1 V_1 A_1}{V}$$

در لحظه $t = 0^+$ داریم :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -0.0117\frac{slug}{ft^3} \times 1020\, ft/\sec \times 0.1 in^2 \times \frac{1}{2 ft^3} \times \frac{1 ft^2}{144\ in^2}$$
$$= -0.0041\frac{stug/ft^3}{\sec}$$

لذا جرم مخصوص داخل ظرف کاهش می یابد .

آنالیز دیفرانسیلی حرکت سیال

سیال را می توان یک جسم پیوسته فرض نمود که خواص ان توابعی پیوسته از زمان و مکان است. و در نتیجه مقادیر سرعت ، جرم مخصوص وغیره بر حسب مختصات مکان و زمان بیان می شوند .

$$\vec{V} = \overline{V}(x, y, z, t)$$
$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

بر طبق قضیه دیورژانس انتگرال گیری سطح را به انتگرال حجم تبدیل می کنیم .

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v}\rho dV+\int_{c.s}\rho\vec{V}.d\vec{A}=0$$

$$divergence\ \ theorem:\int_{C.S.}\rho\vec{V}.d\vec{A}=\int_{C.V}\nabla.(\rho\vec{V})dV$$

حجم کنترل را با زمان ثابت فرض می کنیم

$$\Rightarrow\int_{c.v}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\int_{C.V}\nabla.(\rho\vec{V})dV=0 \qquad \int_{C.S}\vec{f}.d\vec{A}=\int_{C.V}V.\vec{f}dV\Rightarrow\int_{C.V}[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla.(\rho\vec{V})]dV=0$$

این معادله برای هر $C.V$ اختیاری معتبر است چون هر تغییر حدی در انتگرال گیری بدهیم حاصل صفر است پس باید داخل انتگرال گیری صفر باشد.

معادله های انتگرال وقتی مفید هستند که بخواهیم رفتار ناخالص یک میدان جریان و تاثیر آن را روی دستگاههای مختلف بررسی کنیم ولی با روش انتگرالی نمی توان از میدان جریان اطلاعات تفضیلی نقطه به نقطه را بدست آورد .

برای یافتن این اطلاعات تفضیلی ، باید معادلات حرکت سیال را بصورت دیفرانسیلی بکار ببریم .

$$\Rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla.(\rho\vec{V})=0$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}).(\rho V_x\hat{i}+\rho V_y\hat{j}+\rho V_z\hat{k})$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)=0\Rightarrow$$

اگر جریان پایدار باشد

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\quad\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)=0}$$

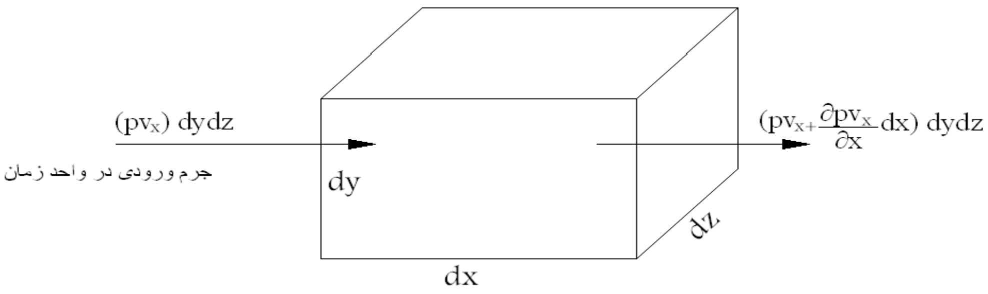
جریان تراکم ناپذیر و پایدار

$$for\ \ incompressible\ \ fluid\ \ flow\quad \rho=cte$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0 \Leftrightarrow \nabla.\vec{V}=0$$

روش دوم : المان گیری

حال اگر بخواهیم همین مساله را از روش المان گیری حل کنیم یک المان مکعب مستطیل درنظر می گیریم .



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V}\rho dV+\int_{C.S}\rho\overline{V}.d\vec{A}=0$$

تغییر جرم= خروجی - ورودی

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz=(\rho V_x)dy\,dz-(\rho V_x+\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}dx)dydz$$

$$+(\rho V_y)dx\,dz-(\rho V_y+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}dy)dxdz$$

$$+(\rho V_z)dy\,dx-(\rho V_z+\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}dz)dydx$$

تغییرات جرم در المان $C.V$ در واحد زمان $=\frac{\partial m_{C.V}}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}dx\,dy\,dz$

علامت منفی بخاطر کاهش جرم در داخل المان است .

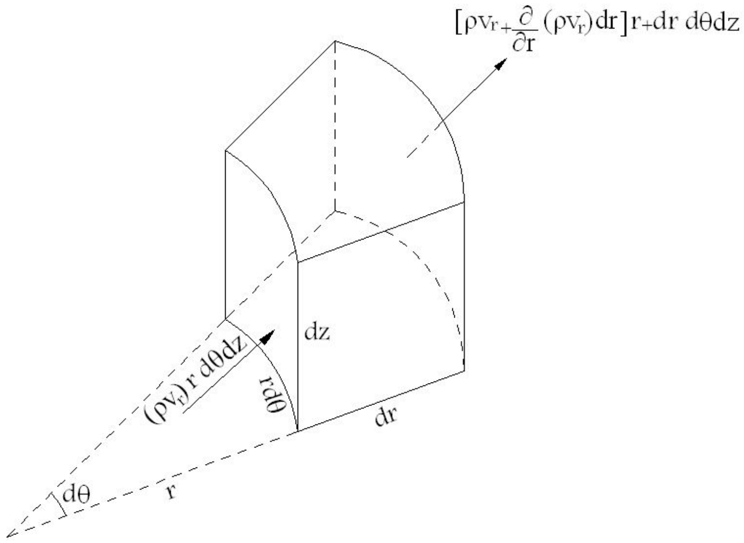
$$\Rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy\, dz = \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) dx\, dy\, dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) dx\, dy\, dz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) dx\, dy\, dz$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

که همان معادله قبلی است .

معادله پیوستگی در مختصات استوانه ای

Continuity Equasion In Cylindrical Coordinate



$$(\frac{dm}{dt})_{element} + \dot{m}_r + \dot{m}_\theta + \dot{m}_z = 0$$

تغيير جرم = خروجي − ورودي

$$\rho V_r r d\theta dz - [\rho V_r + \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r) dr] r d\theta dz$$
$$+ \rho V_\theta dr dz - [\rho V_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta) d\theta] dr dz$$
$$+ \rho V_z r d\theta\, dr - [\rho V_z + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) dz] r d\theta dr = \frac{\partial \rho}{\partial t} r dr d\theta dz$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}(\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta}) + \frac{\rho v_r}{r} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r) + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0$$

تمرین۳-۱-: در مختصات کروی معادله پیوستگی را بدست آوردید .

مثال۳-۴-: نشان دهید که توزیع سرعت $\vec{V} = \hat{i}\,\frac{4x}{x^2+y^2} + \hat{j}\,\frac{4y}{x^2+y^2}$ به جز در مبدأ در تمـامی نقـاط در معادله پیوستگی صدق می کند.

فرض می کنیم که جریان پایدار و غیر قابل تراکم و جریان دو بعدی باشد:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

برای جریان دو بعدی $\Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$

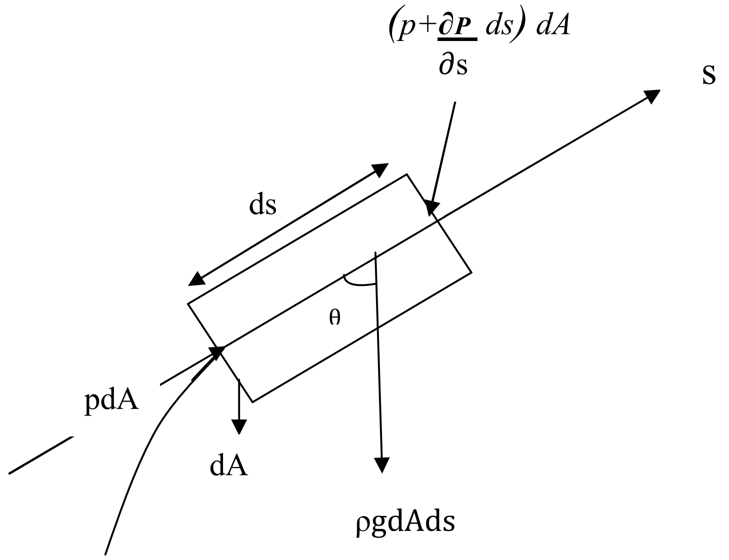
y ثابت است $\quad V_x = \frac{4x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{4y^2 - 4x^2}{(x^2+y^2)^2}$

x ثابت است $\quad V_y = \frac{4y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{4x^2 - 4y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{4y^2 - 4x^2 + 4x^2 - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{0}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

بنـابراین در معادلـه پیوسـتگی صـدق مـی کنـد. و بایـد مخـرج مخـالف صـفر باشـد تـا نتیجـه صـفر شـود یعنی $x \neq 0$, $y \neq 0$ پس توزیع سرعت در تمامی نقاط بجز در مبدأ در معادله پیوستگی صدق می کند.

معادله اولر : *Euler Equation*



مطابق شکل بر روی خط جریان المانی با سطح مقطع dA و طول ds انتخاب می کنیم. با فرض بـی اصـطکاک بودن جریان $(\mu = 0 \Rightarrow \tau = 0)$ داریم:

قانون دوم نیوتن برای المان $\sum F_s = ma_s$ در جهت s

نیروهای وارد بر المان نیروی فشار و جاذبه است

$$\Rightarrow PdA - (P + \frac{\partial P}{\partial S} dS)dA - \rho gdAds\, Cos\theta = \rho\, dA\, ds\, a_s$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial S} dsdA - \rho\, gdAds\, Cos\theta = \rho\, dA\, ds\, a_s$$

معادله را بر $\rho dAdS$ تقسیم می کنیم.

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial s} + gCos\theta + a_s = 0 \qquad \cos\theta = \frac{\partial Z}{\partial s} \; (1)$$

a_s تابعی از فاصله S در طول خط جریان و زمان می باشد.

$$\boxed{a_s = \frac{dv_s}{dt} = \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial s}\frac{ds}{dt}}$$

در استفاده از میدان سرعت باید از دیدگاه لاگرانژی استفاده کرد ، بدین ترتیب با توجه به اینکه x, y, z تابع زمان هستند با به کاربردن قاعده زنجیره ای دیفرانسیل گیری میدان شتاب را به صورت زیرمی توان بیان کرد .

$$a = \frac{dV}{dt}(x, y, z, t) = (\frac{\partial V}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{dz}\frac{dz}{dt}) + (\frac{\partial V}{\partial t})$$

از آنجا که x, y, z مختصات یک ذره هستند واضح است که در این صورت $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ باید مولفه های اسکالر سرعت هر ذره باشند و داریم :

$$a = (V_x \frac{\partial V}{\partial x} + V_y \frac{\partial V}{\partial y} + V_z \frac{\partial V}{\partial z}) + (\frac{\partial V}{\partial t})$$

عبارت بالا نشان می دهد که شتاب ذره های سیال را در یک میدان جریان بصورت برهم نهش دو اثر می توان تصور کرد :

۱) در عبارات داخل پرانتز اول متغیر زمان (t) ثابت گرفته شده است از این رو در این عبارت در زمان معین t فرض می شود که میدان پایدار است بدین ترتیب ذره دستخوش تغییر سرعت می شود زیرا به طور کلی سرعت در مکانهای مختلف داخل این میدان در هر لحظه t متفاوت است. این آهنگ تغییر سرعت بازمان بر اثر تغییر مکان در میدان را شتاب ترابری می گویند .

۲) جمله داخل پرانتز دوم ($\frac{\partial V}{\partial t}$) ناشی از تغییر مکان ذره نیست بلکه از آهنگ تغییر خود میدان سرعت در مکانی که توسط ذره در لحظه t اشغال شده است ناشی می شود . این شتاب را گاهی شتاب محلی می نامند .

در اکثر تحلیلها ، مفید است که به یک مجموعه از خطوط جریان به صورت جزئی از دستگاه مختصات نگاه کنیم . در چنین حالاتی حرف s مکان ذره را در امتداد یک خط جریان خاص نشان می دهد یعنی $V = V(s,t)$ و در نتیجه داریم :

$$a_s = (V_s \frac{\partial V_s}{ds} + \frac{\partial V_s}{dt})$$
$$V_s = f(s,t)$$
$$\frac{dV_s}{dt} = \frac{\partial V_s}{\partial s}.\frac{ds}{dt} + \frac{\partial V_s}{dt}.dt \Rightarrow \frac{dV_s}{dt} = V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} + \frac{\partial V_s}{\partial t}$$

معادله اولر برای جریان ناپایدار *Euler Equation For UnSteady Flow*

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial S} + g\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s\frac{\partial V_s}{\partial S} = 0$$

برای جریان پایدار $\frac{\partial V_s}{\partial t} = 0$`

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial S} + g\frac{\partial z}{\partial S} + V_s\frac{\partial V_s}{\partial S} = 0$$

در این حالت S تنها متغیری می باشد که می توان مشتقات جزئی به مشتقات کامل تبدیل کرد.

$$\left[Euler\ Eq\ For\ Steady\ Flow\right] \boxed{\frac{dP}{\rho} + gdz + VdV = 0}$$

اندیس V را بر میداریم چون معادله در جهت خط جریان است.دیگر نیازی به نوشتن S نیست.

فرضیات این معادله(اولر) چنین است :

۱) بدون اصطکاک (غیر ویسکوز μ=0)

۲) در طول یک خط جریان

۳) جریان دائم

معادله برنولی **Bernouli Equation**

اگر از فرم آخر معادله اولر (برای جریان دائم) برای ρ ثابت انتگرال گیری کنیم داریم :

$$\int \frac{dp}{\rho} + \int gdz + \int VdV = 0$$
$$\Rightarrow \frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = cte \qquad BernouliEq$$

معادله برنولی همان اصل بقای انرژی است.

فرضیات معادله برنولی:

معادله برنولی برای جریان:۱- جریان دائم. ۲- جریان بدون اصطکاک. ۳- جریان غیر قابل تراکم.۴- جریـان در طـول خط جریان, اعتبار دارد .

$\frac{P}{\rho}$ واحد: $\frac{N/m^2}{kg/m^3} = \frac{N.m}{kg} = \frac{j}{kg} = \frac{\text{انرژي}}{\text{جرم}}$

$\frac{V^2}{2}$ واحد $= \frac{m^2}{\sec^2} \times \frac{kg}{kg} = \frac{N.m}{kg}$

gz واحد: $\frac{m}{\sec^2}.m = \frac{m^2}{\sec^2} \times \frac{kg}{kg} = \frac{kg.\frac{m}{\sec^2}.m}{kg} = \frac{N.m}{kg} \frac{j}{kg} = \frac{\text{انرژي}}{\text{جرم}}$

بنابراین هر جز معادله برنولی دارای واحد $\frac{N.m}{kg}$ یعنی انرژی بر واحد جرم می باشد که اگر طرفین معادله را بر g تقسیم کنیم داریم :

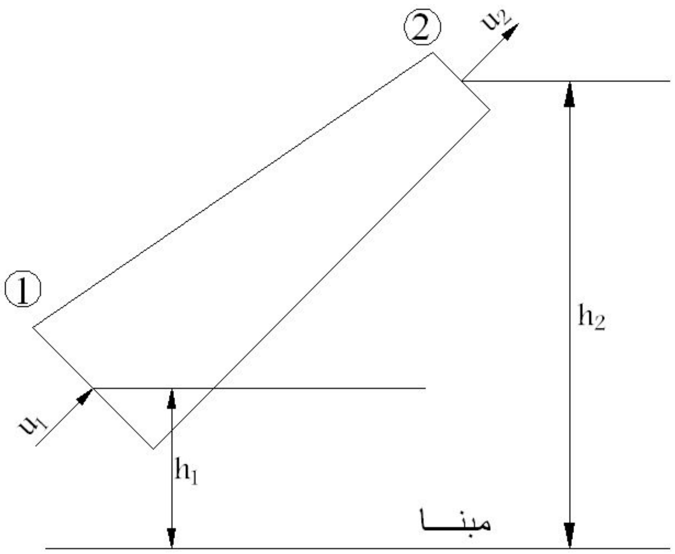
$$\frac{p}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} = cte$$

$\frac{p}{\rho g}$ واحد: $\frac{N/m^2}{kg/m^3 \times \frac{m}{\sec^2}} = \frac{N/m^2}{N/m^3} = \frac{N.m}{N} \, or \quad \frac{lb_f.ft}{lb_f}$

یعنی هر ترم معادله بالا دارای واحد انرژی در واحد وزن میباشد.این شکل معادله برای مایعات با سطح آزاد مناسب تر است.

معادله برنولی را می توان به روش ساده زیر بدست آورد :

حرکت سیال ایده آلی را در لوله ای که به تدریج قطر آن کم می شود و بطور شیب دار قرار دارد در نظر می گیریم.



چون بین دو نقطه $1,2$ پمپ و یا منبع انرژی یا مصرف کننده انرژی وجود ندارد و سیال ایده آل است ، انرژی داخلی دستگاه تغییر نمی کند و لذا بین این دو نقطه سه نوع انرژی پتانسیل ، جنبشی و فشاری در حال تبدیل هستند .

۱) انرژی پتانسیل $P_E = mgh$

۲) انرژی جنبشی $K_E = \frac{1}{2}mu^2$

۳) انرژی فشاری : چون بین نقطه 1 و نقطه 2 تلمبه ای (پمپ) در کار نیست می بایست دلیلی باشد که بین $2,1$ رو به بالا و درخلاف جهت جاذبه حرکت کند . دلیل اینکه سیال رو به بالا حرکت می کند وجود اختلاف فشار بین $2,1$ است و انرژی مربوطه را انرژی فشاری می گویند .

$F = PA$ و (کار) $W =$ نیرو × فاصله $= PAL, \quad AL = V$

$$\Rightarrow \text{(فشاری)} = PV, \qquad \rho = \frac{m}{V}, \qquad V = \frac{m}{\rho} W$$

$$\Rightarrow \text{(فشاری)} W = \frac{pm}{\rho}$$

حال اگر اصل بقا انرژی را بین $2,1$ بکار ببریم و از روابط صفحه قبل در آن استفاده کنیم داریم :

مجموع سه نوع انرژی در نقطه $2 =$ مجموع سه نوع انرژی در نقطه 1

$$\Rightarrow mgh_1 + \frac{1}{2}mu_1^{\,2} + \frac{p_1 m}{\rho} = mgh_2 + \frac{1}{2}mu_2^{\,2} + \frac{p_2 m}{\rho}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}u_1^{\,2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}u_2^{\,2} + gh_2$$

اگر طرفین را بر g تقسیم کنیم و $\rho g = \gamma$ داریم :

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + h_2$$

$\frac{P_1}{\gamma}$ (راس فشار) $\frac{U_1^2}{2g}$ (راس سرعت) h_1 (راس پتانسیل یا ارتفاع)

نکته :

باید توجه کرد که p بر حسب pa می تواند فشار مطلق یا فشار نسبی باشد.

فشار در هر دو سمت معادله است. افزایش فشار جو به هر دو سمت تغییری ایجاد نمی کند. ولی معمولاً طبق قرارداد همیشه p مصرف فشار نسبی است. لذا اگر یکی از فشارهای p_1 یا p_2 فشار جو باشد رأس فشار صفر خواهد بود، زیرا :

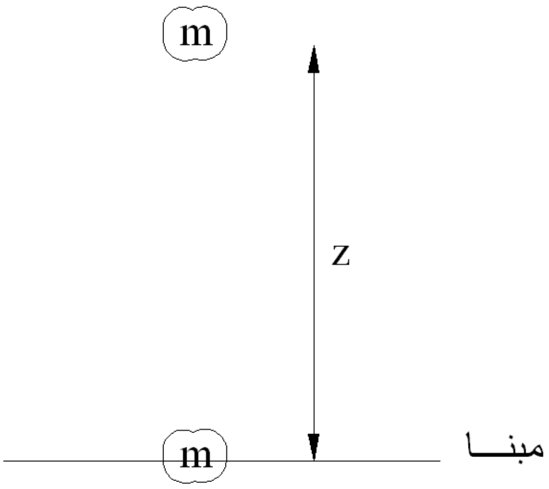
$$p_{abs} = p_{atm} + \gamma h \text{ (فشار نسبی)}$$

اگر $p_1 = p_{atm}$ باشد وقتی که از p_{atm} کم می شود(فشار نسبی) γh صفر خواهد شد.

بنابراین در معادله برنولی هر جا که نقاط 1 و یا 2 در اتمسفر واقع باشند فشار را صفر می گیریم.

هر جزء معادله برنولی بصورت یک انرژی تفسیر می شود.

انرژی پتانسیل در واحد جرم می باشد : عبارت gz



انرژی پتانسیل $= mgz \Rightarrow \frac{N.m}{Kg}$ انرژی پتانسیل بر حسب $= \frac{mgz}{m} = gz$

انرژی جنبشی در واحد جرم می باشد. : عبارت $\frac{V^2}{2}$

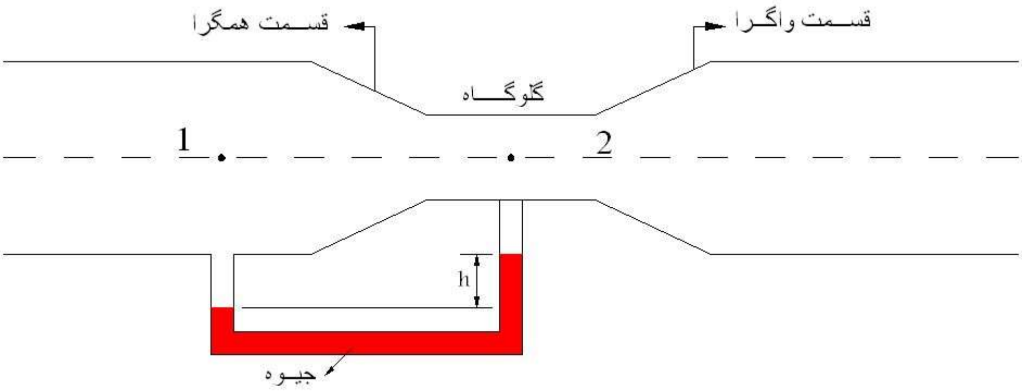
$$E = \frac{1}{2}mV^2 / m = \frac{1}{2}V^2 \ \frac{N.m}{kg}$$

انرژی جریان در واحد جرم است (کار فشاری) *Flow Work Or Flow Energy* : عبارت $\frac{P}{\rho}$ کاری است کـه هنگام جریان یافتن سیال توسط جرم سیال روی محیط انجام می شود.

اگر معادله برنولی را برای دو نقطه روی یک خط جریان بکار ببریم داریم:

$$\frac{P_1}{\rho} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

مثال۳-۵- : ونتوری متر $(Venturi\ Meter)$ برای تعیین جریان درون یک لوله مورد استفاده قرار می گیرد.



در شکل بالا مقدار جریان Q را بدست آورید.

$$P_1 - P_2 = 20000\frac{N}{m^2} \; D_1 = 0.15m, \qquad D_2 = 0.1m, \qquad S = 0.9$$

چون V_1 کمتر از V_2 است پس داریم $P_1 \rangle P_2$ بنابراین جیوه اختلاف وزن پیدا می کند.

فرضیات :جریان پایدار و تراکم پذیر

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \qquad Continiuty \quad Equation$$

$$V_1 \times \frac{\pi D_1^{\ 2}}{4} = V_2 \times \frac{\pi D_2^{\ 2}}{4}$$

$$\Rightarrow V_2 = 2.25 V_1$$

$$Bernouli\ Equation : E_1 = E_2$$ انرژی در واحد وزن

down stream : نقطه ۲ up stream: نقطه ۱

$$\Rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^{\ 2}}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^{\ 2}}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{V_2^{\ 2} - V_1^{\ 2}}{2g} \Rightarrow \frac{20000}{0.9 \times 9806} = \frac{V_2^{\ 2} - V_1^{\ 2}}{2 \times 9.806}$$

$$\Rightarrow V_1^{\ 2} = 10.94 \Rightarrow V_1 = 3.31 m/s$$

$$Q = A_1 V_1 = 3.31 \times \frac{\pi \times 0.15^2}{4} = 0.058 \frac{m^3}{\sec}$$

نکات:

۱) در معادله برنولی مقدار ثابت از یک خط جریان تا خط جریان دیگر تغییر می کند .

۲) اگر جریان غیر چرخشی باشد $\nabla \times \vec{V} = 0$ می توان نشان داد که معادله ی برنولی بین هـر دو نقطـه ی دلخـواه قابل استفاده است.

باید توجه کرد که چهار فرض معادله برنولی عبارتند از :

۱) جریان دائم

۲) بدون اصطکاک

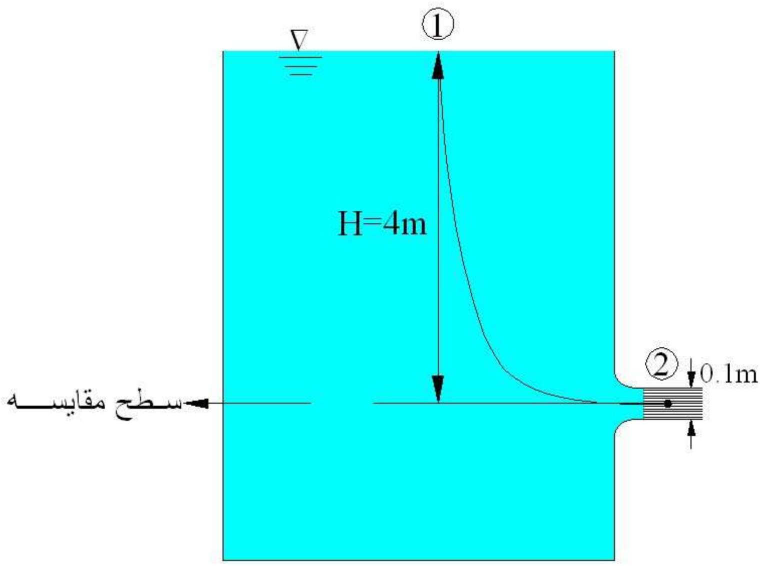
۳) روی یک خط جریان

۴) غیر قابل تراکم .

اما در شرایط خاصی از یک یا دو فرض می توان صرف نظر کرد.بعنوان مثال زمانی که تمامی خطوط جریـان از یـک مخزن ناشی می شوند با توجه به اینکه تمام خطوط جریان در سطح آزاد انرژی کل یکسانی دارند . در معادله برنولی نقاط ۱و۲را میتوان آزاد و بدون اینکه روی یک خط جریان باشد اختیار نمود.

برای جریان غیردائم اگر تغییرات در شرایط تدریجی باشد مانند خالی شدن یک مخزن بزرگ می توان بدون خطـای قابل توجهی از معادله برنولی استفاده کرد که در ادامه مثالی آورده می شود.

مثال۳-۶-: در شکل سرعت و دبی خروجی از مخزن را بدست آورید؟



بین ۱و۲ معادله برنولی را می نویسیم :

$$Z_1+\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1{}^2}{2g}=Z_2+\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2{}^2}{2g}$$

اگر سطح مقایسه را خطی بگیریم که از نقطه 2 می گذرد داریم :

هر دو نقطه در اتمسفر قرار دارند $z_2=0, z_1=H, P_1=P_2=0 \leftarrow$

و چون فشار نسبی است پس نسبت به اتمسفر صفر می باشد.

$$\Rightarrow H+0+0=0+0+\frac{V_2{}^2}{2g}$$

V_1 برای این صفر است که سطح آب در مخزن همواره ثابت است و با سرعت کم حرکت می کند و در مقایسه با

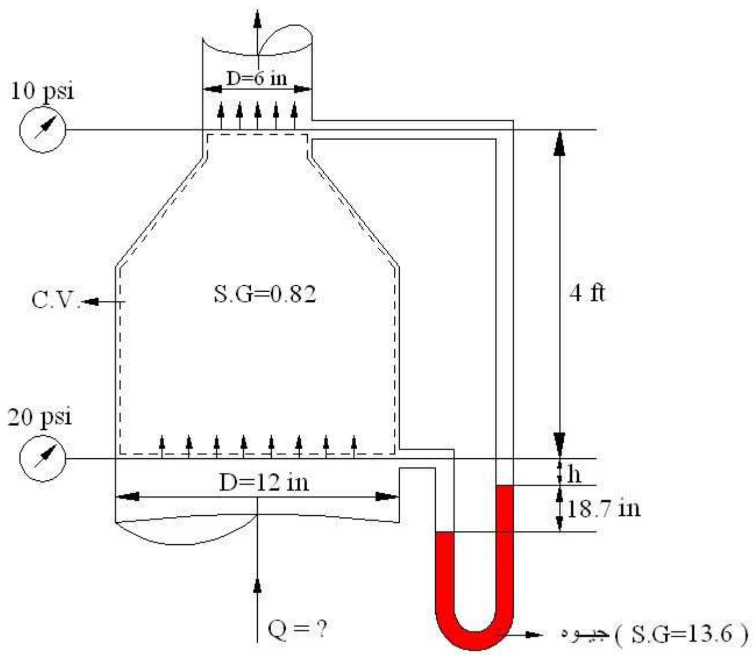
V_2 قابل صرف نظر کردن است .

$$\Rightarrow V_2=\sqrt{2gh}$$ فرمول سقوط آزاد

$$\Rightarrow V_2=\sqrt{2\times 9.806\times 4}=8.86 m/s$$

$$Q=V_2A_2=8.86\times\pi\times\frac{0.1^2}{4}=0.07\frac{m^3}{sce}=70\frac{lit}{sce}$$

مثال۳-۷-: مطلوبست محاسبه دبی مایعی $SG = 0.82$ که در داخل لوله زیر جریان دارد؟



حجم کنترل $(C.V)$ را مطابق خط چین انتخاب می کنیم و فرض می کنیم که جریان پایدارو تراکم ناپذیر است,

و نیز جریان های ورودی و خروجی یک بعدی هستند .

معادله پیوستگی :

$$\int_{C.S} \rho\vec{V}.d\vec{A} = 0 \Rightarrow \int_{A_1} \rho\vec{V}.d\vec{A} + \int_{A_2} \rho\vec{V}.d\vec{A} = 0$$

از آنجاییکه ρ, V در هر مقطع از لوله ثابت هستند داریم :

$$-\rho_1 V_1 \int_{A_1} d\vec{A} + \rho_2 \vec{V}_2 \int_{A_2} d\vec{A} = 0$$

$$A_1 \xleftarrow[\longrightarrow]{} V_1 \qquad \xrightarrow{\rightarrow A_2} V_2$$

پیوستگی بین نقطه 2,1:

$$\Rightarrow \begin{cases} \{\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 \vec{V}_2 A_2 \\ \rho_1 = \rho_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_1 \frac{\pi D_1^{\ 2}}{4} = V_2 \frac{\pi D_2^{\ 2}}{4} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = (\frac{D_2}{D_1})^2 = (\frac{6}{12})^2 = 0.25$$

$$\Rightarrow -V_1 = 0.25 V_2 Or V_2 = 4V_1$$

برنولی بین 2,1 :

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{V_1^{\ 2}}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{V_2^{\ 2}}{2g}$$

$$\frac{V_2^{\ 2} - V_1^{\ 2}}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (z_1 - z_2)$$

$$\frac{16V_1^{\ 2} - V_1^{\ 2}}{2g} = \frac{(20-10)144}{62.4 \times 0.82} + (-4) \to z_1 - z_2, z_1 < z_2$$

$$\Rightarrow V_1 = 10.2 \frac{ft}{s} \Rightarrow Q = \frac{\pi D_1^{\ 2}}{4} \times V_1 = \frac{\pi (12/12)^2}{4} \times 10.2$$

$$\Rightarrow Q = 8 \frac{ft^3}{s}$$

خط درجه انرژی *Energy Grade Line*

خط درجه انرژی نشانگر ارتفاع کل ثابت برنولی است. $h_0 = Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = const$

که در جریان بدون اصطکاک و انتقال حرارت و کار محوری,ارتفاع خط EGL ثابت است.این خط ازدو زیرمجموعه زیر تشکیل می شود :

۱) خط درجه هیدرولیک (Hydrolic Grade Line) که نشانگر ارتفاع مربوط به بلندی و هد فشار است. یعنی

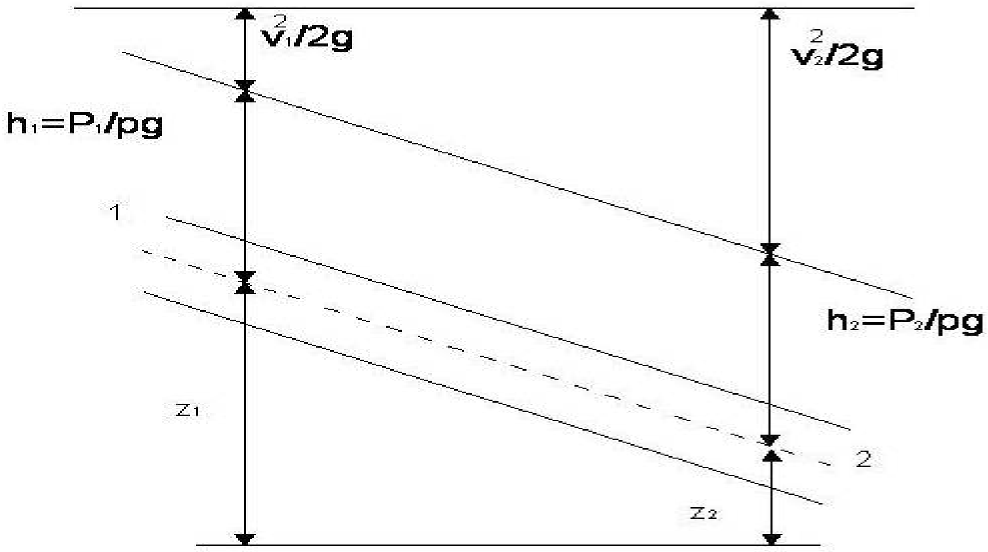
$$Z + \frac{P}{\gamma}$$

۲) ترم سرعت.

تمرین ۳-۲-: مثال قبل را با توجه به محاسبه فشار از روی مانومتر حل کنید .

اگر مطابق شکل لوله ای داشته باشیم که در آن سیال در حرکت باشد معادله برنولی در مورد آن به صورت زیر است

.



اگر ازافت انرژی بین نقطه 2,1 صرف نظر کنیم داریم :

(1) انرژی کل در $= mgH + \frac{1}{2}mV^2$

(1) انرژی کل درواحد وزن در نقطه $= H + \frac{V_1^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g}$

که در آن:

(1) انرژی پتانسیل و فشاری در واحد وزن در نقطه $= z_1 + \frac{p_1}{\gamma}$

$$(1)\quad \text{انرژی سینیتیک} = \frac{V_1^{\,2}}{2g}$$

$$(2)\quad \text{کل انرژی در واحد وزن در نقطه} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^{\,2}}{2g}$$

رابطه برنولی می گوید که این دو انرژی با هم برابرند ولی اگر افت انرژی داشته باشیم داریم :

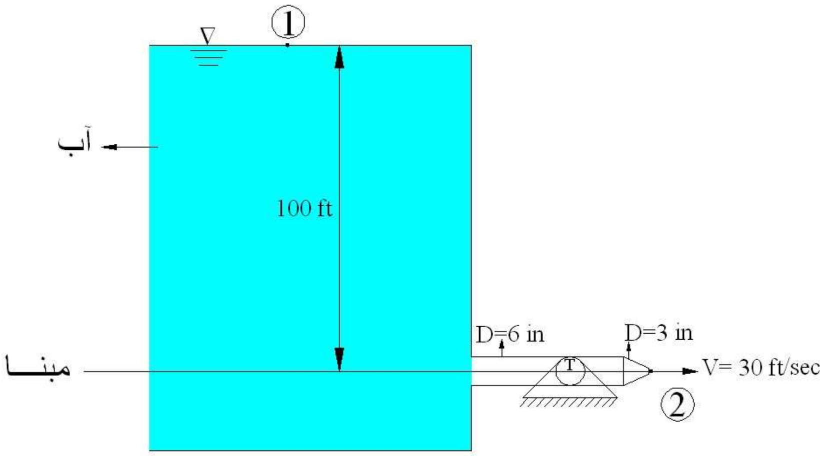
$$E_1 - h_f = E_2$$

در نتیجه برای حالتی که افت انرژی داریم رابطه برنولی به فرم زیر در می آید.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + h_f$$

که در آن h_f همان افت انرژی اصطکاکی است . $(Losses)$

مثال۳-۸-: با صرف نظر کردن از اصطکاک در لوله نشان داده شده در شکل زیر، توان تولید شده توربین توسط آبی که از یک مخزن بزرگ می آید را محاسبه کنید؟



آب در اثر پتانسیلی که دارد حرکت می کند و به توربین انرژی می دهد.

نقطه مبناء را مطابق شکل انتخاب و بین دو نقطه $1,2$ معادله برنولی را می نویسیم:

معادله برنولی (اصل بقاء انرژی) $E_1 - h_f - h_T = E_2$

در این مسأله که توربین داریم توربین مقداری از انرژی آب را می گیرید که بعنوان یک افت وارد معادله می شود اگر بجای توربین پمپ بود به جای $-h_T$, $+h_P$ وارد معادله می شد چون پمپ بـه سـیال انـرژی مـی دهـد ولـی توربین انرژی می گیرد. بنابراین با صرف نظر کردن از h_f داریم:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - h_T = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow 100 + 0 + 0 - h_T = 0 + 0 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow h_T = 100 - \frac{V_2^2}{2g} = 100 - \frac{30^2}{2 \times 32.2} = 86.025 \ \frac{lb_f . ft}{lb_f} = ft$$

$h_T =$ انرژی/ وزن $\Rightarrow$

انرژی در واحد وزن گرفته شده توسط توربین $h_T mg =$ انرژی

$h_T \rho V g = h_T . \gamma V, \Rightarrow h_T mg =$ توان $=$ انرژی/ زمان

توان توربین = انرژی گرفته شده توسط توربین/ زمان

$$= h_T . \gamma Q, \quad Q = \frac{V}{t}$$

$H = \frac{1bf}{ft^3} . \frac{ft^3}{\sec} = \frac{ft \ .lbf}{\sec} =$ کار یا انرژی/ زمان

$\Rightarrow$ توان $= 86.025 \times 62.4 \times (30 \times \frac{\pi}{4}(3/12)^2) = 7904.97 \ \frac{ft.lbf}{\sec}$

معادله کلی برنولی با در نظر گرفتن اصطکاک، پمپ و توربین :

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_P = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_f + h_T$$

پمپ به سیال انرژی می دهد در نتیجه در سمت چپ معادله اضافه میشود h_T توربین و h_f افت اصطکاکی از سیال انرژی می گیرند درنتیجه به سمت راست معادله اضافه می شوند.

باید توجه کرد که h_P مقداری انرژی است که پمپ به سیال می دهد که اگر بخواهیم کار پمپ را محاسبه کنید با توجه به راندمان پمپ داریم :

η = انرژی داده شده به سیال / کار پمپ W_P

زیرا تمام کاریکه موتور به پمپ می دهد بعلت افت های اصطکاکی در قطعات مکانیکی پمپ به سیال منتقل نمی شود . در نتیجه داریم :

h_P انرژی داده شده به سیال = ηW_p

در موتور توربین داریم :

η توربین= W_T / انرژی گرفته شده از سیال

زیرا در مورد توربین به علت افت های اصطکاکی, تمام انرژی گرفته شده از سیال مورد استفاده قرار نمی گیرد .

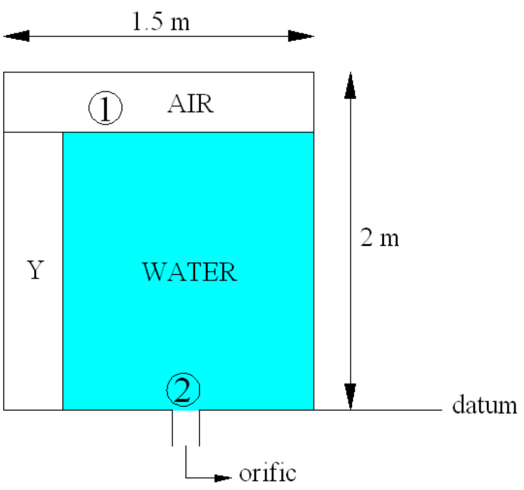
h_T انرژی گرفته شده از سیال = $\dfrac{W_T}{\eta}$

بنابراین معادله کلی برنولی بر حسب W_p و W_T به فرم زیر در می آید :

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{{v_1}^2}{2g}+\eta_P W_p=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{{v_2}^2}{2g}+\frac{W_T}{\eta_P}+h_f$$

کاربرد معادله برنولی در مسائل ناپایدار $(Unsteady)$

مثال۳-۹-:تانکی استوانه ای شکل پر از آب به ارتفاع $2m$ و قطر $1.5m$ وجود دارد که در پایین یک سوراخ $(Orifice)$ به قطر $0.1m$ قرار دارد . زمان خالی شدن تانک را پیدا کنید و از افت انرژی $(HeadLoss)$ صرف نظر کنید ؟



بین نقاط 1,2 معادله برنولی را می نویسیم :

$$E_1 = E_2 \Rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$y + 0 + \frac{V_1^2}{2g} = 0 + 0 + \frac{V_2^2}{2g}$$

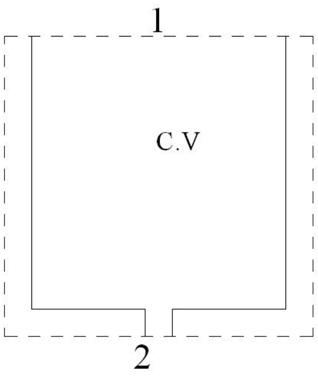
$$\Rightarrow \frac{V_2^2}{2g} = y + \frac{V_1^2}{2g} \Rightarrow V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2gy}$$

V_1 در مقایسه با V_2 بسیار کوچک است زیر قطر بزرگتر 15 برابر قطر کوچکتر است پس V_1 قابل صرف نظر کردن است .

$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{2gy}$$

اگر اصطکاک $(HeadLoss)$ داشتیم . $V_2 = c_d\sqrt{2gy}$ که ضریب c_d را ضریب تخلیه می نامند که همواره کمتر از یک است که اگر $(HeadLoss)$ نداشتیم $c_d = 1$ است .

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V} C dV + \int_{C.S} \rho V.d\vec{A} = 0$$



فرضیات :

۱) جریان غیر قابل تراکم

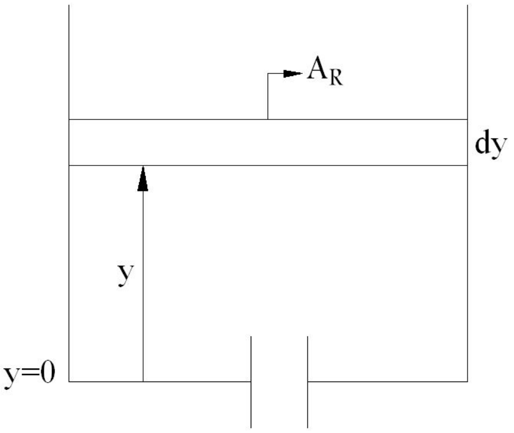
۲) جریان در هر مقطع یکنواخت (یک بعدی)

۳) از هر ρ در مقایسه با ρ_{H_2o} صرف نظر می کنیم.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho\int_{C.V} dV + (-\rho_{air}V_1A_1) + (\rho_W V_2 A_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V}\rho\, dV + \rho\, V_2 A_0 = 0$$

$$dV = A_R dy \Rightarrow V = A_R y$$



$$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}\int_{C.V} dV + \rho\, V_2 A_0 = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + V_2 A_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(A_R y) + \sqrt{2gy}A_0 = 0$$

$$\Rightarrow A_R\frac{dy}{dt} = -\sqrt{2gy}A_0$$

$$Q = A_0 V_2 = A_0\sqrt{2gy}$$

$$\Rightarrow A_0\sqrt{2gy}dt = -A_R dy$$

$$\Rightarrow \int_0^t dt = -\frac{A_R}{A_0\sqrt{2g}}\int_2^0 y^{-\frac{1}{2}}dy, A_R = \pi(1.5)^2/4$$

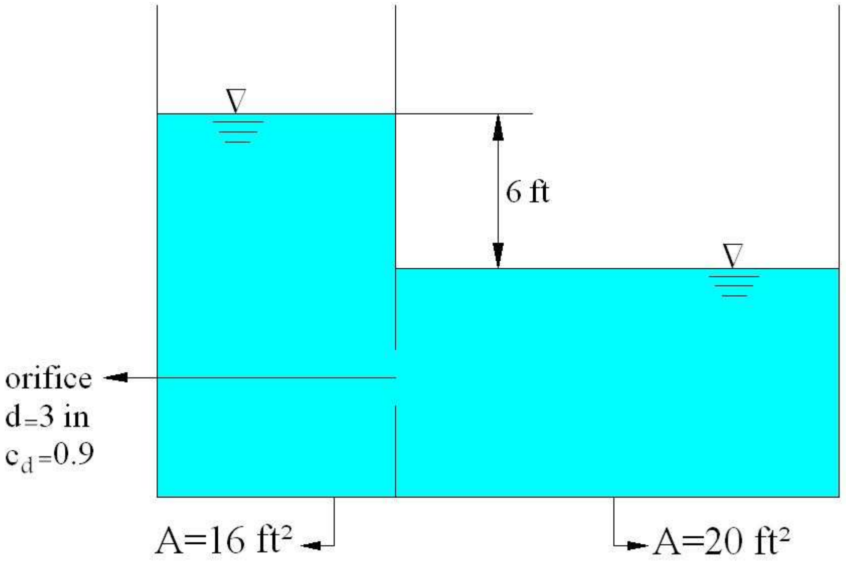
$$\Rightarrow t = -\frac{A_R}{A_0\sqrt{2g}}[2\sqrt{y}]_0^2 = \frac{2\sqrt{2}A_R}{A_0\sqrt{2g}} = 143.75\sec$$

$$\Rightarrow t = 2.39\min$$

تمرین ۳-۳-: در صورتیکه تانک مخروطی شکل باشد زمان خالی شدن را پیدا کنید

تمرین۳-۴-: دو تانک به فرم زیر به هم متصل شده اند که بین آنها یک سوراخ با مشخصات داده شده مـی باشـد .

زمان مورد نیاز جهت بالا رفتن 2 فوت مایع در تانک سمت راست چقدر است ؟



معادله ممنتوم خطی — *The Liner Momentum Equation*

$$\frac{dN}{dT}\int_{sys}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.V.}\rho\eta dV+\int_{C.S.}\rho\eta\vec{V}.d\vec{A}$$

$$N=momentum=m\vec{V}$$

$$\eta=\frac{N}{m}=\frac{m\vec{v}}{m}=\vec{V}$$

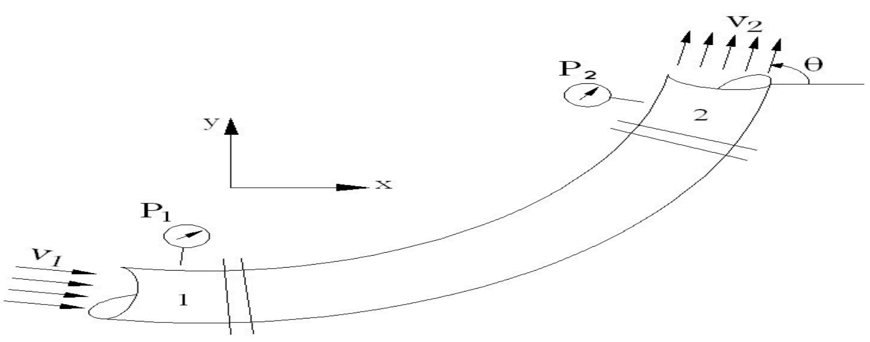
$$\Rightarrow\frac{dm\vec{V}}{dt}\int_{sys}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.V.}\rho\vec{V}dV+\int_{C.S.}\rho\vec{V}\vec{V}.d\vec{A}$$

$$\Rightarrow m\frac{d\vec{V}}{dt}\int_{sys}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.V.}\rho\vec{V}dV+\int_{C.S.}\rho\vec{V}\vec{V}.d\vec{A}$$

$$\Rightarrow\sum\vec{F}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.V.}\rho\vec{V}dV+\int_{C.S.}\rho\vec{V}\vec{V}.d\vec{A}$$

از آنجا که معادله اندازه حرکت خطی (رابطه بالا)اساساً رابطه ای بین نیروها و سرعتها است ، حجم کنترلی باید انتخاب کنیم که شامل نیروها و سرعت ها به روشی مناسب باشد که به حل مساله کمک کند معمولا در حل مسائل واکنش نیرویی را که در جستجوی آن هستید نشان می دهید . یعنی ممکن است نیروی وارد بر یک لوله یا پره از طرف آب را بخواهید ، اما با استفاده از مکانیک سیالات در واقع ابتدا نیروی وارد شده از طرف لوله یا پره بر آب را پیدا می کنید.

مثال۳-۱۰: از زانویی نشان داده شده در شکل جریان پایداری از مایع عبور می کند مقادیر میانگین مشخصه های جریان (p,V) در ورودی و خروجی معلوم هستند نیروی وارد بر زانویی از طرف مایع را ارزیابی کنید ؟. جریان را می توان یک بعدی فرض کرد.



در حل این مسائل باید از رابطه زیر استفاده کنیم.

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.V.} \rho \vec{V} dV + \int_{C.S.} \rho \vec{V}\vec{V}.d\vec{A}$$

اگر معادله بالا را در جهت x, y بنویسیم داریم:

$$\sum \vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.V.} \rho \vec{V}_x dV + \int_{C.S.} \rho \vec{V}_x (\vec{V}.d\vec{A})$$
$$\sum \vec{F}_y = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.V.} \rho \vec{V}_y dV + \int_{C.S.} \rho \vec{V}_y (\vec{V}.d\vec{A})$$

که در این رابطه $\sum F$ شامل نیروهای سطحی و حجمی می باشد بنابراین :

$\sum F = C.V$ نیروهای سطحی وارد بر $+ C.V$ نیروهای حجمی وارد بر

SurfaceForce *BodyForce*

<u>نیروهای سطحی</u> : این نیروها شامل نیروهای فشاری ، نیروهای خارجی و نیروهای اصطکاکی می باشند .

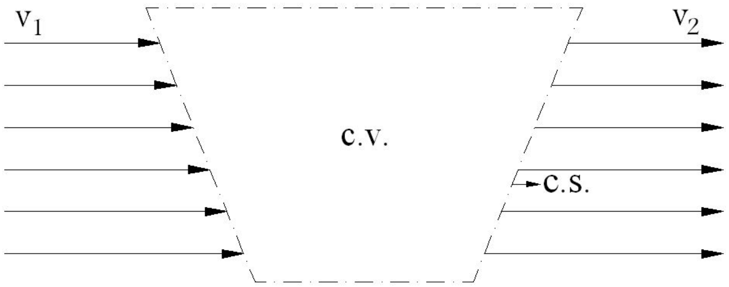
<u>نیروهای حجمی</u> : این نیروها شامل نیروهای وزنی ، الکتریکی و مغناطیسی می باشند.

نکته دیگر در کاربرد رابطه ممنتوم که باید به آن توجه کرد این است که جهت محورهای مرجع اینرسی xyz طوری انتخاب می شوند که جهت سرعتهای مثبت V_x, V_y, V_z و همچنین جهتهای مثبت نیروهای سطحی و حجمی در جهات مثبت محورهای xyz باشند . باید به خاطر داشت که این رعایت علامت از علامت $\vec{V}.d\vec{A}$ مستقل است زیرا $\vec{V}.d\vec{A}$ یک ضرب داخلی است که داریم :

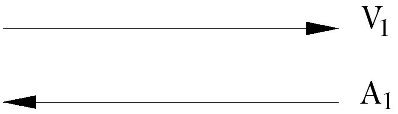
$$\vec{V}.d\vec{A} = |V||dA|\cos\theta$$

θ زاویه بین دو بردار است .

برای مثال اگر یک حجم کنترل به فرم زیر وجود داشته باشد داریم :

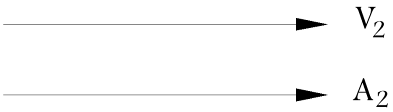


برای ورودی :



$$\cos 180 = -1 \text{ , } \theta = 180^{\circ}$$
$$\Rightarrow \vec{V}_1 \vec{A}_1 \cos 180 = -V_1 A_1$$

برای خروجی :

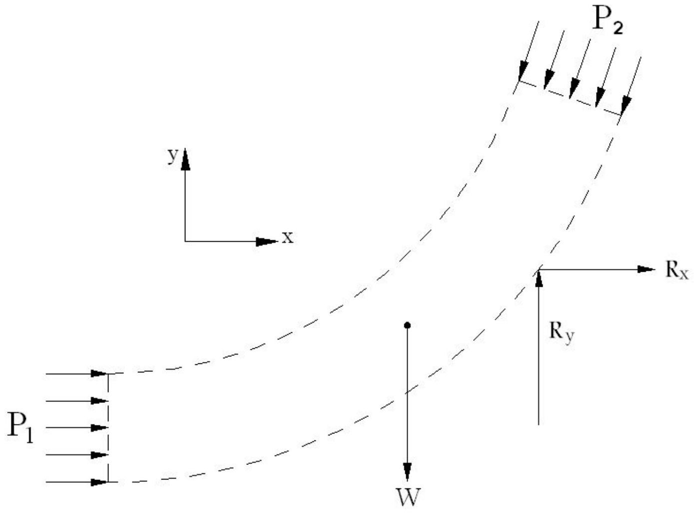


$$\theta = 0$$
$$\Rightarrow \vec{V}_2 \vec{A}_2 \cos(0) = V_2 A_2$$

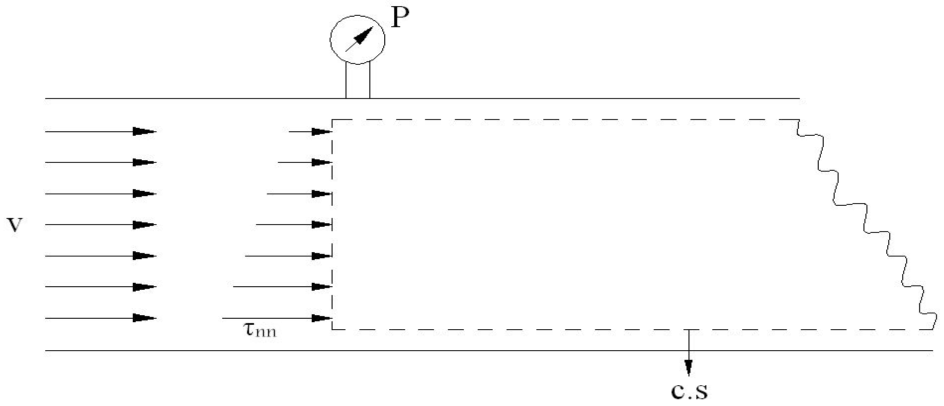
توجه کنید که همیشه بردار سطح به سمت خارج سطح است .

حال به حل مثال بر می گردیم . اولین قدم این است که یک حجم کنترل انتخاب کنـیم ، بنـابراین قسـمت داخلـی زانویی را مطابق شکل به عنوان حجم کنترل انتخاب می کنیم تا کمیتهای معلوم در ورودی و خرووجی را بـا نیـروی R وارد بر سیال از طرف دیواره زانویی ، ارتباط دهیم و عکس العمل این نیروی R همـان نیرویـی اسـت کـه از طرف مایع به زانویی اعمال می شود .

تمام نیروهای موثر بر سیال داخل حجم کنترل در زمان t مشخص شده اند . نیروی های سطحی شامل آثار فشارهای مطلق p_1, p_2 در ورودی وخروجی و همچنین شامل توزیعهای تنشهای عمودی و برشی τ_w, p_w هستند که نیروی برایند آنها R است که از طرف دیواره زانویی بر سیال وارد می شود .



در اینجا باید خاطر نشان کرد که برای یک جریان موازی (یعنی خطوط جریان مستقیم و موازی باشند به صورتی که در شکل زیر نشان داده شده است)



فشاری که فشارسنج نشان می دهد مجموع تنش عمودی τ_{nn} بر روی سطح کنترل (عمود بر جریان) و فشار هیدروستاتیکی است برای جریانها در سطح مقطع هایی کوچک مثلا در داخل لوله ها تنش عمودی خیلی زیاد است

در نتیجه از افزایش فشار هیدروستاتیکی نسبت به عمق معمولا می توانیم صرف نظر کنـیم . بـدین ترتیـب نیـروی کششی یکنواختی به اندازه p روی این سطح داریم .

بنابر آنچه که در بالا گفته شد در ورودی و خروجی زانویی فشارهای یکنواخت p_1, p_2 را در نظر می گیریم .

نیروهای حجمی که بر حجم کنترل وارد می شوند فقط وزن سیال داخل حجم کنترل در زمان t است که با W نشان داده شده است .

بنابراین داریم :

$$\sum F_x = P_1A_1 - P_2A_2\cos\theta + R_X$$
$$\sum F_y = -P_2A_2\sin\theta - W + R_y$$

که در آن R_x, R_y عبارتند از مولفه های نیروی خالصی کـه از طـرف دیـواره زانـویی بـر سـیال وارد میکنـد, کـه R_x, R_y مجهول هستند و مثبت انتخاب شده اند.

چون جریان پایدار است بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{C.v} \rho V.dV = 0$$

حال ترم دیگر معادله ممنتوم یعنی $\int_{C.S} \rho\vec{V}(\vec{V}.dA)$ رابررسی می کنیم. انتگرال سطح فقط باید در سطوح ورودی و خروجی حجم کنترل گرفته شود.

در جهت x: $\int_{C.S} \rho\vec{V}(\vec{V}.d\vec{A}) = \int_{C.S} \rho\vec{V}_x(\vec{V}_x.d\vec{A}) = \rho_1V_1(-V_1A_1) + \rho_2V_2\cos\theta(+V_2A_2)$

در جهت y:
$$\int_{C.S} \rho V(\vec{V}.d\vec{A}) = \int_{C.S} \rho\vec{V}_y(\vec{V}.d\vec{A}) = (0)\rho_1(-V_1A_1) + \rho_2V_2\sin\theta(+V_2A_2)$$
$$= \rho_2V_2\sin\theta(+V_2A_2)$$

در ورودی سرعت در جهت y مولفه ای ندارد .

در نتیجه رابطه ممنتوم به فرم زیر در می آید .

$$\sum \vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.V.} \rho \vec{V}_x dV + \int_{C.S.} \rho \vec{V}_x (\vec{V}.d\vec{A})$$
$$\Rightarrow P_1A_1 - P_2A_2\cos\theta + R_X = -(\rho_1V_1A_1)v_1 + (\rho_2V_2A_2)\times(V_2\cos\theta)$$

حال اگر معادله پیوستگی را برای حجم کنترل بنویسیم داریم :

$$\rho_1V_1A_1 + \rho_2V_2A_2$$
$$\Rightarrow P_1A_1 - P_2A_2\cos\theta + R_X = (V_2\cos\theta - V_1)\rho_1V_1A_1$$
$$\Rightarrow R_X = P_2A_2\cos\theta - P_1A_1 + (V_2Cos\theta - V_1)\rho_1V_1A_1$$

به همین ترتیب داریم:

$$-P_2A_2Sin\theta - W + R_y = (V_2Sin\theta)(\rho_2V_2A_{2)}$$
$$And \qquad \rho_1V_1A_1 = \rho_2V_2A_2$$
$$\Rightarrow R_y = W + P_2A_2\sin\theta + (V_2\sin\theta)(\rho_1V_1A_1)$$

$\Rightarrow$ نیروی وارد بر زانویی از طرف سیال $K = -R$

$$K_x = P_1A_1 - P_2A_2\cos\theta - (V_2\cos\theta - V_1)\rho_1V_1A_1$$

$$K_y = -W - P_2A_2\sin\theta - (V_2\sin\theta)(\rho_1V_1A_1)$$

اگر در مثال قبل بخواهیم نیروی جو وارد بر خارج زانویی را نیز در نظر بگیریم باید از فشارهای نسبی استفاده کنـیم

که با توجه به اینکه داریم :

$$p_{abs} = p_{atm} + p_{guage}$$

$guage =$ نسبی

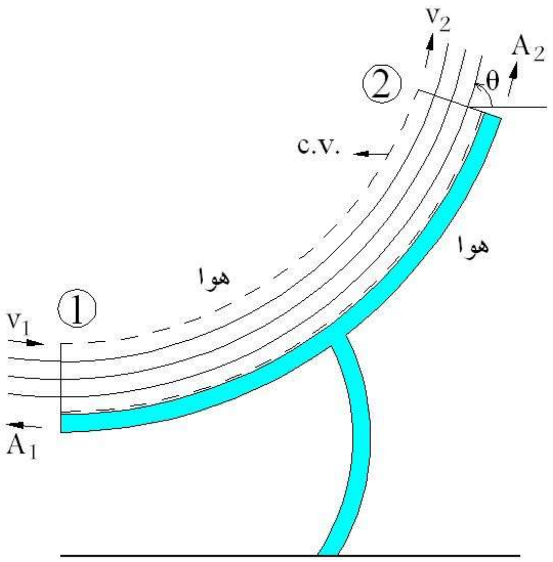
روابط قبلی به فرم زیر در می آید

$$K_X = (P_1 - P_{adm})A_1 - (P_2 - P_{adm})A_2\cos\theta - \rho_1V_1A_1(V_2\cos\theta - V_1)$$

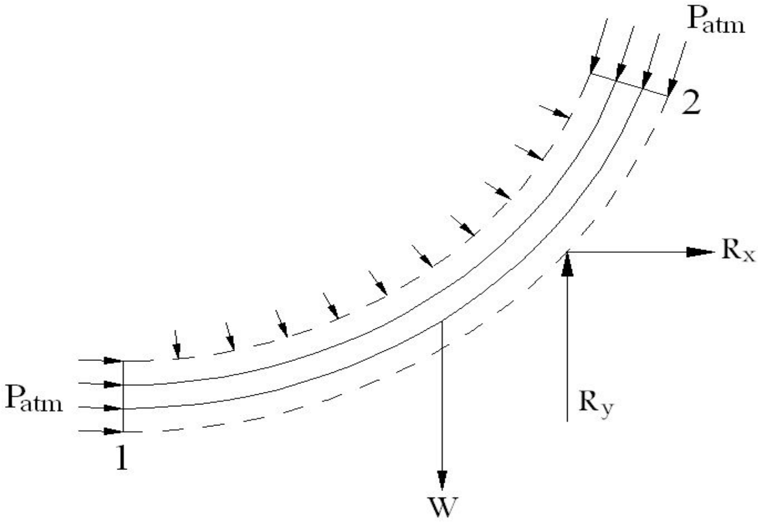
$$K_y = -(P_2 - P_{adm})A_2\sin\theta - W - \rho_1V_1A_1(V_2\sin\theta)$$

مثال ۳-۱۱-: پره ثابت $(Fixed\ Vane)$:جریان آبی به طرف یک پره خمیده ساکن برخورد می کند نیـروی

وارد بر پره از طرف آب را تعیین کنید؟



حجم کنترلی مطابق شکل انتخاب و نیروی وارد بر آن را نشان می دهیم .



فرضیات :

۱) جریان پایدار

۲) جریان غیر قابل تراکم

۳) بدون اصطکاک و از وزن حجم کنترل صرف نظر می کنیم .

۴) جریان یک بعدی

معادله برنولی را بین نقاط $1,2$ می نویسیم :

$$\frac{P_1}{\gamma}+Z_1+\frac{V_1^{\ 2}}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+Z_2+\frac{V_2^{\ 2}}{2g}$$

در دو طرف پره هر دو فشار اتمسفر هستند و از تغییر ارتفاع بین نقاط $2,1$ صرف نظر می کنیم .

$$\Rightarrow \frac{V_1^{\ 2}}{2g}=\frac{V_2^{\ 2}}{2g}\Rightarrow V_1=V_2$$

یعنی سرعت ورودی و خروجی از پره با هم برابرند .

$$\sum \vec{F}_x=\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.V.}\rho\vec{V}_x dV+\int_{C.S.}\rho\vec{V}_x(\vec{V}.d\vec{A})$$

$$\Rightarrow P_{atm}(A_t)_x+R_X=\rho V_1(-V_1A_1)+\rho V_2\cos\theta(+V_1A_2)$$

پیوستگی برای حجم کنترل : $\rho V_1A_1=\rho V_1A_2$

$$\Rightarrow R_x=-P_{atm}(A_T)_x\rho V_1^{\ 2}A_1(1-\cos\theta)$$

باید توجه کرد که $(A_t)_x$ عبارت است از مساحت خالص تصویر شده در جهت x قسمتی از سطح کنترل کـه در معرض فشار جو قراردارد.

$\Rightarrow$ نیروی وارد بر پره از طرف آب $\Rightarrow K_x=P_{atm}(A_t)_x+\rho V_1^{\ 2}A_1(1-\cos\theta)$

باید توجه کرد یک نیروی $-P_{adm}(A_t)_x$ از طرف هوای اتمسفر بر پره وارد می شود در نتیجه داریم :

$$K_x=P_{atm}(A_t)_x+\rho V_1^{\ 2}A_1(1-\cos\theta)-P_{atm}(A_t)_x$$

$$\Rightarrow K_x=\rho V_1^{\ 2}A_1(1-\cos\theta)$$

البته از آنجاییکه اطراف پره هوا می باشد از ابتدا می توانستیم اثر فشار اتمسفر را در نظر نگیریم .

$$\sum \vec{F}_y = \frac{\partial}{\partial t}\int_{.} \rho \vec{V}_x dV + \int_{C.S.} \rho \vec{V}_y (\vec{V}.d\vec{A})$$

$$R_y - W = 0 + \rho_1 V_2 \sin\theta (+V_2 A_2)$$

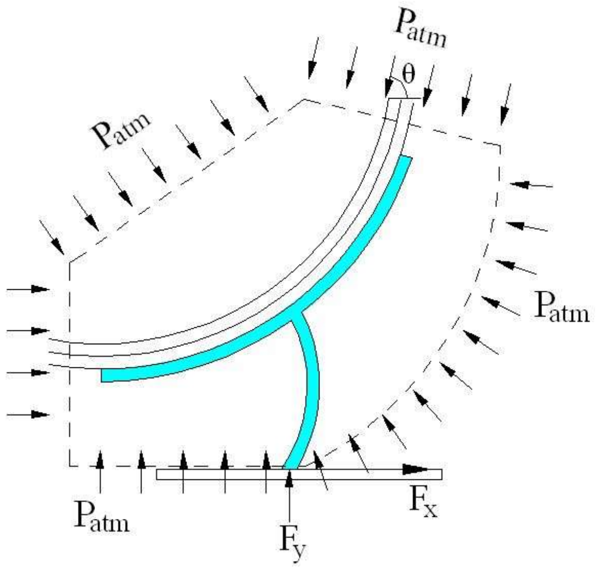
از روی وزن آب در $C.V$ صرف نظر می شود .

$$\Rightarrow R_y = \rho V_1^{\ 2} A_1 \sin\theta$$

$$\Rightarrow K_y = -\rho V_1^{\ 2} A_1 \sin\theta$$

در مثال قبل اگر حجم کنترل مطابق شکل زیر انتخاب کنیم که در نتیجه نیروهای وارد بر حجم کنترل F_x, F_y

و گشتاور M نشان داده شده اند.



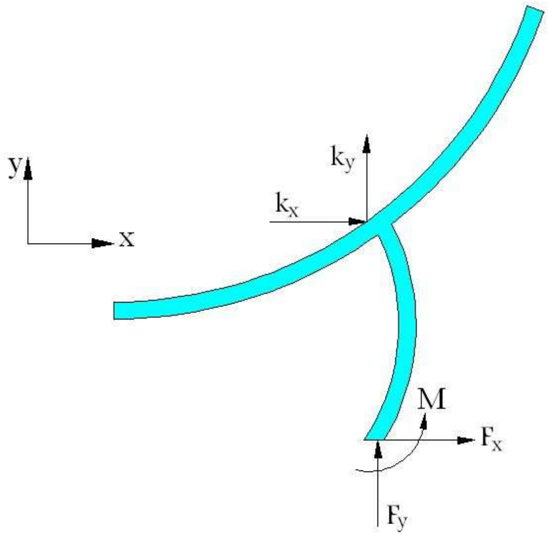
که پس از بکاربردن معادله ممنتوم در جهت x داریم:

$$F_x = -\rho V_1^{\ 2} A_1 (1 - \cos\theta)$$

توجه کنید که اثر فشار اتمسفر در جهت x برای حجم کنترل انتخاب شده خنثی می شوند در نتیجه F_x عبارت

است از کل نیرویی که زمین به پره باید وارد کند (در جهت x)

در نتیجه برای تعادل این جسم آزاد باید داشته باشیم .



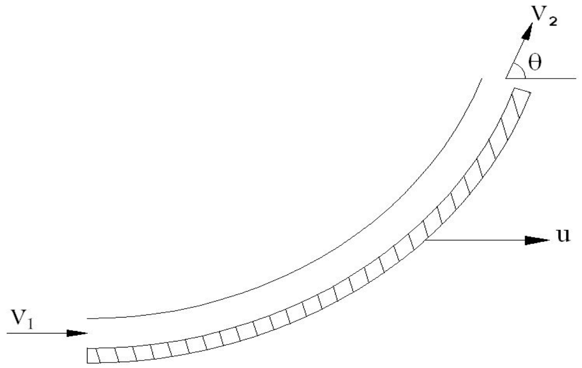
$$F_x + K_x = 0$$

$$\Rightarrow K_x = -F_x = \rho V_1^2 A_1(1-\cos\theta)$$

که همان نتیجه قبل است .

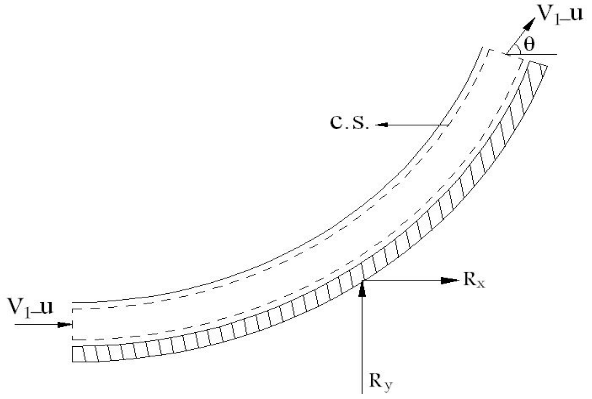
بنابراین انتخاب حجم کنترل در اینکه مساله ساده یا مشکل حل شود تاثیر دارد هر چند که جواب نهایی یکی است .

مثال ۳-۱۲-: پره متحرک $(Moving\,Vang)$: اگر پره با سرعت u حرکت کند و یک جت آب با سرعت V_1 به آن برخورد کند نیروی وارد بر پره از طرف آب را تعیین کنید؟



در این حالت محور مختصات را سوار پره می کنیم تا محور مختصات و پره نسبت به هم سرعتی نداشــته باشــند . در این حالت محور مختصات با سرعت V حرکت می کند و سرعت جریان نسبت به محور مختصات $V_1 - u$ مـی باشد .

مطابق شکل یک حجم کنترل انتخاب می کنیم .



$$\sum \vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \rho V_x dV + \int_{C.S.} \rho V_x (\vec{V}.d\vec{A})$$

چون اطراف پره هوا است بنابراین نیروهای فشار اتمسفر یکدیگر را خنثی می کنند .

$$\Rightarrow +R_x = \rho(V_1 - u)[-(V_1 - u)A_1] + \rho(V_1 - u)\cos\theta[+(V_1 - u)A_2]$$

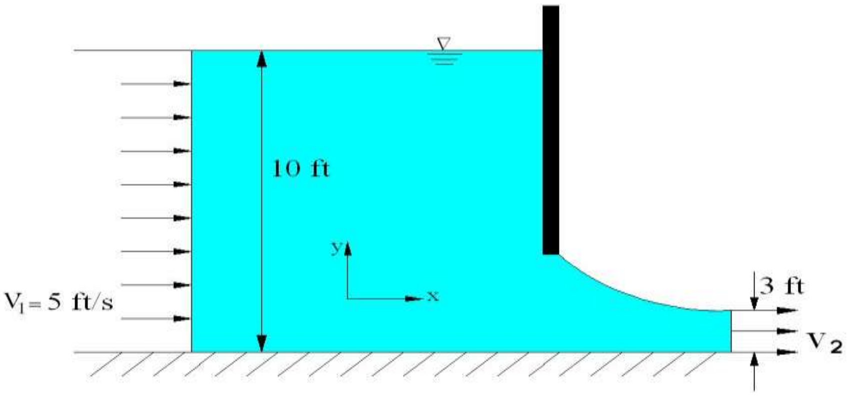
پیوستگی برای حجم کنترل : $\rho(V_1 - u)A_1 = \rho[(V_1 - u)A_2]$

$$\Rightarrow R_x = -\rho(V_1 - u)^2 A_1 (1 - \cos\theta)$$
$$\Rightarrow K_x = -R_x = \rho(V_1 - u)^2 A_1 (1 - \cos\theta)$$

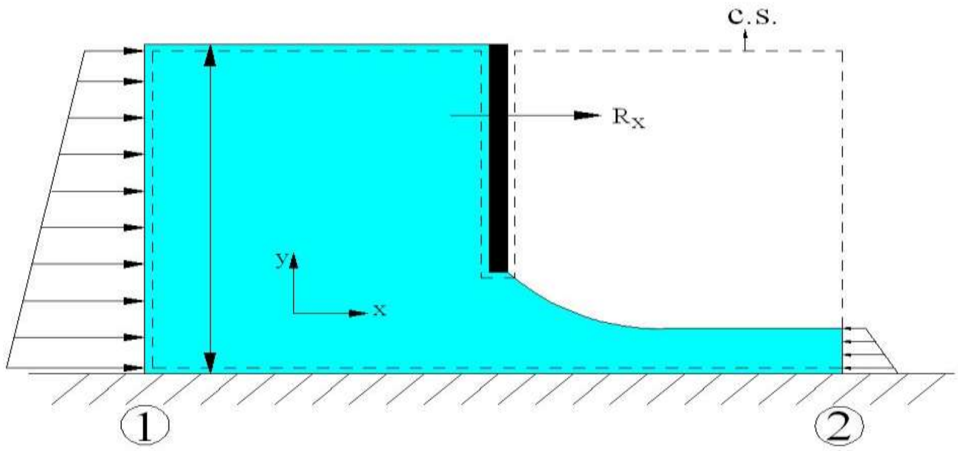
و به طریق مشابه داریم :

$$\sum \vec{F}_y = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \rho \vec{V}_y dV + \int_{C.S.} \rho \vec{V}_y (\vec{V}.d\vec{A})$$
$$\Rightarrow R_y - W = 0 + \rho(V_1 - u)\sin\theta[+(V_1 - u)A_1]$$
$$\Rightarrow R_y = \rho(V_1 - u)^2 A_1 \sin\theta$$
$$\Rightarrow K_y = -\rho(V_1 - u)^2 A_1 \sin\theta$$

مثال۳-۱۳-: شکل زیر سطح مقطع یک دریچه کشویی را نشان می دهد ، که وسیله ای است برای کنترل جریان آب در کانالها.نیروی وارد بر دریچه برای واحد عرض دریچه را تعیین کنید؟



چون نیرو مورد نظر است بنابراین باید از معادله اندازه حرکت خطی استفاده کرد . باید یک حجم کنترل انتخاب کنیم که نیروی مورد نظر برای استفاده در معادله اندازه حرکت خطی را نشان دهد . چنین حجم کنترلی در شکل صفحه بعد نشان داده شده است که نیروی R_x که توسط دریچه بر سطح کنترل وارد می شود عکس العمل نیروی مورد نظر در این مساله است .



فرضیات :

۱) جریان پایدار

۲) جریان تراکم ناپذیر

۳) جریان دو بعدی در نزدیکی دریچه

۴) جریان یک بعدی در ورودی و خروجی حجم کنترلی

۵) تغییر فشار هیدروستاتیکی در نقاط 1,2

۶) تنش برش صفر در بستر کانال

$$\sum \vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V} \rho \vec{V}_x dV + \int_{C.S.} \rho \vec{V}_x (\vec{V}.d\vec{A})$$

$$\gamma\, \bar{h}_1 A_1 - \gamma\, \bar{h}_2 A_2 + R_x = \rho V_1(-V_1 A_1) + \rho\, V_2(+V_2 A_2)$$

$$\Rightarrow \gamma \bar{h}_1 A_1 - \gamma \bar{h}_2 A_2 + R_x = [\rho V_2^2 A_2 - \rho V_1^{\,2} A_1]$$

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

$$\Rightarrow V_2 = V_1(A_1 / A_2) = 5 \times \frac{10\times 1}{3\times 1} = 16.67\, ft/\sec$$

$$\Rightarrow 62.4 \times 5 \times (10\times 1) - 62.4 \times 1.5 \times (3\times 1) + R_x =$$

$$\frac{62.4}{gc}((16.67)^2 \times 3 \times 1 - 5^2 \times 10 \times 1) = 32.174 \quad , \qquad g_C = 32.174 \frac{lb_m.ft}{lb_m.\sec^2}$$

$$\gamma = \rho \frac{g}{gc} \approx \rho$$

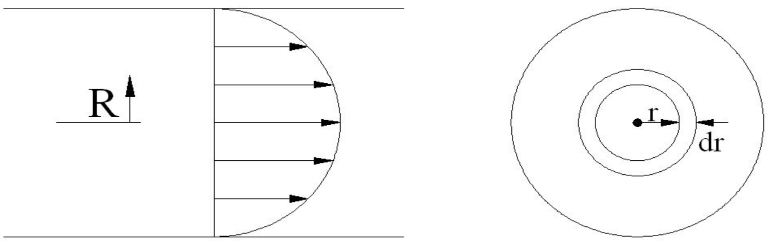
$$\Rightarrow R_X = -1707.2 lbf/ft \Rightarrow k_x = 1707.2 lbf/ft$$

تصحیح سرعت در معادله برنولی

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{u_1^{\,2}}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{u_2^{\,2}}{2}$$

واحد $\quad \frac{u_1^{\,2}}{2} = \frac{m^2}{\sec^2} \times \frac{kg}{kg} = \frac{kg \frac{m}{\sec^2} m}{kg} = \frac{n.m}{kg} = \frac{J}{kg}$

معادله بالا برای حالتی است که بدون اصطکاک و لذا یک بعدی بوده, که u_1, u_2 سرعتهای متوسط باشند. وقتی که سرعت در سطح مقطع (مثلا یک لوله) تغییر کند داریم :



مقدار جرمی که از المان $dm^{\bullet} = \rho\, u\, dA$ و المان از سطح مقطع dA عبور می کند .

مقدار انرژی سینیتیک که از المان عبور می کند $d\dot{E} = d\dot{m}.\frac{u^2}{2} = \rho\, u\, dA.\frac{u^2}{2} = \frac{\rho\, u^3 dA}{2}$

$$\Rightarrow \dot{E}_K = \frac{\rho}{2}\int_A u^3 dA \qquad \rho = Cte$$

$$\begin{cases} d\dot{m} = \rho u dA \Rightarrow \dot{m} = \int_A \rho u dA \\ \bar{u} = \text{متوسط} \quad \text{سرعت} \quad \Rightarrow \dot{m} = \rho \bar{u} A \end{cases}$$

$$\frac{\dot{E}_K}{\dot{m}} = \frac{\frac{\rho}{2}\int_A u^3 dA}{\rho \int_A u dA} \quad , \quad \bar{u} = \frac{1}{A}\int_A u dA \Rightarrow \bar{u}A = \frac{1}{A}\int_A U dA$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{E}_K}{\dot{m}} = \frac{1}{2}\frac{\int_A u^3 dA}{\bar{u}A} \times \frac{\bar{u}^2}{\bar{u}^2} = \frac{1}{2}\bar{u}^2 \frac{\int_A u^3 dA}{\bar{u}^3 A}$$

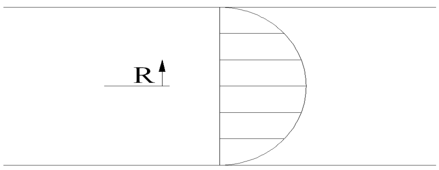
$$\Rightarrow \frac{\dot{E}_K}{\dot{m}} = \frac{1}{2}\alpha\, \bar{u} \qquad \alpha = \frac{\int_A u^3 dA}{\bar{u}^3 A}$$

$\alpha = Kinetic\ Energy\ Corretion\ Factor$

لذا معادله برنولی :

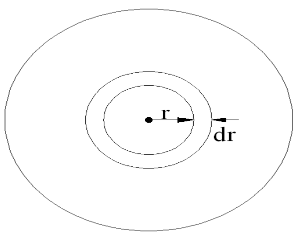
$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \alpha_1 \frac{u_1^{\ 2}}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \alpha_2 \frac{u_2^{\ 2}}{2}$$

تمرین۳-۵-: در جریان آرام در یک لوله تغییرات سرعت بصورت زیر است :



$$u = u_{\max}[1-(\frac{r}{R})^2]$$

ثابت کنید ؟ $\alpha = 2$



$$\alpha = \frac{\int_A u^3 dA}{\bar{u}^3 . A} = \frac{\int_0^R u^3 (2\pi r dr)}{\bar{u}^3 . A}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{A}\int_0^R u(2\pi r dr) \quad , A = \pi R^2 \Rightarrow \quad dA = 2\pi r dr$$

$$\bar{u} = \frac{1}{2} u_{\max}$$

برای معادله ممنتوم نیز $\beta (Momentum\ CorrechionFactor)$ تعریف می شود که اثبات می شود:

و در معادله ممنتوم :

$$\beta = \frac{1}{A}\int_A (\frac{u}{\bar{u}})^2 dA$$

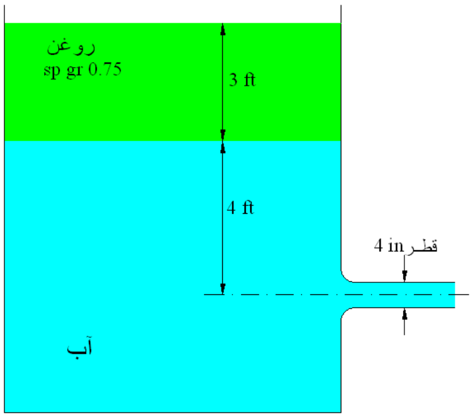
$$\bar{u}_1 \rightarrow \beta_1 \bar{u}_1$$

ممنتوم= $\beta\, \bar{u} . \dot{m}$

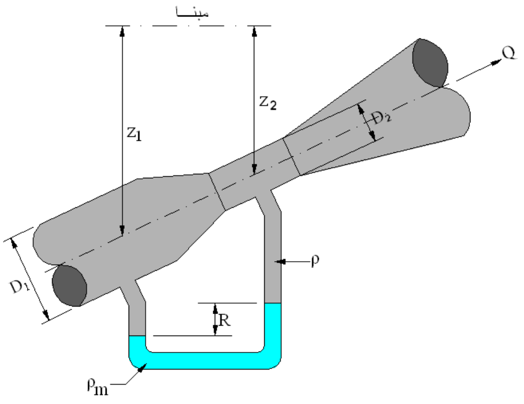
مسائل

۳-۱- مکعبی را در نظر بگیرید که طول هر ضلع آن ۱m است و در ربع اول دستگاه مختصات قرار دارد. اضلاع مکعب به موازات محورها هستند و یکی از گوشه هایش بر مبدأ مختصات منطبق است. برای توزیع سرعت $\mathbf{V} = (5x)\mathbf{i} + (5y)\mathbf{j} + (-10z)\mathbf{k}$ ، دبی عبوری از هر یک از وجوه مکعب را به دست آورید. نشان دهید که اگر دانسیته سیال ثابت باشد، هیچ جرمی در داخل مکعب انباشته نمی شود.

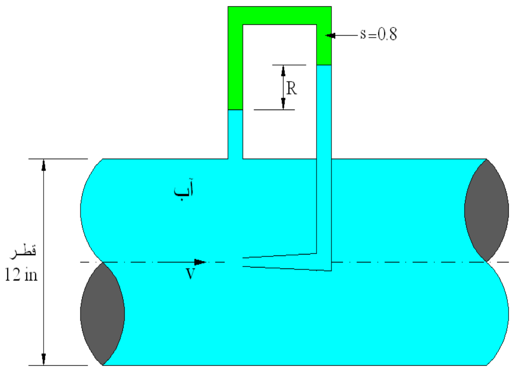
۳-۲- دبی آب خروجی از مخزن شکل زیر را به دست آورید. از تلفات صرفنظر کنید.



۳-۳- برای لوله وانتوری شکل زیر رابطه ای بنویسید که دبی حجمی جریان را بر حسب اختلاف ارتفاع مانتوری به دست دهد.



۳-۴- در شکل زیر R=۱۲ in است. سرعت V چقدر است؟

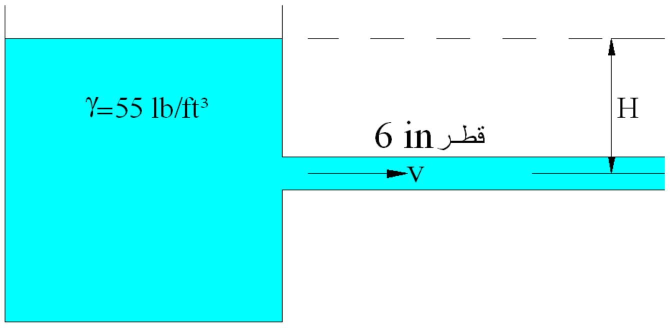


۳-۵- برای جریان بسیار درهم، توزیع سرعت با رابطه زیر داده می شود :

$$\frac{v}{v_{max}} = \left[\frac{y}{r_o}\right]^{1/9}$$

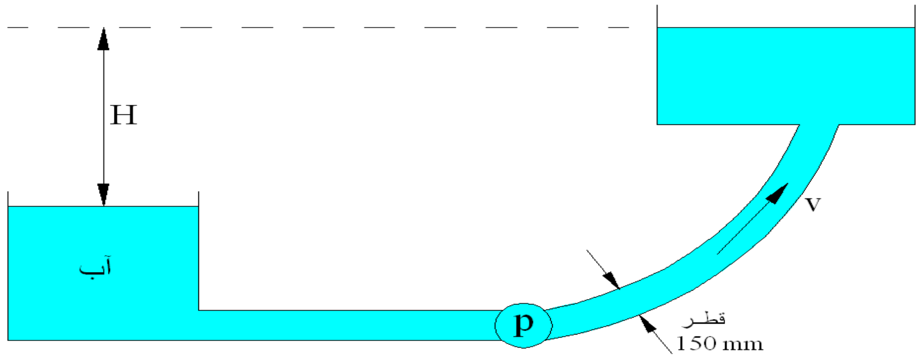
r_o شعاع لوله و y فاصله از دیواره آن است. ضریب تصحیح انرژی جنبشی را تعیین کنید.

۳-۶- در شکل زیر به ازای H =۲۵ ft تلفات برابر ۳v²/۲g ft.lb/lb است. دبی را به دست آورید.

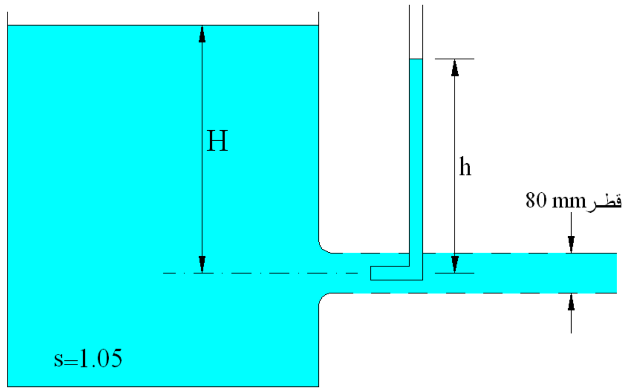


۳-۷- درشکل مسألهٔ قبل برای دبی 750 gpm ، H را حساب کنید. تلفات ۱۰v² /۲g ft.lb/lb است.

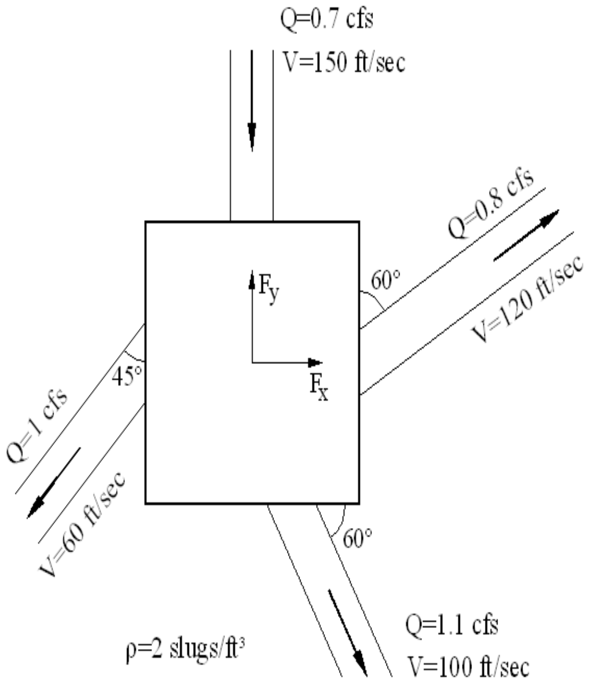
۳-۸- در شکل زیر پمپ ۳۰ L/s آب را جا به جا می کند. راندمان پمپ ۸۰ درصد است. توان روی محور پمپ را به دست آورید. تلفات سیستم به استثنای تلفات پمپ به صورت ۱۲v²/۲g بیان می شود.H=۱۶ m



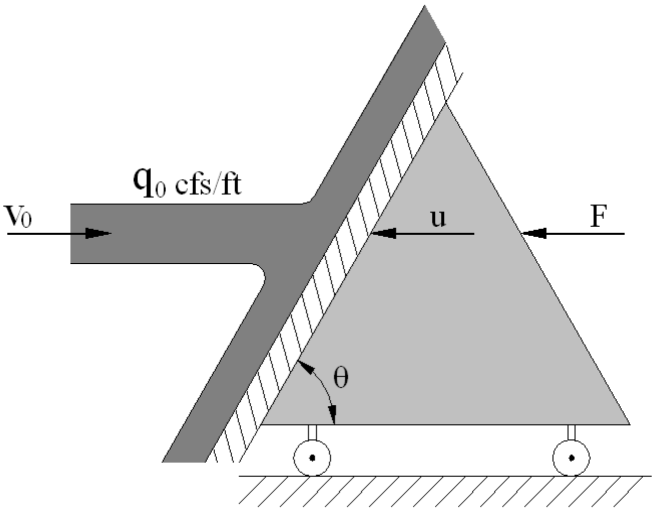
۳-۹- در شکل زیر، H = ۶ m است و h = ۵.۷۵ m می باشد. دبی را تعیین کنید. تلفات برحسب متر- نیوتن بر نیوتن و برحسب وات چقدر است؟



۳-۱۰- در شکل زیر مؤلفه های نیروی لازم برای ساکن نگه داشتن جعبه را به دست آورید. در تمام مقاطع فشار نسبی صفر است.

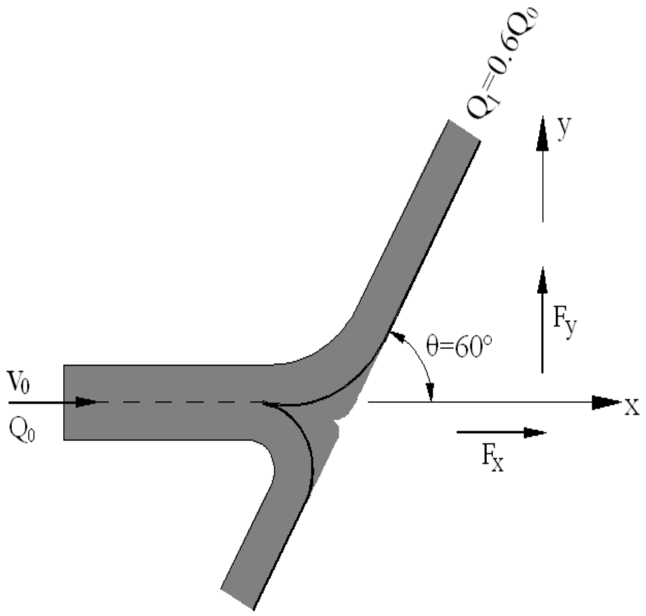


۳-۱۱- در شکل زیر صفحه با سرعت u به طرف جت حرکت می کند. رابطه ای بنویسید که توان لازم برای حرکت صفحه را به دست دهد.



۳-۱۲- در شکل مسألهٔ قبل برای اینکه حداکثر توان از جت گرفته شود، گاری با چه سرعتی باید از جت دور شود؟

۳-۱۳- در شکل زیر پره با سرعت u=۴۰ ft/sec در امتداد x حرکت می کند. به ازای مقادیر Q_0= ۲ ft³/s، ρ =۱.۹۳۵ Slugs/ft³ و V_0 =۱۲۰ ft/s، مؤلفه های F_x و F_y را به دست آورید.



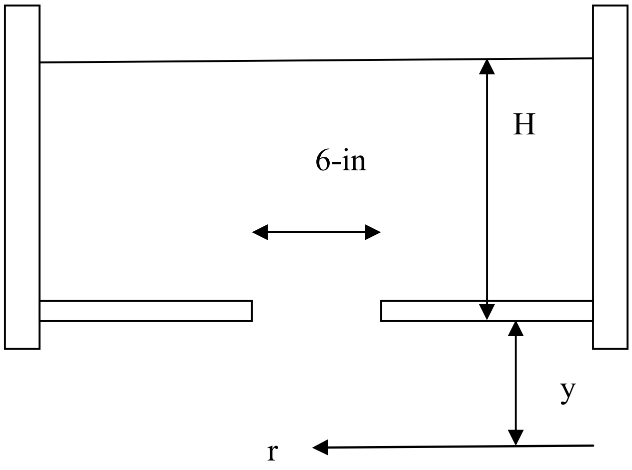
۳-۱۴- روابط زیر بین مختصات دکارتی و قطبی برقرار می باشد.

$$x^2+y^2=r^2 \quad , \quad \frac{y}{x}=\tan\theta \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

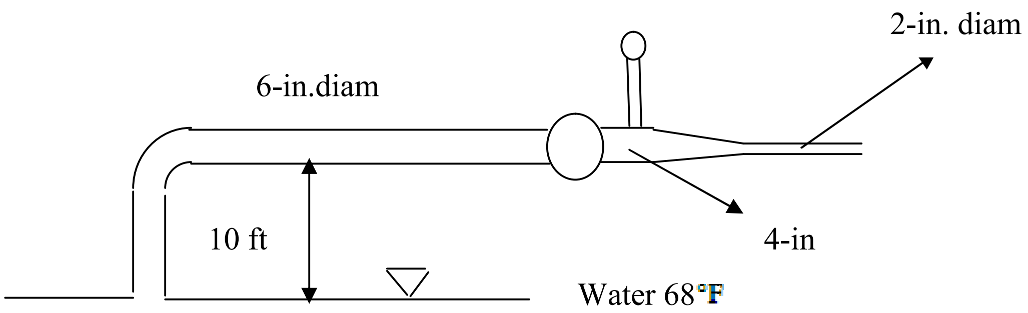
$$u=v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta \qquad v=v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta$$

با استفاده از این روابط شکل معادله پیوستگی را برای مختصات قطبی به دست آورید. آیا سرعت داده شده در معادله به دست آمده صدق می کند؟

۳-۱۵- معادله ای برای r در سطح آب فواره بر حسب y/H به دست آورید.
از اتلافات و اثرات کشش سطحی صرف نظر کنید.



۳-۱۶- در سیستم پمپاژ نشان داده شده هنگامی که فشار خروجی psi ۵ باشد کاویتاسیون در مدخل پمپ شروع می شود. برای این شرایط طول لوله مکش را محاسبه و فرض کنید که افت در طول لوله مکش برابر با $(V_1^2/2g)(0.03L/D)$ باشد. توسط پمپ چند اسب بخار توان به آب داده شده و چند درصد این توان صرف غلبه بر اتلافات شده است؟
فشار بارومتریک in-Hg ۳۰ است.

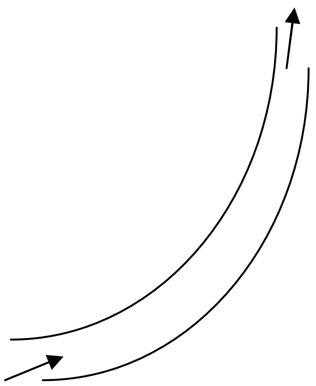


۳-۱۷- مولفه های سرعت برای یک سیال تراکم ناپذیر که به صورت u(x, y, z) و w(x, y, z) است در روابط زیر صدق می کنند:

$$U=(1+xy)(a_0+a_1x+a_2x^2) \quad \text{and} \quad w=0 \qquad 0\leq x, y, z \leq 1$$

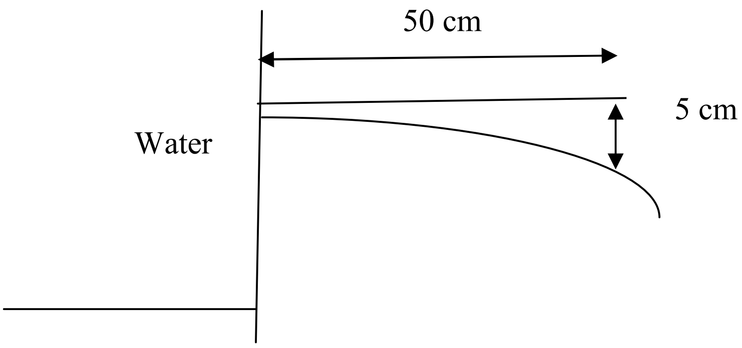
مولفه سرعت $v(x, y, z)$ را بیابید.آیا این میدان جریان قابل قبول است؟

۳-۱۸- آب در یک لوله با پیچ ۴۵ درجه در سطح افقی جریان دارد. فشار در مقطع ورودی برابر با ۵۰ kN/m^2 با قطر ۶۰۰ mm ودر مقطع خروجی اتمسفریک با قطر ۳۰۰ mm می باشد. اگر شدت جریان برابر با ۰.۴۵ m^3/s باشد نیروی لازم جهت تامین تعادل این لوله چند نیوتن است؟

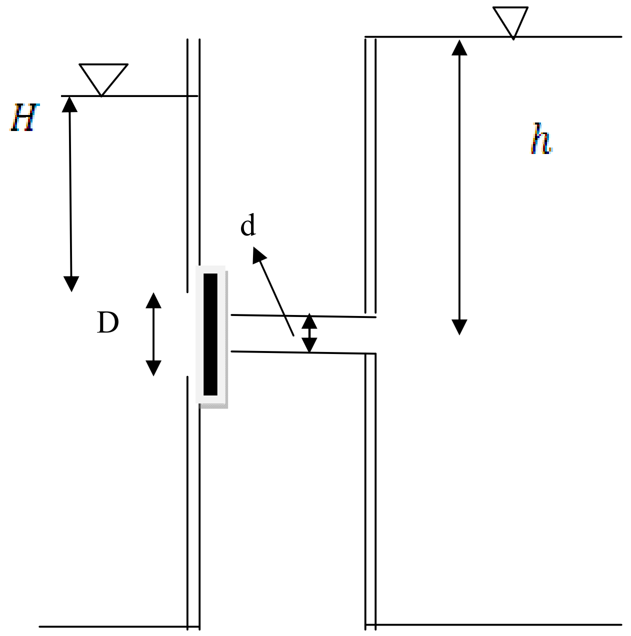


۳-۱۹- یک دریچه کشویی آب را از مخزنی تخلیه می کند. سطح مقطع مخزن ثابت و برابر با ۱۰۰ متر مربع و سطح مقطع بازشدگی دریچه ۲ m^2 است. اگر در شروع تخلیه m ۱۰ آب روی دریچه باشد پس از ۱۵ ثانیه سطح آب در مخزن چند متر پایین می آید؟

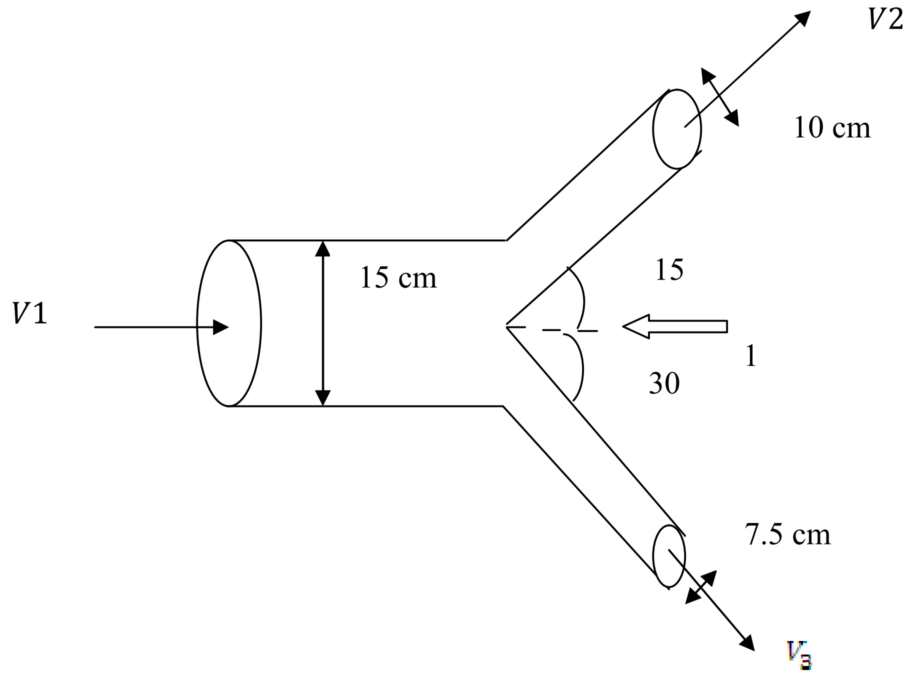
۳-۲۰- سوراخ لبه تیزی به قطر ۲ سانتی متر به صورت افقی در دیواره عمود مخزن آبی وجود دارد. آب مطابق شکل از مخزن خارج می شود. دبی خروجی مخزن بر حسب لیتر در ثانیه چقدر است؟



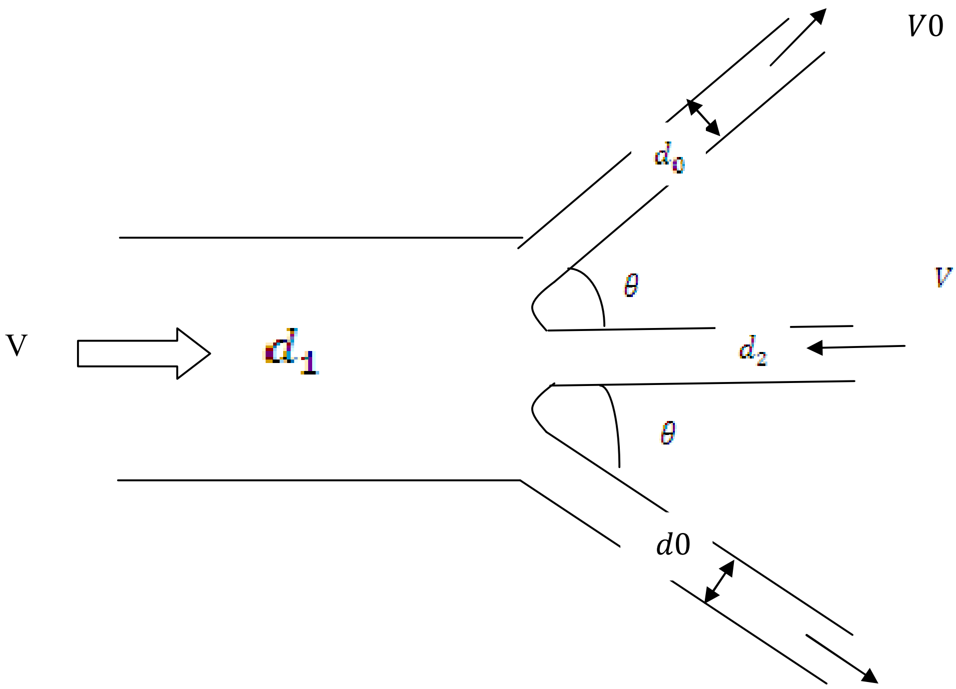
۳-۲۱- در وضعیت نشان داده شده جت آب به قطر d با مانعی که دهانه مخزن به قطر D را مسدود کرده برخورد می کند. حداقل نسبت h/H را بدست آورید؟



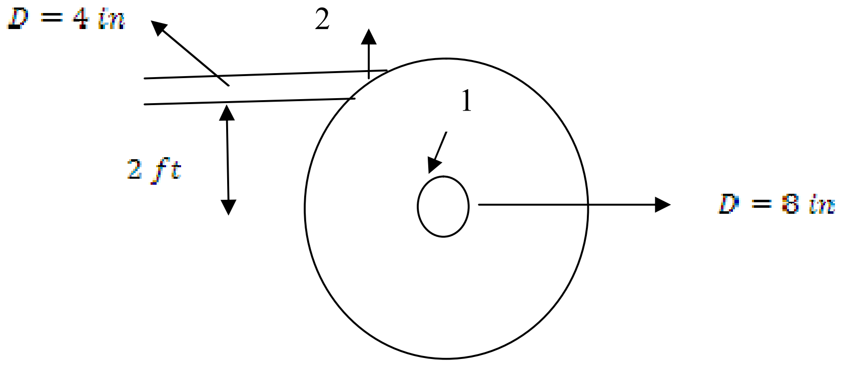
۳-۲۲- در شکل زیر نیروی وارد در جهت محور x ها را بر حسب نیوتن محاسبه کنید. سرعت جت خروجی در هر دو لوله m/s ۱۲است و لوله ها افقی و از افت در سیستم صرف نظر شده است.



۳-۲۳- دو جت آب که دارای سطح مقطع دایره ای شکل هستند با سرعت V و قطرهای d_1 و d_2 به هم برخورد می کنند و مطابق شکل روی سطح مخروطی با زاویه راس θ پراکنده می شوند. چه رابطه ای بین θ و d_1 و d_2 وجود دارد؟ (از نیروی وزن صرف نظر شود) $\sin\theta$ را بر حسب d_1 و d_2 بدست آورید.

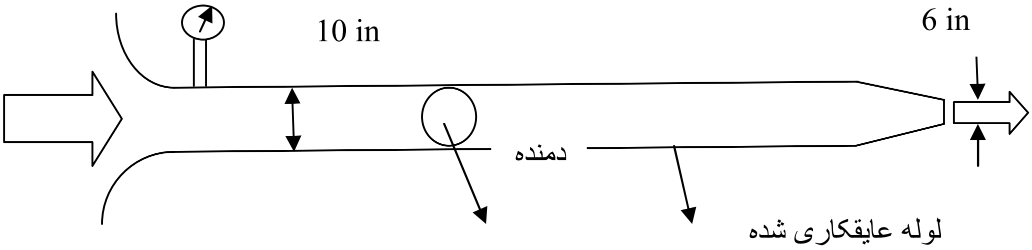


۳-۲۴- یک پمپ گریز از مرکز ۵۰ hp توان مصرف می کند. فشار نسبی آب در ۲ برابر با ۳۰ lb/in^2 و در ۱ برابر با ۱۰ lb/in^2 می باشد. پمپ چه مقدار آب پمپاژ می کند؟

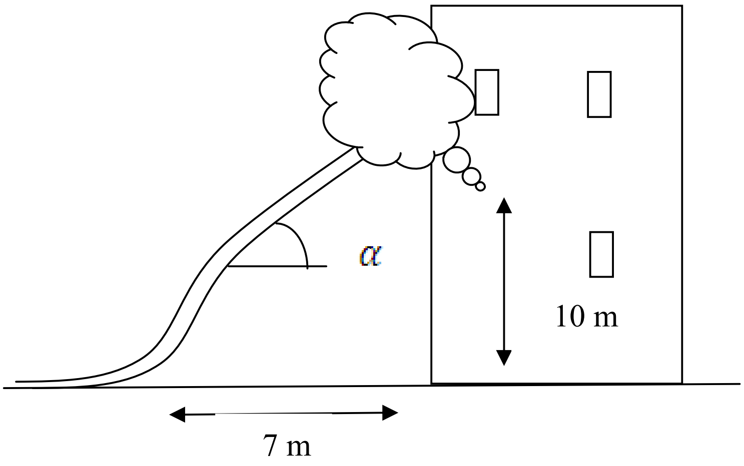


۳-۲۵- هوا توسط یک دمنده به داخل یک لوله عایقکاری شده جریان می یابد. می خواهیم در هر ثانیه ۵۰ ft^3 هوا در A جریان یابد. فشار مطلق هوای ورودی P_A برابر ۱۰ lb/in^2 و دمای آن ۶۰ °F می باشد. توان لازمه دمنده چقدر است؟

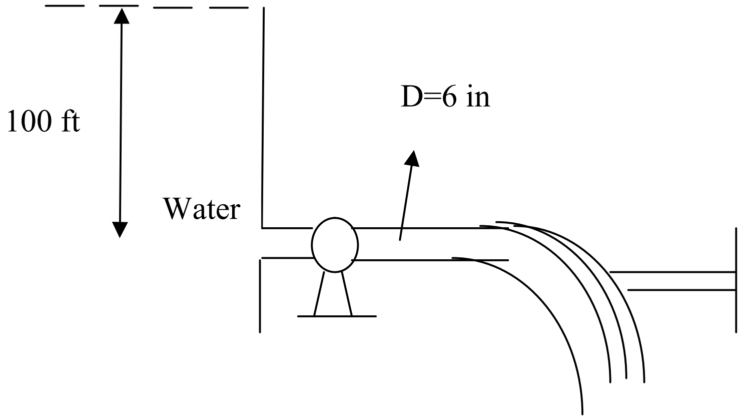
u را معادل $C_V\,T$ بگیرید که C_V گرمای ویژه در حجم ثابت و T دمای مطلق است. C_V را برابر 0.171 $Btu/(lbm)(°R)$ بگیرید. دمای خروجی هوا ۹۰ °F می باشد.



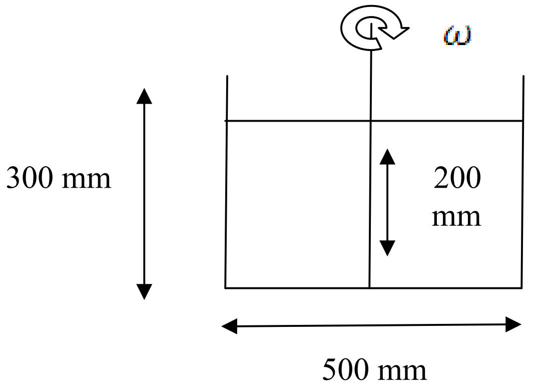
۳-۲۶- مامور آتش نشانی آب را از یک شلنگ به طرف شیشه شکسته خانه ای که آتش گرفته هدایت می کند. سرعت آب در هنگام خروج از لوله خرطومی ۱۵ m/s است. برای این کار زاویه α چقدر باشد؟



۳-۲۷-آب از یک مخزن بزرگ وارد لوله ای شده و پس از خروج از آن مطابق شکل به یک صفحه منحرف کننده ۹۰ درجه برخورد می کند. اگر نیروی وارده به این صفحه ۲۰۰ lb باشد توان ایجاد شده توسط توربین چقدر است؟



۳-۲۸- مخزنی از آب تحت سرعت زاویه ای ω رادیان بر ثانیه به گردش در می آید. آب در چه سرعتی در حالت دائمی از ظرف سرریز می کند؟

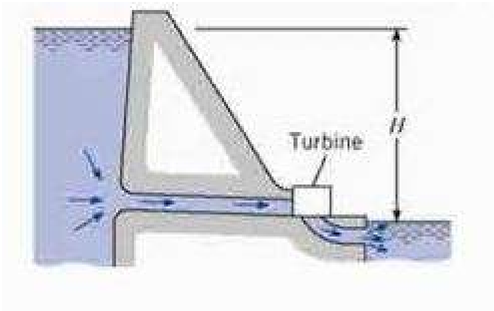
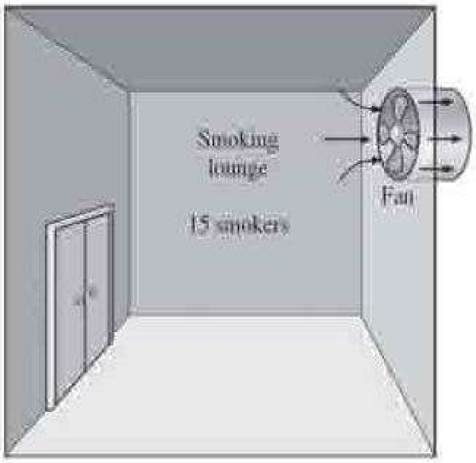


۳-۲۹- در یک جریان بردار سرعت به صورت زیر می باشد:

$$V = \frac{y}{2} i + xy^2 j$$

معادله کلی خط جریان و یا همان stream line را به ساده ترین شکل ممکن بدست آورید.

۳-۳۰-درصورتی که H=85 m ، شدت جریان $25m^3 / s$ و افت انرژی مسیر $5m$ باشد، توان تولیدی توربین را با راندمان ۸۰ درصد محاسبه کنید.



۳-۳۱-در یک ساختمان عمومی ، اتاق ویژه ای برای افراد سیگاری ساخته شده است در صورتی که این اتاق برای استفاده همزمان ۱۵ نفر طراحی شده باشد و بر طبق استاندارد، حداقل شدت هوای تازه در چنین اتاقی ۳۰لیتر بر ثانیه توصیه شده باشد، قطر مجرای هواکش مورد نیاز را برای سرعت ۸m/s محاسبه کنید در صورتی که جرم حجمی هوا /۱/۲kg باشد، جرم هوایی که در ۱۲ ساعت از این اتاق خارج میشود را نیز محاسبه کنید.