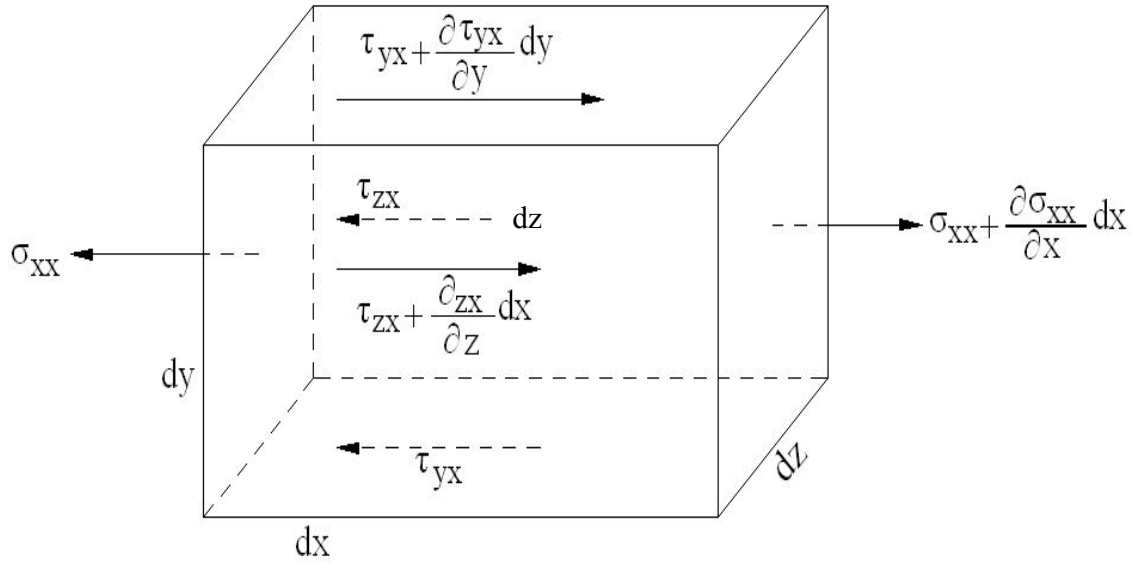
فصل چهارم:

اثرات ویسکوزیته و جریان در لوله ها

در این فصل سیال حقیقی($\mu \neq 0$) یا به عبارت دیگر وضعیتهایی که در آنها برگشت ناپذیرهااهمیت دارند ، مورد بررسی قرار می گیرد. ویسکوزیته خاصیتی از سیال است که سبب ایجاد تنش برشی در سیال در حال حرکت می گردد .

برای بدست آوردن معادلات حرکت سیال حقیقی المانی کوچک از سیال در نظر می گیریم که بر آن نیروهای برشی ناشی از حرکت سیال و اثرات ویسکوزیته در نظر گرفته می شود و قانون دوم نیوتن را در مورد آن بکار می بریم .



برای سیال تراکم ناپذیر داریم:

$$\sum F_x = ma_x = \rho\, dx\, dy\, dz\, a_x$$

$$(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dy\, dz - \sigma_{xx} dy dz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx\, dz - \tau_{yx} dx\, dz$$

$$+ (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx\, dy - \tau_{zx} dx\, dy + B_x \rho\, dx\, dy\, dz = \rho\, dx\, dy\, dz\, a_x$$

تقسیم بر $dx\, dy\, dz$:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho B_x = \rho a_x = \rho \frac{du}{dt}$$

$\sigma_{xx} + p = \tau_{xx} \Rightarrow \sigma_{xx} = \tau_{xx} - p \rightarrow$ فشار ترمودینامیکی یا استاتیکی

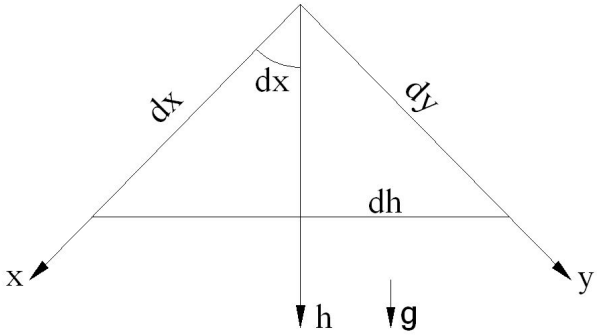
$$\Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho B_x = \rho \frac{du}{dt}$$

معادله اولر $\Rightarrow \rho g - \frac{\partial P}{\partial x} = \rho \frac{du}{dt}$ جریان بدون اصطکاک

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \qquad , \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z})$$

معادلات بالا قانون ویسکوزیته استوکس هستند.



با توجه به شکل قبل داریم:

$$B_x = -g\cos\alpha_x$$

$$\cos\alpha_x = \frac{dh}{dx} \Rightarrow B_x = -g\frac{\partial h}{\partial x} \;\Rightarrow \rho B_x = -\rho g\frac{\partial h}{\partial x} = -\gamma\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$B_y = -g\cos\alpha_y = -g\frac{\partial h}{\partial y}\;,\quad B_z = -g\frac{\partial h}{\partial z}$$

τ_{ij}= تنش در جهت j بر روی صفحه عمود بر محور i

$$\begin{vmatrix} -P+\tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -P+\tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -P+\tau_{zz} \end{vmatrix}$$

با ترکیب معادلات بالا و فرض μ و ρ ثابت داریم:

$$\Rightarrow \rho\frac{du}{dt} = \rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}) = -\frac{\partial}{\partial x}(P+\gamma h)$$

$$+\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) \Rightarrow \rho\frac{du}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(P+\gamma h) + \mu\nabla^2 u$$

$$u = u(x,y,z,t)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{du}{dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow \rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(p+\gamma h) + \mu \nabla^2 u$$
$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y}(p+\gamma h) + \mu \nabla^2 v$$
$$\sum F_z = ma_z \Rightarrow \rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial}{\partial z}(p+\gamma h) + \mu \nabla^2 w$$

معادلات بالا معادلات ناویه استوکس $(Navier\ Stockes)$ نامیده می شود که در این روابط $u, v.w$ سرعت در جهت $x, y.z$ می باشد و h بعنوان مختصاتی که قائم و به سمت بالا مثبت می باشد اختیار شده است . $\frac{d}{dt}$ مشتق نسبت به حرکت(دیدگاه اولری) به فرم زیر می باشد.

$$\frac{d}{dt} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} : Subs\tan tial\ \ Derivative$$

بعنوان مثال برای $\frac{du}{dt}$ داریم:

$$\frac{du}{dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

و عملگر ∇^2 به فرم زیر تعریف می شود.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

بعنوان مثال $\nabla^2 u$ چنین است:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

در معادلات بالا $u, v.w$ و p مجهولند که به یک معادله دیگر نیز نیاز است و آن معادله پیوستگی است.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) = 0$$

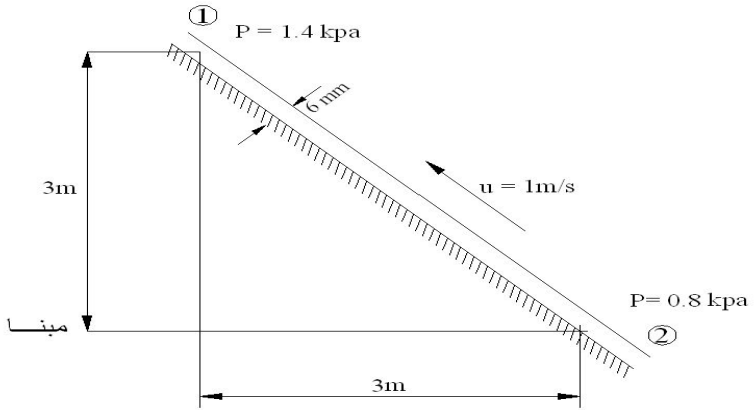
که تمامی معادلات فوق غیر خطی هستند.

باید متذکر شد که h در معادلات بالا سطح مقایسه ای است که در معادله برنولی با h نشان داده شد.

Set up معادلات جریان سیال با استفاده از معادلات ناویه استوک:

مثال۴-۱-: مطابق شکل سیالی با سرعت $1m/s$ و بر روی سطح شیبدار حرکت می کند. (البته صفحه فوقانی با سرعت $1m/s$ حرکت می کند) توزیع سرعت، دبی و تنش برشی اعمال شده بر صفحه فوقانی را تعیین کنید.

$$\rho = 850\ kg/m^3\ ,\ \mu = 0.8P$$



از آنجائی که سطح فوقانی به سمت بالا وبنابراین به تبع آن سیال در سطح فوقانی به سمت بالاو در روی سطح شیب دارسیال به سمت پایین حرکت می کند،توزیع سرعت به صورت سهمی می باشد که در وسط صفر است.

محورهای مختصات را مطابق شکل طوری انتخاب می کنیم که محور x ها موازی سطح و رو به پایین و محـور y هـا عمـود بـر سطح و رو به بالا باشد فرضیات :

۱)جریان دائم

۲) غیر قابل تراکم

۳)جریان لامینار (سرعت کم)؛(جریان آرام)

۴)جریان تکامل یافته(fully developed)؛(سرعت مستقل از جهت حرکت است)

معادله ناویه استوکس را در جهت x می نویسیم .

$$x-component:$$

$$\rho\frac{du}{dt}=-\frac{\partial}{\partial x}(p+\gamma h)+\mu\nabla^2 u$$

$$\Rightarrow \rho(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z})=-\frac{\partial}{\partial x}(p+\gamma h)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

معادله بالا را برای مثال ساده می کنیم .

جریان دائم $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=0$

چون سرعت u در جهت x ثابت است .

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

چون سرعت در جهت y نداریم پس $v=0$ البته $\frac{\partial u}{\partial y}\neq 0$

چون در جهت z مولفه سرعت نداریم $w=0$

$$w\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

بنابراین سمت چپ معادله فوق صفر است و در سمت راست $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ صفر است و چون در جهت z حرکت مطرح نیست.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

پس داریم:

$$\Rightarrow 0=-\frac{\partial}{\partial x}(p+\gamma h)+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

در اکثر مسائل پس از ساده کردن به چنین رابطه ای می رسیم که u تابعی از y است اگر چه خودش در جهت x است .

$p+\gamma h$ عبارتست از جمع فشار درهر نقطه با γh ؛که h ارتفاع است . از آنجاییکه $p+\gamma h$ با تغییرات y تغییر زیادی نمی کند،(چون کل ضخامت 0.006 متر است ،که قابل صرف نظر کردن است)و در جهت x تغییر می کند ؛پس فقط تابعی از x است. پس:

$$\frac{d}{dx}(p+\gamma h)=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{d}{dx}(p+\gamma h)=\frac{(p+\gamma h)_2-(p+\gamma h)_1}{x_2-x_1}=$$

$$\frac{800-(1400+850\times 9.806\times 3)}{3\sqrt{2}}=-6035N/m^3$$

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6035\Rightarrow\frac{d^2u}{dy^2}=-\frac{6035}{0.08}$$

$$\mu=0.8\frac{g}{cm.s}\times\frac{1kg}{1000g}\times\frac{100cm}{1m}=0.08\frac{kg}{m.s}\quad or\quad\frac{N.s}{m^2}$$

از طرفین رابطه انتگرال می گیریم $\Rightarrow\frac{du}{dy}=-\frac{6035}{0.08}y+c\Rightarrow u=-\frac{6035}{0.08}.\frac{y^2}{2}+cy+c_1$

که معادله یک سهمی است.

در روی سطح $at\quad y=0\Rightarrow u=0\Rightarrow 0=0+0+c_1\Rightarrow c_1=0$

$$at\quad y=0.006\Rightarrow u=-1m/s\Rightarrow -1=-\frac{6035}{0.08}\frac{(0.006)^2}{2}+c\times 0.006$$

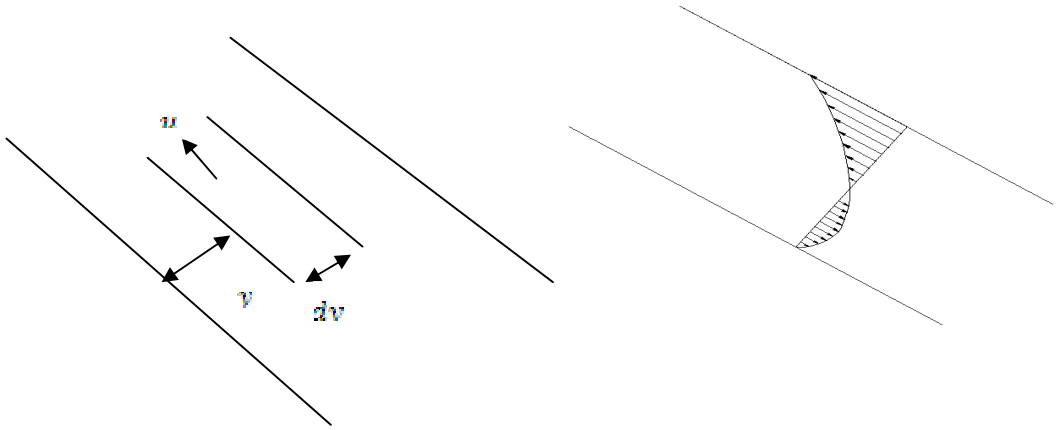
$$\Rightarrow c=59.646$$

$\Rightarrow u=-37718.75y^2+59.646y$ معادله توزیع سرعت

du/dy =0 $\Rightarrow$ y=0.0079m $\Longrightarrow$ u_{max}=0.0236m/s

مقدار فوق ماکزیمم سرعت مثبت است ولی سرعت ماکزیمم مطلق در صفحه متحرک در y=0.006 است.

که منحنی آن به شکل زیر است .



المان می گیریم:

$$Q=? \quad \text{volumetric flow rate}$$

$$dQ=udy\times 1 \Rightarrow Q=\int udy$$

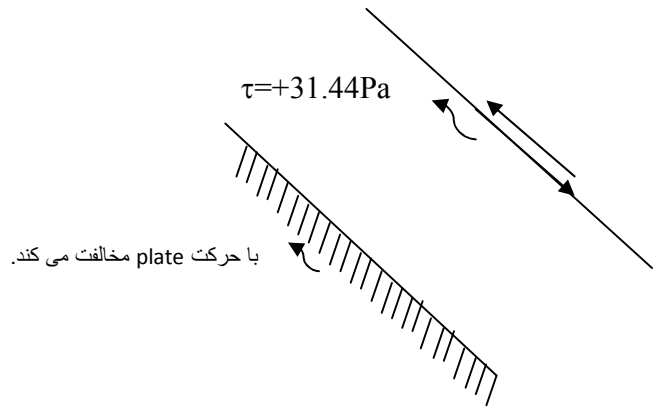
$$\Rightarrow Q=\int_0^{0.006} u\,dy=\int_0^{0.006}\left(-37718.75y^2+59.646\,y\right)dy$$

مفهوم علامت منفی این است که سیال به طرف بالا در حرکت است چون جهت مثبت x رو

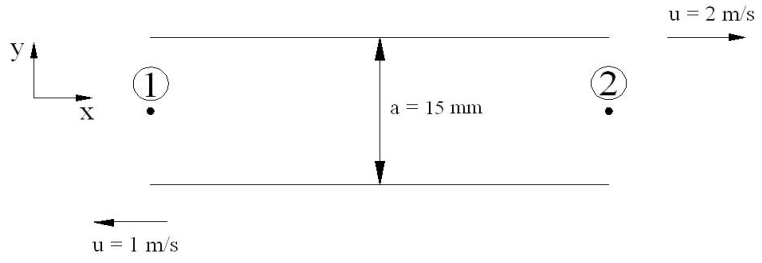
به پایین است .

$$\tau=\mu\frac{du}{dy} \qquad , \qquad \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0.006}=59.646-75436y=-392.97S^{-1}$$

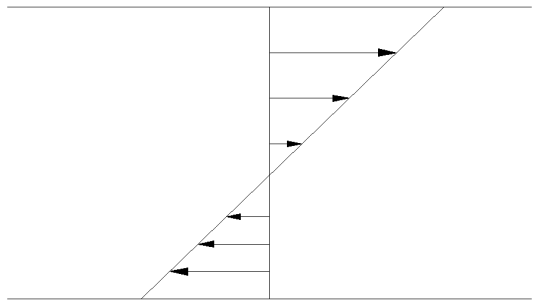
$$\Rightarrow \tau=0.08(-392.97)=-31.44N/m^2$$



مثـال ۴-۲-: سـیالی بـا ویسـکوزیته $\mu = 0.05 \frac{kg}{m.\sec}$ بـین دو صـفحه مـوازی قـرار دارد کـه صـفحه بـالایی بـا سـرعت $u = 2\,m/s$ و صفحه پایینی با سرعت $u = 1\,m/s$ در جهت عکس حرکت می کند تنش برشی را در صفحه بالایی و پایینی بیابید .



ذرات بالایی همراه با صفحه بالایی به سمت راست وذرات صفحه پایینی همراه با صفحه پایینی به سمت چپ حرکـت مـی کننـد بنابراین توزیع سرعت به فرم زیر است که سرعت در یک نقطه صفر خواهد بود .



برای یافتن τ باید توزیع سرعت را بیابیم .

معادله ناویر استوک در جهت x:

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) + \mu \nabla^2 u$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) = 0$$

هر دو دارای p, h یکسانی هستند

$$\Rightarrow \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} = c \Rightarrow u = Cy + C_1$$

با توجه به شرایط مرزی مقادیر C, C_1 را بدست می آوریم :

$$at \quad y = 0 \Rightarrow u = -1m/s, \; at \quad y = 0.015m \Rightarrow u = 2m/s$$

$$\Rightarrow u = 2m/s$$

$$\Rightarrow C_1 = -1 \;, C = \frac{3}{0.015}$$

$$\Rightarrow u = \frac{3}{0.015} y - 1 \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{3}{0.015}$$ y مستقل از

در صفحه بالایی $\tau = \mu \frac{du}{dy} = 0.05 \times \frac{3}{0.015} = 10 N/m^2$

باید توجه کرد که τ در تمام نقاط همان $10\, N/m^2$ است و هیچ جا صفر نمی شود .

جریان در لوله ها *Fluid in Pipes*

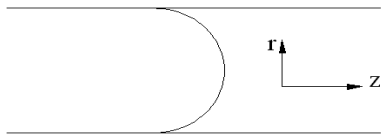
مقطع لوله ها را دایره ای شکل در نظر می گیریم و می خواهیم توزیع سرعت را در لوله پیدا کنیم . سرعت در دیـواره صـفر اسـت ولی احتمالا در مرکز لوله توزیع سرعت ماکزیمم است چون دورترین نقطه از دیواره است . در فصول قبلی سرعت متوسط در سطح مقطع لوله در نظر گرفته می شد ولی سرعت در نقاط مختلف لوله فرق می کند و می توان توزیع سرعت را در لوله یافت و با توجه به سطح مقطع لوله Q را بدست آورد. برای لوله هااز معادله ناویر استوک در مختصات استوانه ای استفاده می کنـیم کـه z در جهت حرکت و طول لوله است و در جهت θ, r سرعت نداریم .

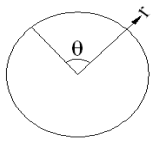
فرضیات:

۱)جریان پایدار

۲)تراکم پذیر

۳)تکامل یافته





معادله ناویر استوک در مختصات استوانه ای در جهت: z

$$z-component:$$

$$\rho(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z})=$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}(p+\gamma h)+\mu[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial V_z}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}]$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}=0(steady\ state)$$

چون در جهت r سرعت نداریم مگر اینکه لوله سوراخ باشد .

$$\begin{cases} V_r=0 \\ V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}=0 \end{cases}$$

چون جریان چرخشی نداریم

$$\begin{cases} V_\theta=0 \\ \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}=0 \end{cases}$$

چون سرعت در جهت z ثابت است

$$\begin{cases} \frac{\partial V_z}{\partial z}=0 \\ V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=0 \end{cases}$$

باید توجه کرد که $\frac{\partial V_z}{\partial r}$ صفر نیست چون در شعاعهای مختلف سرعت فرق می کند .

چون با تغییرات z سرعت فرق نمی کند ($\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}=0$)و چون در θ های مختلف سرعت فرق نمی کند ($\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}=0$) فـرق نمی کند .

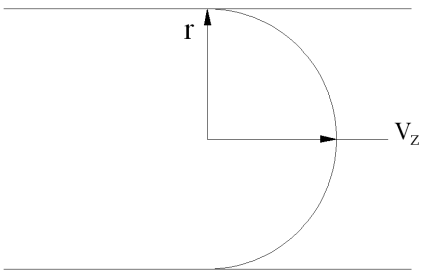
$$0 = -\frac{\partial}{\partial z}(p+\gamma h) + \mu.\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial V_Z}{\partial r}) \Rightarrow$$

$$\text{فقط تابع } z \quad \leftarrow \frac{\partial}{\partial z}(p+\gamma h) = \mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\gamma\frac{\partial V_z}{\partial r}) \rightarrow \qquad \text{فقط تابع } r \; V_Z$$

پس مشتق پاره ای به مشتق کامل تبدیل می شود .

$$\Rightarrow r\frac{d}{dz}(p+\gamma h) = \mu.\frac{d}{dr}(r\frac{dV_z}{dr})$$

نسبت به r انتگرال می گیریم.



$$\Rightarrow \frac{r^2}{2}\frac{d}{dz}(p+\gamma h) = \mu.r\frac{\partial V_z}{\partial r} + c$$

$$at \quad r = 0 \Rightarrow \quad V_z = V_{\max} \Rightarrow \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{2}\frac{d}{dz}(p+\gamma h) = \mu.r\frac{\partial V_z}{\partial r}$$

انتگرال می گیریم

$$\frac{r^2}{4}.\frac{d}{dz}(p+\gamma h)=\mu.V_z+c_2$$

$$at\ \ r=R\ \Rightarrow\ \ V_z=0$$

$$\Rightarrow\frac{R^2}{4}\frac{d}{dz}(p+\gamma h)=0+C_2\Rightarrow C_2=\frac{R^2}{4}\frac{d}{dz}(p+\gamma h)$$

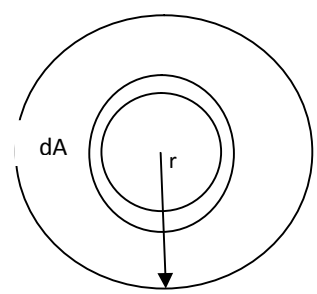
$$\frac{r^2}{4}\frac{d}{dz}(p+\gamma h)=\mu.V_z+\frac{R^2}{4}\frac{d}{dz}(p+\gamma h)$$

$$V_Z=-\frac{d}{dz}(p+\gamma h)\frac{R^2}{4\mu}[1-(\frac{r}{R})^2]$$

به معادله بالا معادله *Hagen Poiseuille Equation* گویند.

$$at\ \ r=0\quad \frac{dV_Z}{dr}=0\quad ,\quad V_{\max}\Rightarrow r=0$$

$$\Rightarrow V_{\max}=\frac{-R^2}{4\mu}\frac{d}{dz}(p+\gamma h)$$

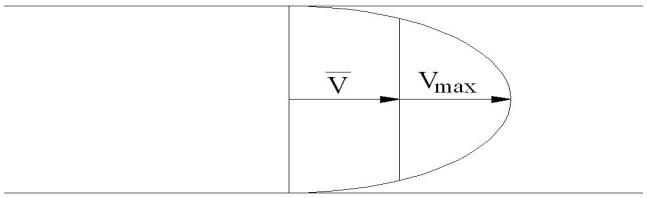


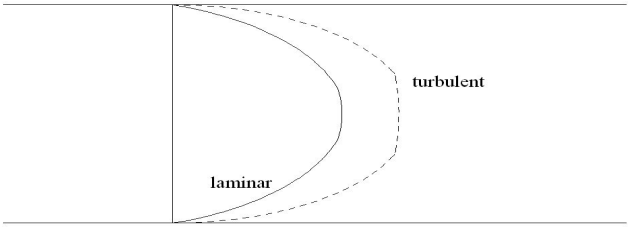
$$\overline{V}=\frac{1}{A}\int VdA\quad ,\ dA=2\pi rdr\quad ,\ A=\pi R^2$$

$$\overline{V}=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R-\frac{d}{dz}(p+\gamma h)\frac{R^2}{4\mu}[1-(\frac{r^2}{R^2})]2\pi rdr$$

سرعت متوسط در جریان لامینار $\Rightarrow\overline{V}=-\frac{R^2}{8\mu}\frac{d}{dz}(p+\gamma h)\Rightarrow\overline{V}=\frac{V_{\max}}{2}$

$$Q=\overline{V}\pi r^2=-\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{d}{dz}(p+\gamma h)$$

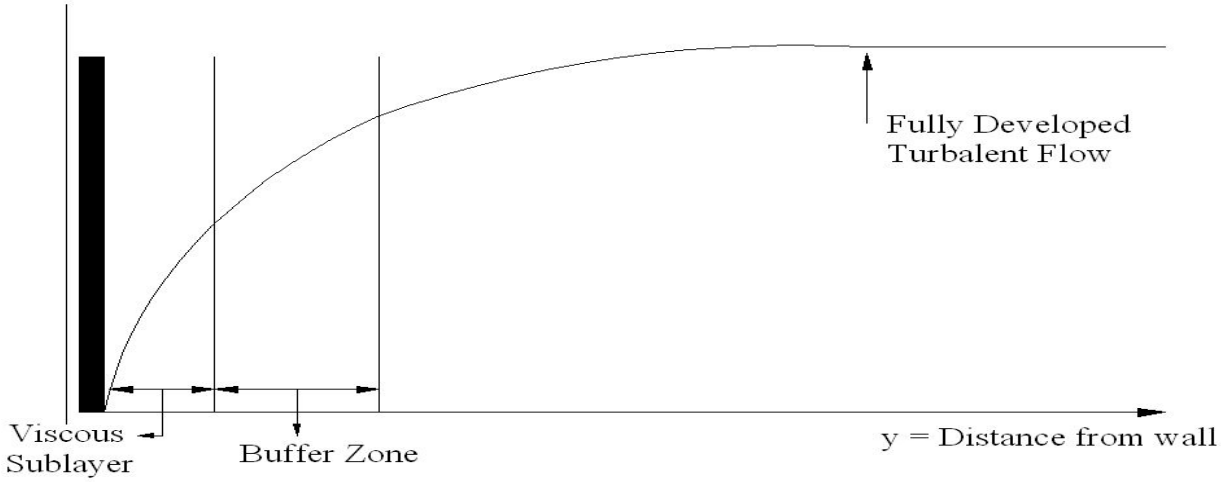




تمرین۴-۱: پروفایل سرعت در جریان توربالنت در لوله

$$u = u_{\max}(1-\frac{r}{R})^{1/7} \qquad 10^4 < N_{\mathrm{Re}} < 10^5$$

$$\frac{\overline{u}}{u_{\max}} = \frac{4}{5}$$



$$time\ averaged\ velocity\ \overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u dt$$

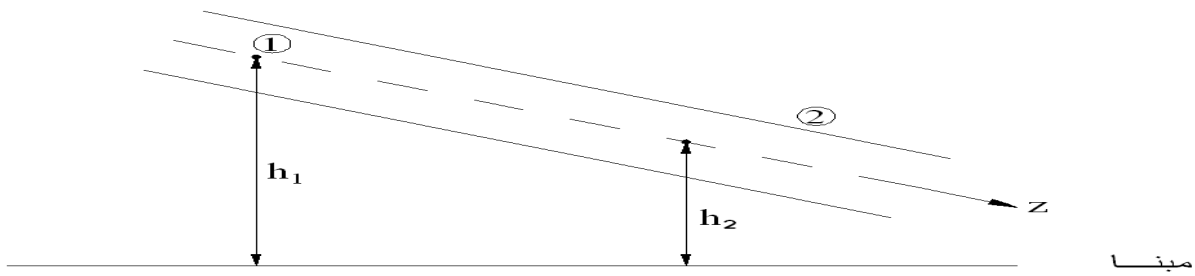
$$u = \overline{u} + u'$$

$$Viscous\ Sublayer : \tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$Buffer - Zone$: هم اثرات جریان آرام و هم اثرات جریان توربالنت مهم هستند

$FullyDevelopedTurbalentFlow$: اثرات ویسکوزیته کاملاً قابل صرف نظر هستند

افت انرژی در جریان آرام:



$$\frac{d}{dz}(p + \gamma h) = ?$$

$$\frac{d}{dz}(p + \gamma h) = \frac{(p + \gamma h)_2 - (p + \gamma h)_1}{\Delta z}$$

صورت و مخرج را بر γ تقسیم می کنیم .

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}(p + \gamma h) = \gamma \frac{(\frac{p}{\gamma} + h)_2 - (\frac{p}{\gamma} + h)_1}{\Delta z}$$

چون $v_1 = v_2$ است پس $\frac{{v_2}^2}{2g} = \frac{{v_1}^2}{2g}$ پس یک $\frac{{v_2}^2}{2g}$ اضافه و یکی کم می کنیم و داریم :

$$\frac{d}{dz}(p+\gamma h)=\gamma\frac{[\frac{p_2}{\gamma}+h_2+\frac{v_2^{\ 2}}{2g}-(\frac{p_1}{\gamma}+h_1+\frac{v_1^{\ 2}}{2g})]}{\Delta z}$$
$$=\gamma\frac{E_2-E_1}{\Delta z}$$

$\Delta z=l\ 1,2$ فاصله دو نطقه

$$\frac{d}{dz}(p+\gamma h)=\gamma\frac{E_2-E_1}{L}=\gamma\frac{-(E_1-E_2)}{L}=-\gamma\frac{h_f}{L}$$

$\vec{V}$ از رابطه $\Rightarrow -\frac{d}{dz}(p+\gamma h)=\frac{8\overline{V}\mu}{R^2}$

$$\overline{V}=\gamma\frac{h_f}{L},\frac{R^2}{8\mu}\ or\ h_f=\frac{8\mu L\overline{V}}{\gamma R^2}$$

یعنی در جریان لامینار با داشتن μ و $R,L,\overline{V},$ می توان h_f را محاسبه نمود.

افت انرژی در جریان توربالنت :

در جریان توربالنت نمی توان افت فشار را به صورت تحلیلی محاسبه کرد. برای این منظور از داده های آزمایشی و تئوری تحلیل ابعادی استفاده می شود.

در جریان توربالنت :

$$\Delta P=\Delta P(D,L,\varepsilon,V,\mu,\rho)\qquad \frac{\Delta P}{\rho V^2}=\emptyset\left(Re,\frac{L}{D},\frac{\varepsilon}{D}\right)\quad ,\Delta P=\gamma h_f$$

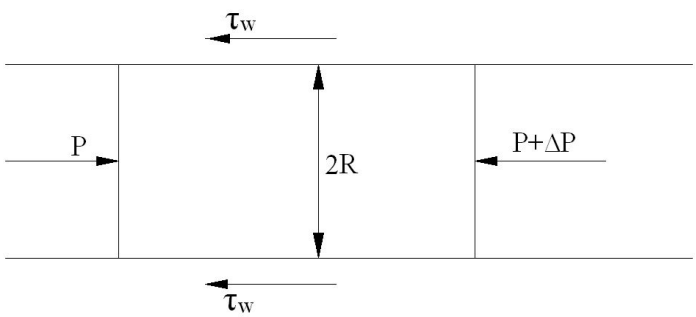
$\Rightarrow\ \frac{gh_f}{V^2}=\frac{L}{D}\emptyset_1\left(Re,\frac{\varepsilon}{D}\right)$ آزمایش نشان می دهد که $\Rightarrow\frac{\rho g h_f}{\rho V^2}=\emptyset\left(Re,\frac{L}{D},\frac{\varepsilon}{D}\right)\qquad Re=\frac{\rho VD}{\mu}\quad ,$

$$\frac{gh_f}{\frac{1}{2}V^2}=\frac{L}{D}\emptyset_2\left(Re,\frac{\varepsilon}{D}\right)\quad ,f=\emptyset_2\left(Re,\frac{\varepsilon}{D}\right)$$

$$\frac{gh_f}{\frac{1}{2}V^2}=\frac{L}{D}f\quad\Rightarrow\ h_f=f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho \overline{V}^2}{2}} = \frac{2\tau_w}{\rho \overline{V}^2} \; Fanning\ Friction\ Factor$$

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho \overline{V}^2}{8}} = \frac{8\tau_w}{\rho \overline{V}^2} \; Darcy\ Friction\ Factor$$



برای جریان پایدار:

$$\sum F = \dot{M}_b - \dot{M}_a$$

$$\sum F_X = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \rho \overline{V} dV + \int_{c.s} \rho \vec{V}\vec{V}.d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = \rho V_1(-V_1 A_1) + \rho V_2 (V_2 A_2) \\ V_1 = V_2 , A_1 = A_2 \end{cases} \Rightarrow \sum F_X = 0$$

$$\sum F_X = \pi R^2 P - \pi R^2 (P + \Delta P) - 2\pi R \Delta L \tau_W = 0$$

$$\Rightarrow \tau_w = \frac{\Delta P}{\Delta L}\frac{R}{2}$$ هم برای جریان آرام و هم برای جریان توربالنت

$$\begin{cases} \Delta P = \gamma h_f = f\frac{\Delta L}{D}\rho\frac{V^2}{2} \\ \Delta P = \frac{2\tau_w \Delta L}{R} \end{cases} \Rightarrow f\frac{\Delta L}{D}\rho\frac{V^2}{2} = \frac{2\tau_w \Delta L}{D/2}$$

هم برای جریان آرام و هم برای توربالنت $f.\frac{\rho V^2}{2} = 4\tau_w \Rightarrow \frac{f}{4} = \frac{\tau_w}{\frac{\rho V^2}{2}}$

$f' = \frac{\tau_w}{\frac{\rho V^2}{2}}$ $Fanning.\ friction.\ factor$. $f' = \frac{f}{4}$. $f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho V^2}{8}}$ $Darcy\ friction\ factor$

از طرفی برای اتلاف انرژی در جریان درهم درون لوله صاف داریم :

معادله دارسی ویسباخ $h_f = g\left(\frac{\rho DV}{\mu}, \frac{V^2}{gD}\right) \Rightarrow h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$

f ضریب اصطکاک نامیده می شود . $N_{\mathrm{Re}} = \frac{\rho DV}{\mu}$. f یک ضرب بدون بعد است.

$$h_f = \frac{8\mu L\bar{V}}{8R^2}$$

برای جریان لامینار $\Rightarrow h_f = \frac{8\mu \times 2g}{\gamma\bar{V} \times \frac{R}{2}} . \frac{L}{2R} . \frac{V^2}{2g}$

$$= \frac{32g\mu}{\rho g\bar{V}R} \times \frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2g} = \frac{64\mu}{\rho\bar{V}D} . \frac{L}{D} . \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$\Rightarrow h_f = \frac{64}{\frac{\rho\vec{V}D}{\mu}} . \frac{L}{D} . \frac{\bar{V}^2}{2g} = \frac{64}{N_{\mathrm{Re}}} . \frac{L}{D} . \frac{V^2}{2g}$$

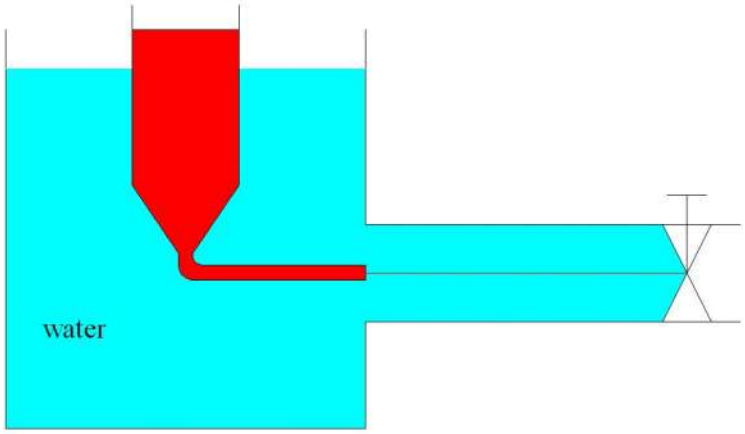
ازمقایسه این رابطه با معادله دارسی - ویسباخ در می یابیم که $f = \frac{64}{N_{\mathrm{Re}}}$ برای جریان لامینار است .

رابطه $h_f = f\frac{L}{D}.\frac{\overline{V}^2}{2g}$ برای کلیه جریانها است ولی برای جریان لامینار f برابر $\frac{64}{N_{\mathrm{Re}}}$ است که در جریان توربالنت تابع قطر لوله و زبری لوله است .

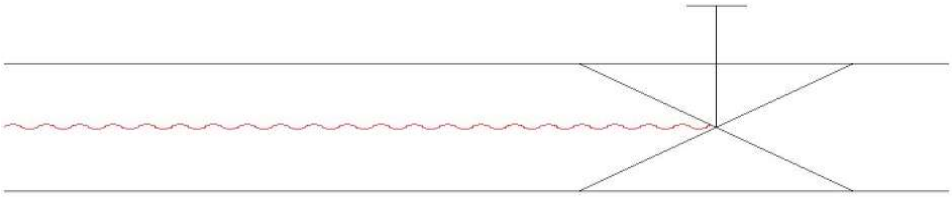
جریان لامینار و جریان توربالنت

مفهوم جریان لایه ای در ارتباط با قانون ویسکوزیته نیوتن در فصل ۱ معرفی شد .جریان لایه ای عبارت است از یک نقش کاملاً منظم که به سبب آن فرض می شود لایه های سیال روی هم می لغزند .

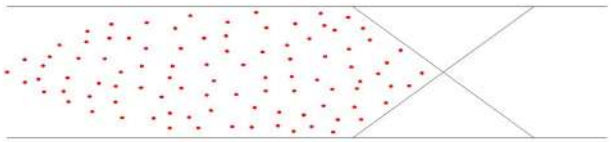
آزمایش رینولدز :



آب در لوله شیشه ای به جریان انداخته می شود. سرعت توسط شیر خروجی کنترل می شود .در ورودی لوله ،ماده ای رنگی که دارای وزن مخصوص برابر با آب است در جریان تزریق می شود .وقتی شیر خروجی خیلی کم باز می شود، رنگ بدون هیچ تغییری در لوله ی شیشه ای حرکت خواهد کرد و رنگ به صورت یک نخ ،که در شکل نشان داده شده درمی آید. هر چقدر که شیر بیشتر باز می شود ، حالتی فرا خواهد رسید که در آن، رنگ همانطور که در لوله پیش می رود حرکتی افت و خیزی پیدا می کند مانند شکل زیر :

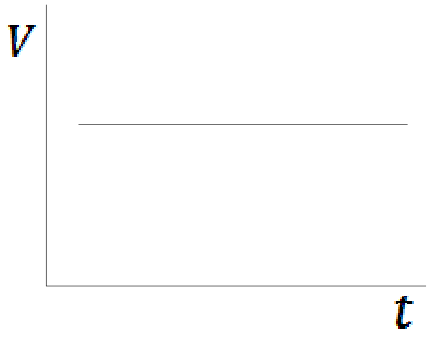


که در این جا می گوییم حالت گذار از جریان لایه ای به نوعی جریان ناپایدار داریم. سپس بیشتر باز کردن شیر،حالتی را به وجـود می آورد که در آن افت و خیزهای نامنطمی در جریان پدید می آید . به طوری که نخ رنگـی قبـل از پیشـروی در فاصـله زیـاد در امتداد لوله به طور کامل از بین می رود این جریان منظم را جریان توربالنت گویند.



جریـان متلاطـم

توزیع سرعت بر حسب زمان چنین است :



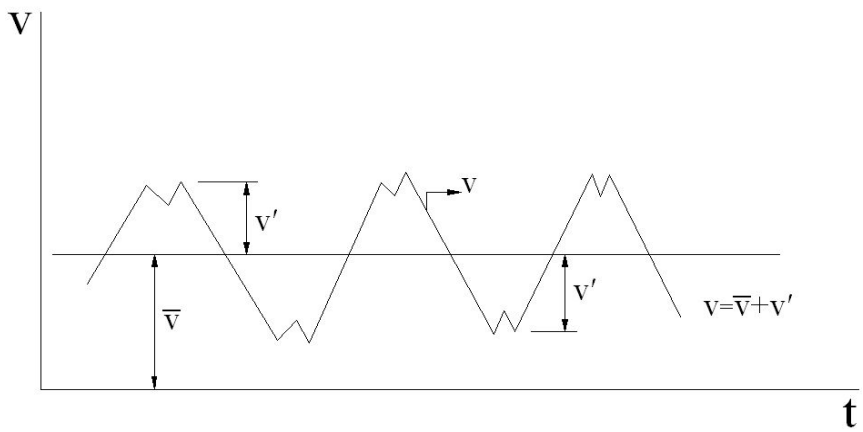
رینولدزبا انجام این آزمایش دریافت که معیار گذار از جریان لامینار به جریان توربالنت در لوله ،عدد رینولدز است که بـه فـرم زیـر تعریف می شود.

$$N_{\mathrm{Re}} = \frac{\rho V D}{\mu}$$

V = سرعت لحظه اي

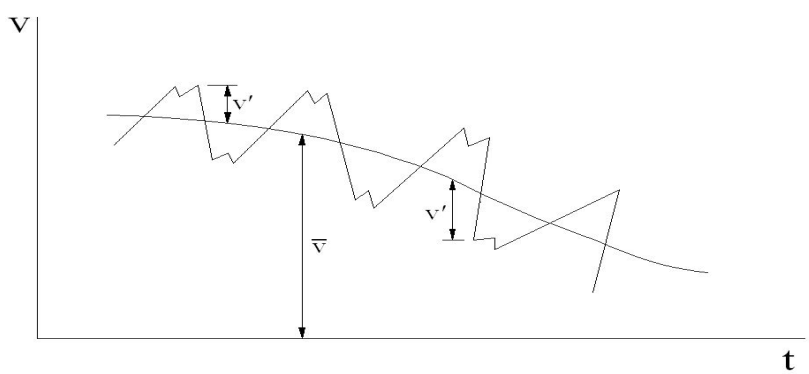
V' = سرعت نوساني

$\bar{V}$ = سرعت متوسط زماني



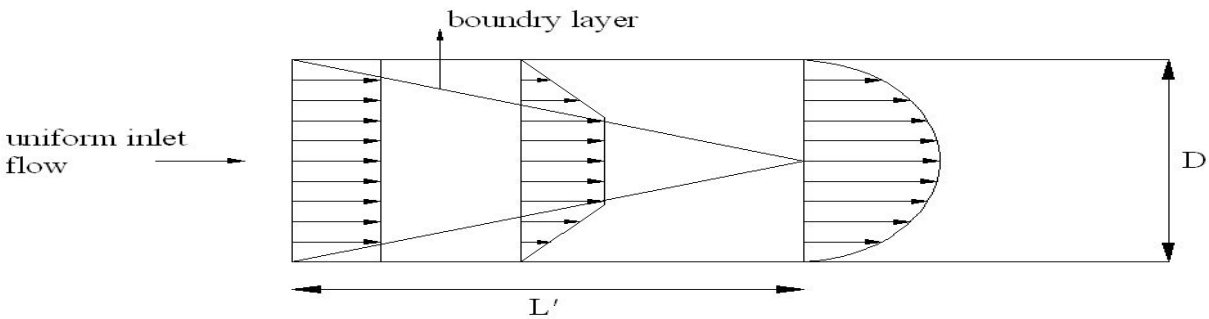
$$\bar{V} = \frac{1}{T}\int_0^T v(x,y,z,t)\,dt$$

معلوم شده که عدد رینولدزی برابر با تقریباً ۲۳۰۰، آغاز حالت گذار از جریان لایه ای به جریان توربالنت است.



اثرات ورودی:

تنش برشی در دیوار سرعت سیال نزدیک دیواره را کاهش می دهد و با توجه به معادله پیوستگی سرعت در مرکز لوله افزایش پیدا می کند .



$$L' = Transition\ Lengh$$

$$\frac{L'}{D} = 0.058.R_e \qquad \text{for laminar } flow, R_e \le 2300$$

نکته:

در جریان توربالنت L' کمتر از مقدار رابطه بالا است .

$$10 \le \frac{L'}{D} \le 60, For\ Turbulent\ Flow$$

$$\boxed{L' = 60D}$$

نکته : با رسیدن به جریان تکامل یافته $f\ df$ اثرات ویسکوزیته روی کل سطح مقطع لوله اثر می گذارد و پروفیل سرعت با افزایش طول لوله تغییر نمی کند.

اتلاف در جریان توربالنت ***Head loss***

$$h_f = f\frac{L}{D}.\frac{V^2}{2g} \quad Darcy\ Weisbach\ \ Equation$$

$$f = Friction\ \ Coefficient$$

آزمایش نشان می دهد که برای جریان توربالنت در لوله :

۱)افت انرژی با طول به طور مستقیم در رابطه است و تقریباً با مربع سرعت، متناسب است .

۲)افت انرژی به طور معکوس با قطر متناسب است .(هر چه قطر بیشتر شود سرعت کمتر شده و افت بیشتر می شود)

۳)افت انرژی به زبری سطحی دیواره های داخلی لوله بستگی دارد .

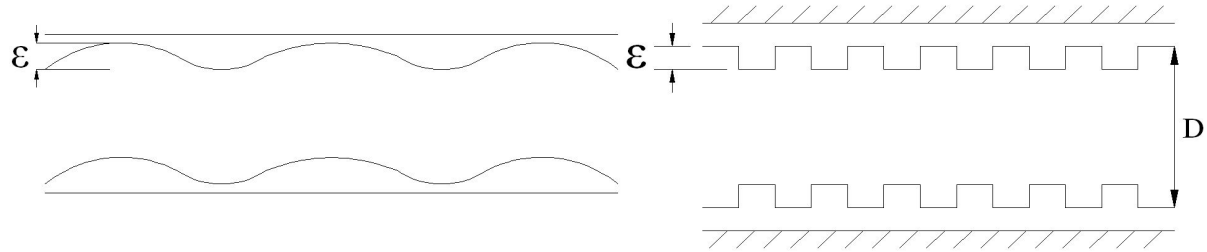
۴)افت انرژی انرژی به μ و ρ و ε سیال بستگی دارد و افت انرژی مستقل از فشارمی باشد. .

$$f=f(\rho, \mu, \varepsilon, \varepsilon', D, V, m)$$

در جریان لامینار:	$f = \frac{64}{N_{\mathrm{Re}}}$

در جریان توربالنت:	$F = F(\rho, \mu, \mathrm{V}, \varepsilon, D, \varepsilon', m)$

تعریف ضریب زبری مطلق لوله (ε): اندازه متوسط ناهمواری های سطح لوله بر حسب یک واحد دلخواه می باشد.



$\frac{\varepsilon}{D} = \text{Re}\,lative\ \ \text{Ro}ughness$ زبری نسبی

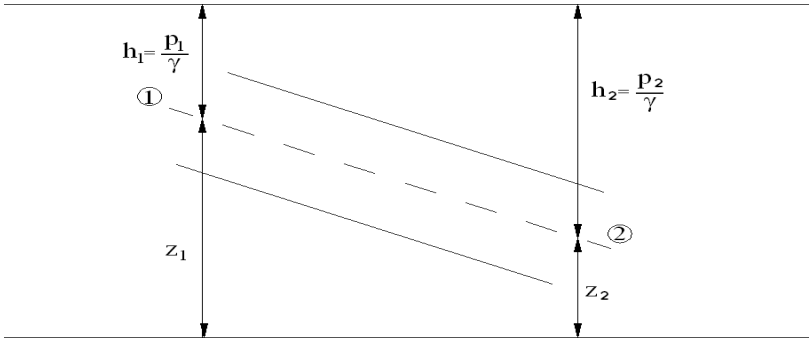
دو ضریب ε', m زیاد موثر نیستند پس داریم :

$$f = f\left(N_{\text{Re}}, \frac{\varepsilon}{D}\right)\ \ in\ \ turbulent\ flow$$

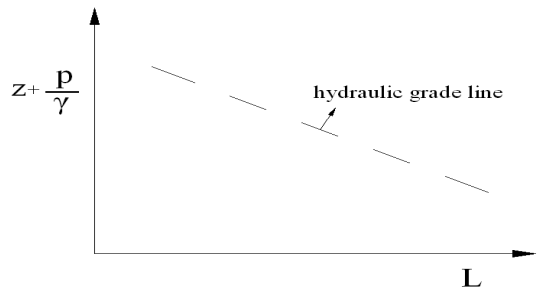
یکی از روابطی که f را به ε / D و N_{Re} ربط می دهد برای لوله های تجارتی رابطه زیراست .

$$Colebrook\ Formula\ \frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86\ln\left(\frac{\varepsilon / D}{3.7} + \frac{2.51}{N_{Re}\sqrt{f}}\right)$$

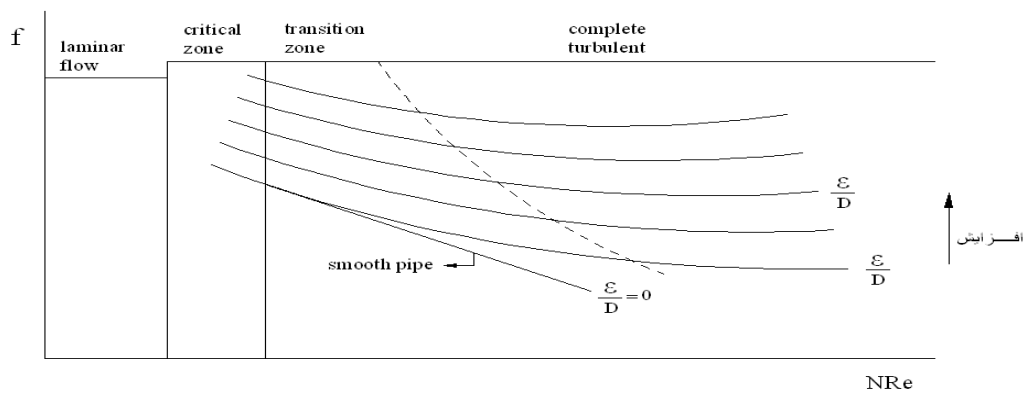
یکی از مناسب ترین نمودارها برای تعیین f نمودار مودی $(Moody\ Diagram)$ برای لوله های تجارتی است که f را به ε / D و N_{Re} ربط می دهد.



$$Z + \frac{P}{\gamma} = elevation\ \ of\ a\ po\text{int}\ \ on\ the\ \ hydraulic\ \ grade\ line$$



اتلافات باعث می شوند که خط هیدرولیک در طول لوله کاهش پیدا کند.



$$f = \frac{1.325}{\left[\ln\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{\mathrm{Re}^{0.9}}\right)\right]^2} \qquad 10^{-6} \le \varepsilon / D \le 10^{-2}$$

$$5000 \le \mathrm{Re} \le 10^8$$

این منحنی $Log - Log$ است و از چهار قسمت تشکیل شده است .

1) منطقه لامینار Laminar zone

$$f = \frac{64}{N_{\mathrm{Re}}} \Rightarrow Logf = Log64 - LogN_{\mathrm{Re}}$$

بنابراین بر روی منحنی لگاریتمی f بر N_{Re} شیب -1 دارد

2) منطقه بحرانی *Citical Zone* (N_{Re} بین 2000 تا 4000)

3) منطقه انتقالی Transition *Zone*

4) منطقه کاملاً متلاطم *Complete Turbulent*

در منطقه انتقالی منحنی های ε / D با کاهش عدد رینولدز برای ε /D≤۰.۰۰۱ :منحنی هایِ ε/ D به سوی منحنی لوله های صاف میل می کنند در اعداد رینولدز کم ضخامت لایه لامینار زیاد است در نتیجه این لایه کاملاً برآمدگی زبری ها و ناصافی های کوچک را می پوشاند و لوله ضریب اصطکاکی مشابه لوله های صاف پیدا می کند ولی برای اعداد رینولدز بالا برآمدگیها از قشر لایه لامینار سر بیرون آورده و سبب اغتشاش می شود .

چرا در جریان لامینار f تابع زبری نیست؟

چون در جریان لامینار ضخامت لایه لامینار زبری ها را می پوشاند سپس در جریان لامینار f فقط تابعی از N_{Re} است و ربطی به ε / D ندارد .

در عددهای رینولدز خیلی بالا $\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 Ln\left(\frac{\varepsilon / D}{3.7}\right)$ است و f تابع N_{Re} نیست که ضخامت لایه لامینار در مقایسه با ارتفاع زبری ها ناچیز بوده هر برآمدگی کاملا در آشفته ساختن جریان سهیم می گردد . در این ناحیه ویسکوزیته بر روی افت انرژی تاثیری ندارد ،لذا این حقیقت آشکار می سازد که ضریب اصطکاک با عدد رینولدز تغییر نمی کند.

$$h_f = \frac{64}{N_{\mathrm{Re}}} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = \frac{64}{\frac{\rho V D}{\mu}} \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

در جریان لامینار اگر سرعت را دو برابر کنیم h_f نیز دو برابر می شود ولی در جریان توربالنت داریم :

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

در این حالت f فقط تابع ε / D است وتابع N_{Re} نیست پس h_f با V^2 متناسب است پس اگر سرعت دو برابر شود h_f, چهار برابر خواهد شد .

سپس با استفاده از منحنی مودی با داشتن $f, N_{\mathrm{Re}}, \varepsilon / D$ را بدست می آوریم و با استفاده آن h_f را محاسبه می کنیم .

آیا h_f در یک لوله سیمانی بیشتر است یا یک لوله $p.V.C$ ؟

در صورتیکه N_{Re} در هر دو ثابت باشد و جریان لامینار باشد و سرعت و L, D یکی باشد h_f در هر دو یکی است چون h_f فقط تابع N_{Re} است. (در جریان لامینار) ؛ اما اگر توربالنت باشد، در لوله سیمانی چون زبری آن بیشتر است، h_f نیز بیشتر می شود.

مسائل لوله های ساده *Simple pipe problems*

در این لوله ها اتلاف انرژی فقط به صورت اصطکاک است .

در این گونه مسائل مجموعاً شش متغیر $\upsilon, \varepsilon, h_f, D, L, Q$ (ویسکوزیته سینماتیکی) داریم که با در نظر گرفتن سیال غیرقابل تراکم چهارحالت را برای بدست آوردن مجهولات داریم.

مجهول	معلوم
$(head-loss\ \ problem)\ h_f$	$1)\ \varepsilon,\upsilon,D,L,Q(or\ v)$
$(flow-rate\ \ problem)\ Q(or\ v)$	$2)\ \varepsilon,D,L,h_f,\upsilon$
$(Sizing\ \ \ problem)\ \ D$	$3)\ \varepsilon,\upsilon,L,Q,h_f$
$(length\ problem)$ L	$4)\ Q,D,h_f,v,g$

مثال۴-۳-:(حالت اول) h_f را در لوله زیر بیابید :

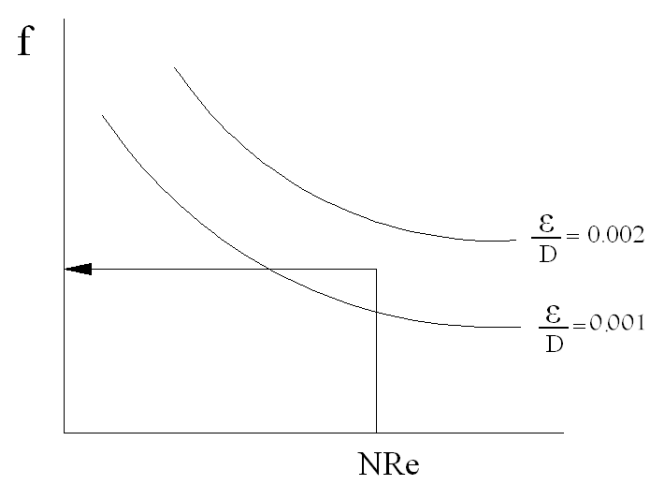
جریان روغن $Q=140L/s$, $\upsilon=0.00001m^2/s$

$L=400m, D=200mm,$ جنس لوله چدن $cast\ \ Iron$

$$N_{Re}=\frac{VD}{\upsilon}, A=\pi D^2/4=\pi(0.2)^2/4=0.0314$$

$$From\ \ Moody\ \ diagram\frac{cast}{Iron}\Rightarrow\varepsilon=0.25mm,\qquad \frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.25}{200}=0.00125$$

$$N_{Re}=\frac{(\frac{0.140}{0.0314})\times 0.2}{0.00001}=89127\qquad ,\qquad V=\frac{Q}{A}=4.456m/s$$



$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{\varepsilon}{D}\\ N_{\mathrm{Re}}\end{matrix}\right\} Moody\ diagram \Rightarrow f = 0.023$$

$$\Rightarrow h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0.023\times\frac{400}{0.2}\times\frac{(4.456)^2}{2\times 9.806} = 46.58\frac{m.N}{N}$$

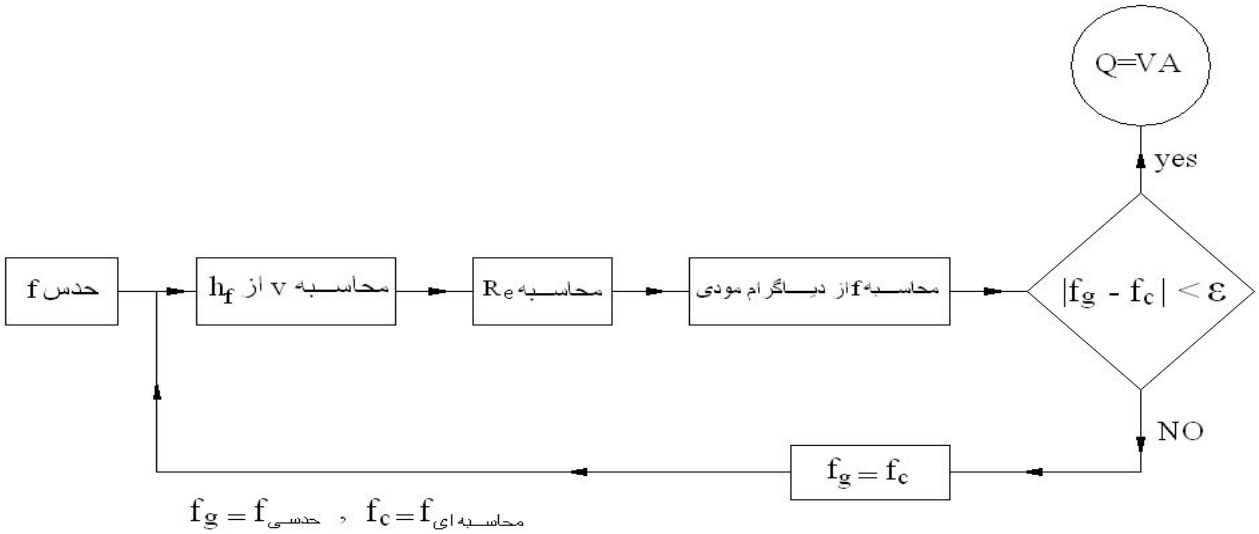
Moody diagram formula	$f = \dfrac{1.325}{\left[\ln\left(\dfrac{\varepsilon}{3.7D}+\dfrac{5.74}{\mathrm{Re}^{0.9}}\right)\right]^2}$

مثال ۴-۴-:(حالت دوم) آب با دمـای 15^0C درون لولـه ای از جـنس فـولاد پـرچ شـده ،بـه قطـر $300mm$ جریـان دارد ، $\varepsilon = 3\mathrm{mm}$ و $h_f = 6m$ و $\mathrm{L} = 300\mathrm{m}$ می باشد دبی را تعیین کنید .

$Q = ؟$

$$h_f = f.\frac{L}{D}.\frac{V^2}{2g}$$
$$f = f\left(\varepsilon / D, N_{\mathrm{Re}}\right)$$

چون ν را نداریم پس N_{Re} را نیز نداریم پس f قابل محاسبه نیست باید trial & error کرد.



$$From\ \ The\ Complete\ Turbalent\ Zone \Rightarrow \mathrm{f} = 0.04 \text{ حدس}$$

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \Rightarrow 6 = 0.04 \times \frac{3}{0.2} \times \frac{V^2}{2 \times 9.806}$$

$$\Rightarrow V = 1.715 m/s, APP.C \Rightarrow \upsilon = 1.13 \times 10^{-6} m^2/s$$

$$N_{\mathrm{Re}} = \frac{VD}{\upsilon} = \frac{1.715 \times 0.3}{1.13 \times 10^{-6}} = 455000$$

$$moody\ diagram \Rightarrow f = 0.038$$

$$h_f = f.\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \Rightarrow 6 = 0.038 \times \frac{300}{0.3} \times \frac{V^2}{2 \times 9.806} \Rightarrow V = 1.76 m/s$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{\mathrm{Re}} = \dfrac{1.76 \times 0.3}{1.13 \times 10^{-6}} = 467256 \Rightarrow f = 0.038 \\ \varepsilon / D = 0.01 \end{cases}$$

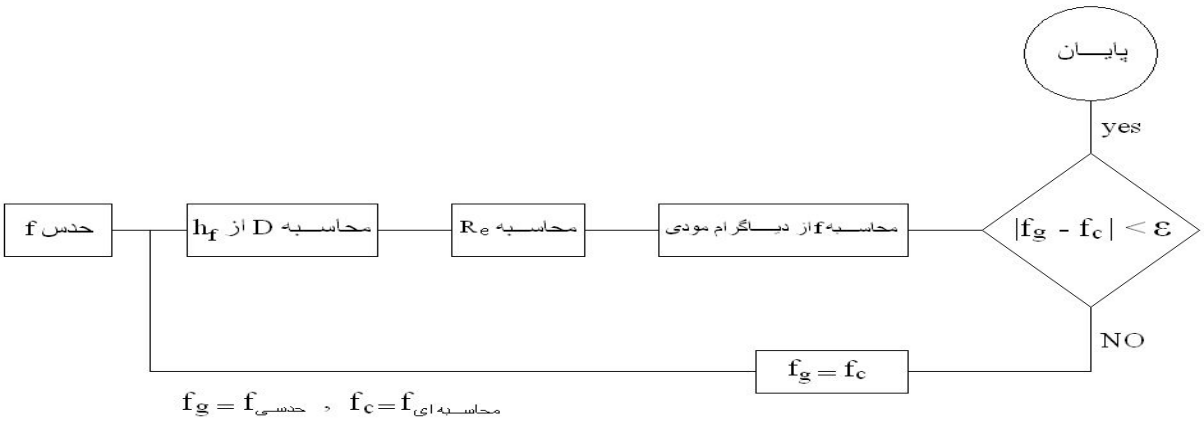
که دیگر نیاز به تکرار نیست .

$$Q = A.V = \frac{\pi D^2}{4}.V = \frac{\pi}{4}(0.3)^2 \times 1.76 = 0.1244 m^3/s$$

پس در نوع دوم حدس و خطا می خواهد .

مثال۴-۵-: (مساله نوع سوم) برای جا به جایی $400gpm$ روغن بـا $\upsilon = 0.0001ft^2/s$ ،در طـول $1000ft$ همـراه بـا $75\frac{ftlb_f}{lb_f}$ افت انرژی از لوله ای به جنس $Clean\ wrought-Iron$ (آهن چکش خوار)استفاده مـی کنیم؛قطـر لولـه را تعیین کنید.

$$h_f = f.\frac{L}{D}.\frac{V^2}{2g} \qquad , \qquad f = f\left(\varepsilon/D, N_{\mathrm{Re}}\right)$$



باید f را حدس زد تجربه نشان می دهد که $f = 0.02$ (وسط دیاگرام مودی) بهترین حدس اولیه است .

$$4000gal/\min \times \frac{0.1337ft^3}{gal} \times \frac{1\min}{60\sec} = 8.913\frac{ft^3}{\sec}$$

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}, Q = VA, A = \pi D^2/4$$

$$\Rightarrow D^5 = \frac{8LQ^2}{h_f g\pi^2}f = \frac{8\times 10000\times(8.913)^2}{75\times 32.2\times\pi^2}f = 266.64f$$

حدس $\mathrm{f} = 0.02 \Rightarrow \mathrm{D} = 1.398\mathrm{ft}$

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.00015}{1.398}=0.00011, R_e=\frac{\rho VD}{\mu}=\frac{VD}{\upsilon}=\frac{4Q}{\pi\upsilon D}=\frac{4\times 8.913}{\pi\times 0.0001\times 1.398}$$

$$\Rightarrow R_e=81175.85 moody\ diagram \Rightarrow f=0.019$$

جدید $f=0.019 \Rightarrow D=1.383\,ft$

$$\varepsilon/D=\frac{0.00015}{1.383}=0.00011, R_e=\frac{4\times 8.913}{\pi\times 0.0001\times 1.383}$$
$$\Rightarrow R_e=82056.28 \quad \Rightarrow \qquad moody\ diagram \Rightarrow f=0.019$$
$$\Rightarrow D=1.383\,ft$$

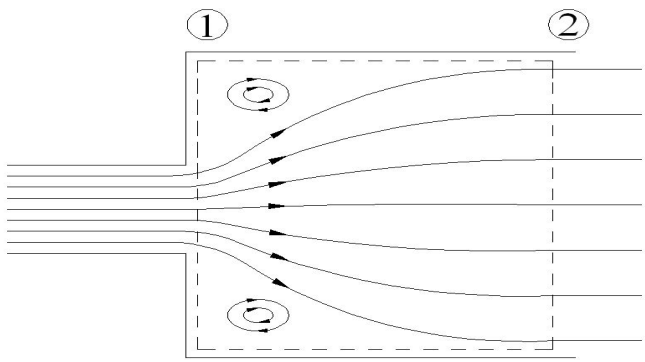
قطراسمی و قطر داخلی لوله شماره40

قطر اسمی (in)	قطر داخلی واقعی(ft)
1/8	0.249
1/4	0.349
3/8	0.493
1/2	0.622
3/4	0.0824
1	1.049
1.5	1.61
2	2.067
3	3.068

افت های جزئی *Minor Losses*

این افتها به علت انحناءها $(Bend)$ و زانوها $(Elbow)$ و اتصالات (Joints) و یا شیرها $(Valves)$ و ... به وجود می آیند.

افت در اثر انبساط ناگهانی *Expansion*



$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \qquad \text{پیوستگی} \quad \Rightarrow V_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = V_2 \frac{\pi D_2^2}{4}$$

$$E_1 - h_e = E_2 \qquad \text{برنولی} \quad \Rightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + Z_1 - h_e = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = h_e + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

نیروی وارد از طرف سیال $\sum F_X = \frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v.} \rho \vec{V} dV + \int_{c.s.} \rho V \vec{V}.d\vec{A}$

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 + P_1(A_2 - A_1) = P_1 A_1 - P_2 A_2 + P_1 A_2 - P_1 A_1 = P_1 A_2 - P_2 A_2$$

$$P_1 A_2 - P_2 A_2 = \rho V_1(-V_1 A_1) + \rho V_2 (V_2 A_2) = -\rho V_1^2 A_1 + \rho V_2^2 A_2$$

طرفین را بر γA_2 تقسیم می کنیم

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{V_2^2}{g}\frac{A_2}{A_2} - \frac{V_1^2}{g}\frac{A_1}{A_2} \qquad (1)$$

$$V_1 = V_2\frac{A_2}{A_1} \text{ و } (1) \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{V_2^2}{g}\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)$$

$$h_e = \frac{V_2^2}{g}\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) - \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}\left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2$$

$$h_e = \frac{V_2^2}{g}\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) - \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{g} - \frac{V_1 V_2}{g} - \frac{V_2^2}{2g} + \frac{V_1^2}{2g}$$

و حال با توجه به رابطه برنولی داریم :

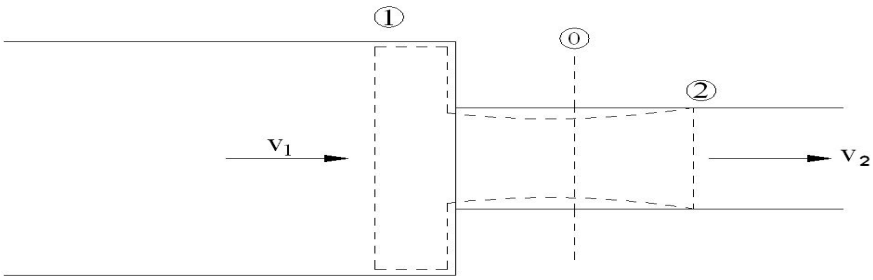
$$h_e = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2 \times \frac{V_1^2}{2g} = K\frac{V_1^2}{2g}$$

$$If \;\; D_2 \to \infty \Rightarrow \frac{D_1}{D_2} = 0 \Rightarrow h_e = \frac{V_1^2}{2g}$$

که در رابطه بالا: $K = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2$

افت ناشی از انقباض ناگهانی

همانند انبساط ناگهانی از یک لوله به یک منبع،بدست می آید.



افت بین 1 و 0 در مقایسه با 0 تا 2 قابل صرف نظر است .

$$h_c = \frac{(V_0 - V_2)^2}{2g} \Rightarrow h_c = \left(\frac{1}{c_c} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$h_c = \frac{(V_0 - V_2)^2}{2g}$$

معادله پیوستگی $V_0 C_C A_2 = V_2 A_2$

$C_C(Contraction\ \ Coefficient)$

$$C_C = \frac{\text{Area of jet at section 0}}{\text{A}_2}$$

$$\Rightarrow h_c = \left(\frac{1}{c_c} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g}$$

ضریب تنگ شدن $C_c = \frac{A_0}{A_2}\ Contraction\, coefficient$

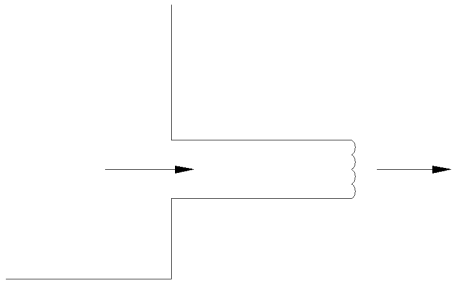
مقادیر C_c برای آب ، در جدولی به فرم زیرتهیه شده است:

$\frac{A_2}{A_1}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
C_c	0.624	0.632	0.643	0.659	0.681	0.712	0.755	0.818	0.892	1.0

$$If\ \frac{A_2}{A_1} = 0.5 \Rightarrow C_C = 0.681$$

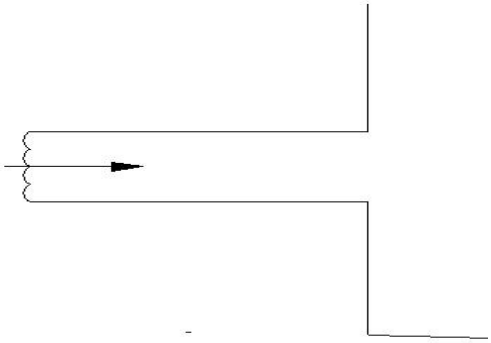
$$h_C = (\frac{1}{0.681} - 1)^2 \frac{V_2^2}{2g} = 0.219 \frac{V_2^2}{2g}$$

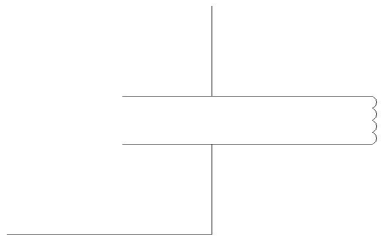
$h_e = 0.5 \frac{V^2}{2g}$ برای ورود سیال از تانک به لوله(شکل زیر) وقتی که سوراخ ورودی به شکل لبه تیز باشد.



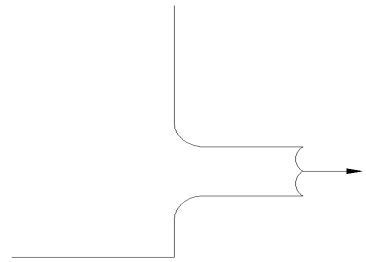
$h_e = \frac{V^2}{2g}$ برای ورودی لوله به تانک(شکل زیر)

لبه تیز $k = 1$





سوراخ های بیرون زده $0.8\frac{V^2}{2g}-1\frac{V^2}{2g}$



گرد $(Rounded)$: $0.01\frac{V^2}{2g}-0.05\frac{V^2}{2g}$

ضرائب اتلاف انرژی K برای اتصالات شیرها ، سه راهی و زانوئی ها مختلف در جدول زیر آمده است .

جدول ضریب افت هد k برای اتصالات مختلف

اتصال	k
شیر کروی (کاملاباز)	۱۰
شیر زاویه ای (کاملا باز)	۵
شیر یک طرفه (کاملا باز)	۲/۵
شیر دروازه ای (کاملا باز)	۰ /۱۹
خم با بازگشت تند	۲/۲
سه راه استاندارد	۱/۸
زانوی استاندارد	۰/۹
زانو با خمیدگی متوسط	۰/۷۵
زانو با خمیدگی طویل	۰/۶

افت های جزئی را می توان به صورت طول معادل L_e از لوله ای نشان داد که دبی گذرنده از آن همان تلفات انرژی را بدهد .

$\sum k\frac{V^2}{2g} = f\frac{L_e}{D}\frac{V^2}{2g}$ مربوط به یک افت انرژی یا مجموعه ای از چند افت انرژی می باشد

کل اتلافات بادر نظر گرفتن طول معادل $= f\frac{L+L_e}{D}\frac{V^2}{2g}$

$$\Rightarrow L_e = \frac{\left(\sum k\right)D}{f}$$

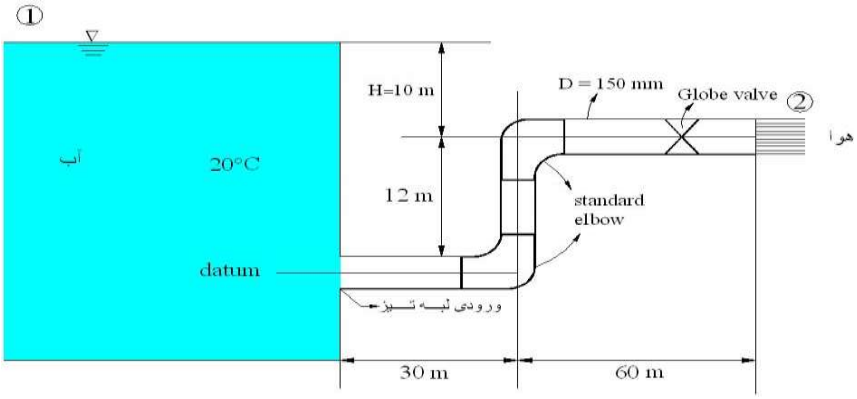
تلفات جزئی $k = 20$

برای لوله $f = 0.02$

$$\Rightarrow L_e = \frac{20\times\frac{12}{12}}{0.02} = 1000\,ft$$

$$Actual\ Lenght\ \ of\ Line = L + L_e$$

مثال۴-۶-: برای $H = 10m$ الف)دبی گذرنده از خط لوله شکل زیررا تعیین کنید ب)بـرای Q=60 lit/sec افـت انـرژی را بیابید.



$$from\ Appendix \Rightarrow \upsilon = 1.01\times10^{-6}\,m^2/s$$

برنولی بین نقطه 1,2

$$E_1 - \begin{pmatrix} \text{minor} \\ head\ \ losses \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} major \\ head\ \ losses \end{pmatrix} = E_2$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 - Losses = \frac{p_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

افت ورودی ازتانک به لوله $0.5\frac{V_2^2}{2g}$ افت در لوله از رابطه دارسی $f\frac{L}{D}.\frac{V_2^2}{2g}$

افت در شیر کروی $10\frac{V_2^2}{2g}$ افت دو زانویی استاندارد $2\times 0.9\frac{V_2^2}{2g}$

$$0+0+H+12-f\frac{L}{D}.\frac{V_2^2}{2g} \quad -0.5\frac{V_2^2}{2g}-2\times 0.9\frac{V_2^2}{2g}-10\frac{V_2^2}{2g}=12+0+\frac{V_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow H=(13.3+680f)\frac{V_2^2}{2g}$$

$$H=10 \Rightarrow 10=(13.3+680f)\frac{V_2^2}{2g} \qquad (1)$$

که این مساله از نوع دوم مسائل افت در لوله هاست .

$$\frac{\varepsilon}{D}=0.0017$$

حدس $f=0.022,(1)\Rightarrow V_2=2.63m/s$

$$R_e=\frac{\rho V_2 D_2}{\mu}=\frac{V_2 D_2}{\upsilon}=\frac{2.63\times 0.15}{1.01\times 10^{-6}}=391000$$

$$\begin{cases} \varepsilon/D=0.0017 \\ R_e=391000 \end{cases} \quad Moody\ diagram \Rightarrow f=0.023$$

حدس جدید $f = 0.023 \Rightarrow (1) \Rightarrow v_2 = 2.6 m/s$

$$\begin{cases} R_e = 386000 \\ \varepsilon / D = 0.0017 \end{cases} \quad Moody\ diagram \Rightarrow f = 0.023 \Rightarrow V_2 = 2.6$$

$$Q = V_2 A_2 = V_2 \pi D_2^2 / 4 = 45.9 \times 10^{-3}\ {}^{m^3}\!/_{s} = 45.9 L/s$$

حل با استفاده از طول معادل:

$$k = 13.3 \quad L_e = \frac{13.3(0.15)}{0.022} = 90.7m$$

$$10m = f \frac{L + L_e}{D} \frac{V_2^{\ 2}}{2g} = f \frac{192.7}{0.15} . \frac{V_2^2}{2g}$$

$$if\ \ f = 0.022 \Rightarrow V_2 = 2.63$$

$$R_e = 39000 \Rightarrow f = 0.023 \Rightarrow V_2 = 2.8$$

$$\Rightarrow Q = 45.64$$

قسمت دوم : Q معلوم

$$\Rightarrow V_2 = \frac{Q}{A} = \frac{60 \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{4}(0.15)^2} = 3.4 m/s$$

$$\left.\begin{cases} R_e = \dfrac{V_2 D_2}{\upsilon} = 505000 \\ \dfrac{\varepsilon}{D} = 0.0017 \end{cases}\right\} Moody\ diagram \Rightarrow f = 0.023$$

$$H = (\sum k + f \frac{L}{D}) \frac{V^2}{2g}$$

$$\Rightarrow H = (13.3 + 680 \times 0.023)\frac{(3.4)^2}{2 \times 9.806} = 17.06m$$

Equivalent Diameter or Hydraulic Diameter (قطر معادل یا قطر هیدرولیک)

$$D_H = \frac{4A}{P}$$

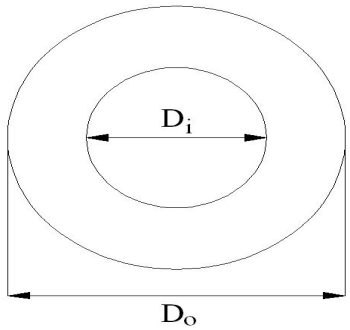
$$\mathrm{A} = \mathrm{Cross-sectional\ area\ of\ channel}$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{Perimeter\ of\ channel\ in\ contact\ with\ fluid}$$

Circular Tube :

$$D_H = 4\frac{\pi D^2/4}{\pi D} = D$$

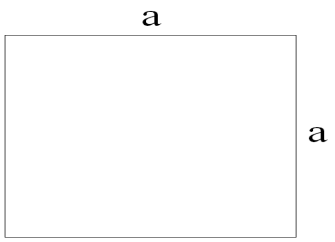
: *Annulus* :



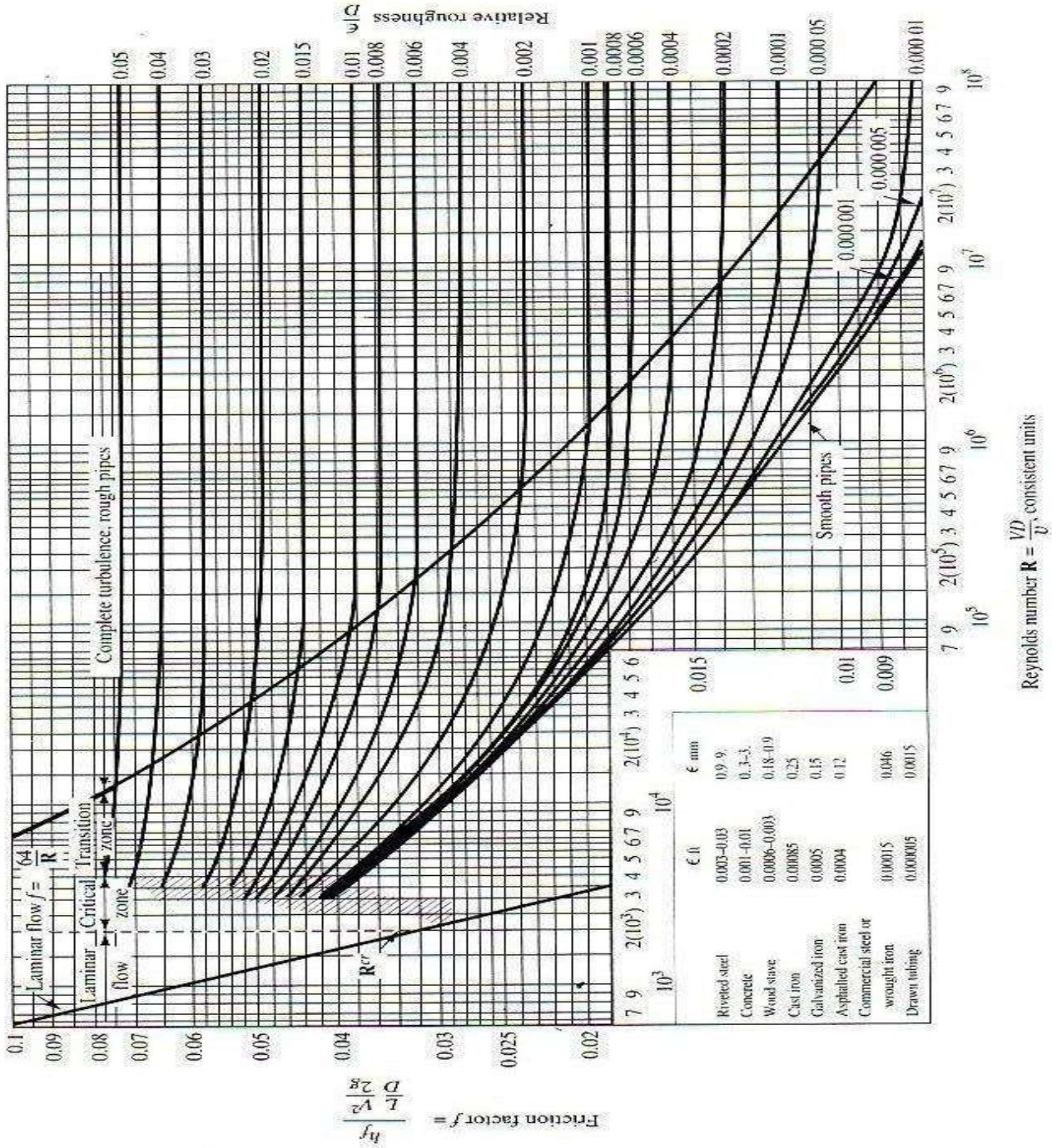
$D_i = inside\ diameter$

$D_0 = outside\ diameter$

$$D_H = 4\frac{\pi D_0^2/4 - \pi D_i^2/4}{\pi Di + \pi D_0} = D_0 - D_i$$



$$D_H = 4\frac{a^2}{2a+2a} = 4\frac{a^2}{4a} \Rightarrow D_H = a$$



Moody diagram.

مسائل

۴-۱- روابط زیر بین مختصات دکارتی و قطبی برقرار می باشد.

$$x^2+y^2=r^2 \quad , \quad \frac{y}{x}=\tan\theta \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$u=v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta \qquad v=v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta$$

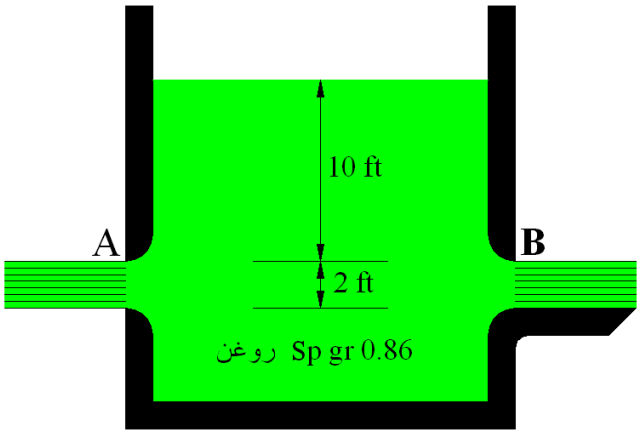
با استفاده از این روابط شکل معادله پیوستگی را برای مختصات قطبی به دست آورید. آیا سرعت داده شده در معادله به دست آمده صدق می کند؟

۴-۲- تابع دلخواه $\varphi(x,y)$ داده شده است به طوریکه :

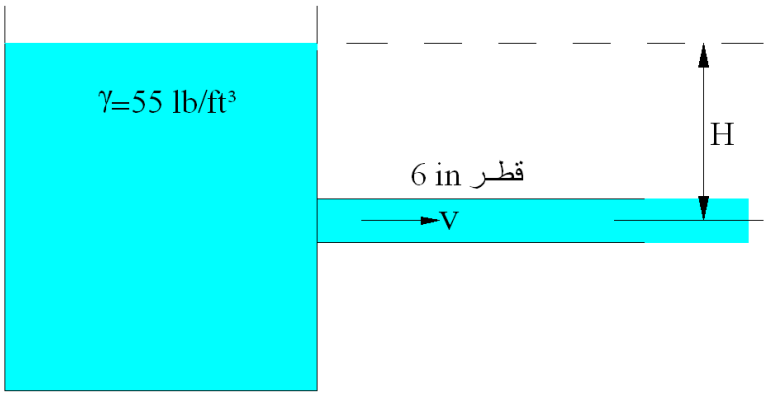
$$v(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad \text{و} \qquad u(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

نشان دهید برای یک جریان تراکم ناپذیر تابع پتانسیل در معادله لاپلاس $\Delta^2\varphi = 0$ صادق است.

۴-۳- در شکل زیر روغن در A از یک شیار دوبعدی تخلیه می شود و در B از زیر یک دریچه عبور کرده، روی یک بستر تخلیه می شود. از تمام تلفات صرفنظر کنید. دبی عبوری از A و B را به ازای واحد عرض به دست آورید. علت اختلاف این دو مقدار چیست؟

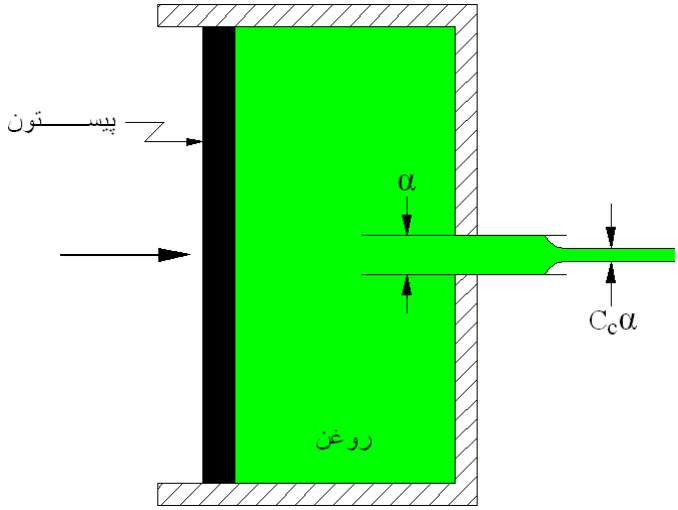


۴-۴- در شکل زیر به ازای H=۲۵ ft تلفات برابر $۳v^۲/۲g$ ft.lb/lb است. دبی را به دست آورید.



۴-۵- در شکل مسألهٔ قبل برای دبی ۷۵۰ gpm ، H را حساب کنید. تلفات $۱۰v^۲/۲g$ ft.lb/lb است.

۴-۶- پیستونی با سطح مقطع A روغن با دانسیته ρ را از طریق لوله کوچکی با سطح مقطع α به اتمسفر تخلیه می کند. سطح مقطع جت روغن $C_c\alpha$ است. نشان دهید ضریب C_c به صورت $C_C=۱/(۲-\alpha/A)$ داده می شود.

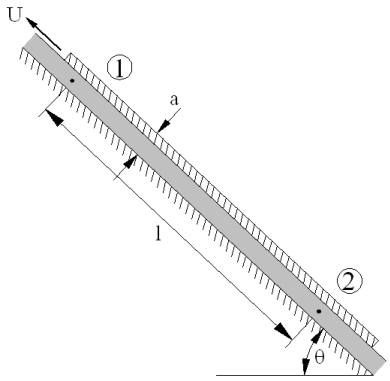


۴-۷- در شکل زیر داریم :

p_1 =۶ psi , p_2 =۸ psi , l =۴ ft , a =۰.۰۰۶ ft

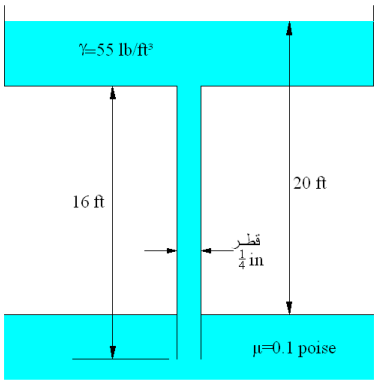
θ =۳۰° , U =۴ ft/s , γ =۵۰ lb/ft^3 , μ =۰.۸ P

تنش برشی روی صفحهٔ بالایی را به دست آورید. جهت تنش را تعیین کنید.



۴-۸- در شکل مسألهٔ قبل به ازای θ =۹۰° برای آنکه دبی جریان صفر شود، سرعت U باید چقدر باشد؟ سایر اطلاعات به شرح زیر است: s =۰.۸۷ , a =۳ mm , $p_1=p_2$, μ =۰.۲ kg/m.s

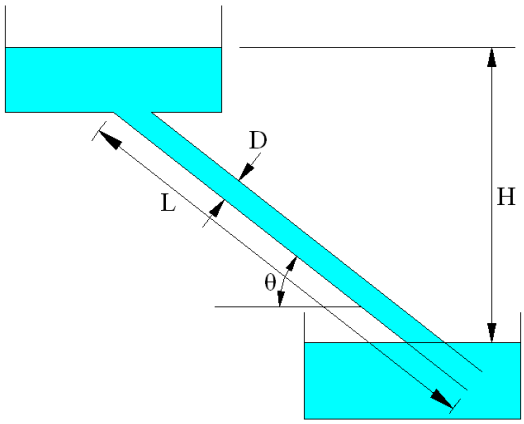
۴-۹- برای شکل زیر دبی جریان را حساب کنید. از تمام تلفات غیر از تلفات داخل لوله صرفنظر کنید.



۴-۱۰- در شکل زیر داریم:

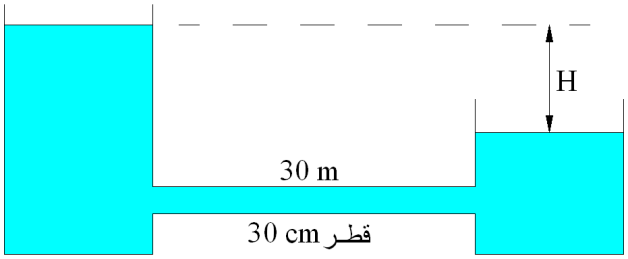
H=۲۴m , L=۴۰ m , θ =۳۰°,D =۸ mm , γ =۱۰ kN/m^3 , μ =۰.۰۸ Kg/m.s

افت ارتفاع بر واحد طول لوله را به دست آورید. دبی را برحسب لیتر در دقیقه حساب کنید.



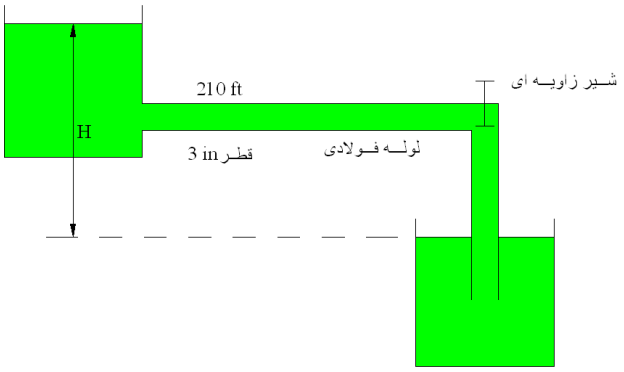
۴-۱۱- در مسألهٔ قبل اگر سرعت جریان در لوله ۰.۱ m/s باشد، H چقدر است؟

۴-۱۲- در شکل زیر مقدار H برای انتقال آب ۱۵˚C با دبی ۱۲۵ L/s به دست آورید. لوله از نوع فولاد تجارتی است. تلفات موضعی را نیز در نظر بگیرید.



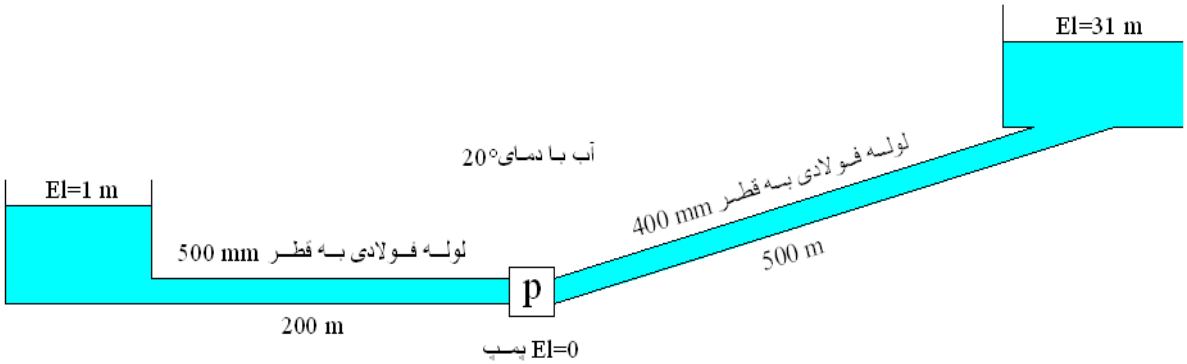
۴-۱۳- در مسألهٔ ۶-۳ اگر یک شیر کشویی در خط لوله قرار داده شود، دبی چقدر خواهد شد؟ لوله صاف است و لبهٔ ورودی آن گرد می باشد. μ=۱ c.p از دیاگرام مودی استفاده کنید.

۴-۱۴- در شکل زیر ۲۰۰ gpm روغن با لزجت ۰.۱ p و وزن مخصوص ۶۰ lb/ft³ جریان دارد. شیر زاویه ای کاملاً باز است. H را تعیین کنید.



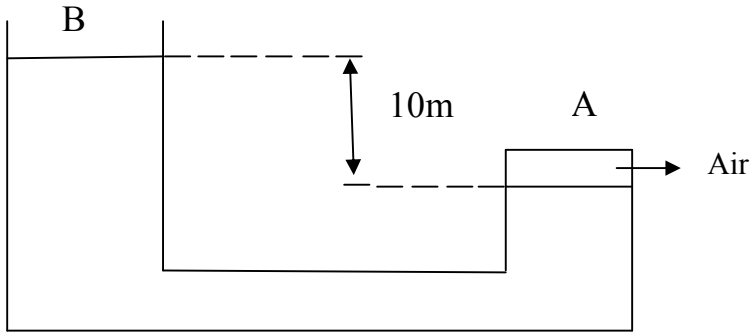
۴-۱۵- در شکل مسألهٔ قبل سیال، آب ۲۵°c می باشد و H =۸ m است. دبی جریان را تعیین کنید.

۴-۱۶- در شکل زیر منحنی مشخصه پمپ با رابطهٔ $H = ۴۰ - ۲۴Q^2$ بیان می شود. در این رابطه H بر حسب متر تلفات موضعی را در طول لوله ها منظور کرده ایم. اگر راندمان سیستم پمپاژ ۷۲ درصد باشد، توان لازم چقدر است؟ برای عدم وقوع کاویتاسیون حداقل فشار در دهانه مکش پمپ باید ۵۰ kPa abs باشد. حداکثر دبی ممکن چقدر است؟ توان لازم برای انتقال این دبی چقدر است؟

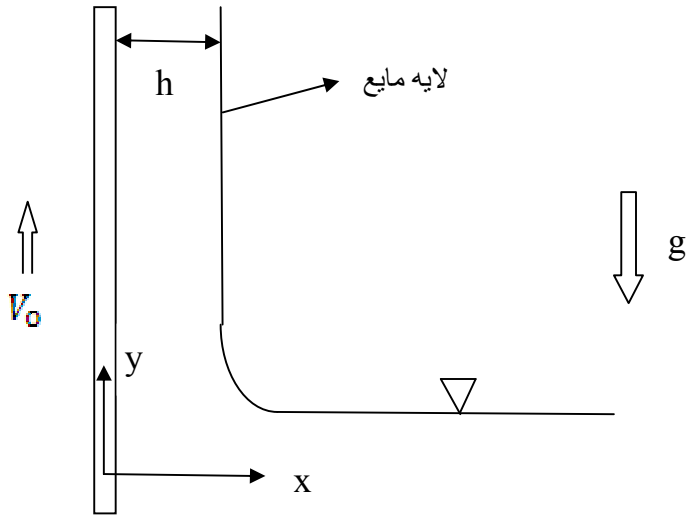


۴-۱۷- دبی لوله صاف افقی نشان داده شده در شکل زیر را تعیین کنید.

مایع دارای s=0.63 و $\upsilon = 6 \times 10^{-6}\ m^2/s$ است. فشار هوای بالای مخزن بسته A معادل ۱۶۲.۸ kPa است ومخزن B به اتمسفر راه دارد.

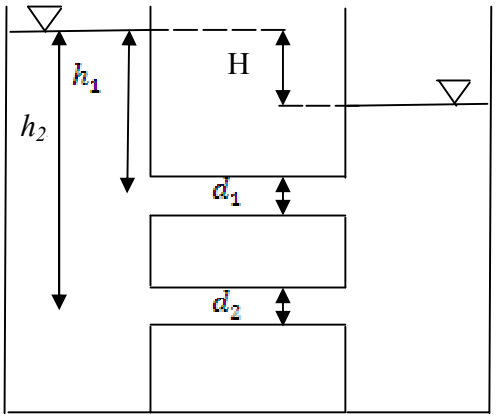


۴-۱۸- یک تسمه متحرک پهن از میان ظرف حاوی مایع لزج عبور می کند. تسمه در امتداد عمود و با سرعت ثابت V_0 به طرف بالا حرکت می کند. به علت نیروهای ناشی از لزجت تسمه لایه نازکی از مایع به ضخامت h را با خود همراه می کند. نیروی جاذبه تمایل دارد که مایع را از تسمه به طرف پایین بکشد. با استفاده از معادلات ناویه-استوکس عبارتی برای تعیین سرعت متوسط لایه نازک مایع که با تسمه به طرف بالا کشیده می شود به دست آورید.جریان را آرام دائمی غیر قابل تراکم و یکنواخت فرض کنید.



۴-۱۹- در شکل زیر اگر ضرایب اصطکاک در دو لوله بالا و پایین که مخازن را به هم ارتباط داده اند به ترتیب f_1 و f_2 باشند نسبت دبی های عبوری از دو مسیر را بدست آورید؟

از افت های موضعی صرف نظر شود.

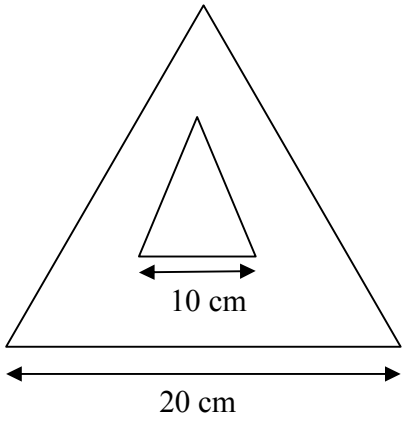


۴-۲۰- نمودار سرعت جریان آرام در لوله دایره ای شکل از رابطه زیر به دست می آید:

$$U(r) = (R^2 - r^2/4\mu)[\frac{\Delta P}{L}]$$

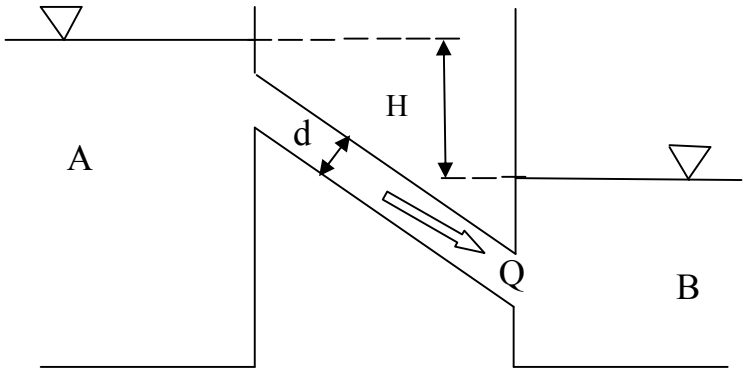
که در آن R شعاع لوله، r فاصله هر نقطه از مرکز لوله، μ لزجت دینامیکی، ΔP افت فشار و L طول لوله است.مقدار سرعت متوسط چقدر است؟

۴-۲۱- آب با سرعت ۲ m/s از فضای بین دو مثلث متساوی الاضلاع مطابق شکل عبور می کند. عدد رینولدز جریان چقدر است؟ (دانسیته آب $\rho = 1000\ Kg/m^3$ و ویسکوزیته آن ۱cp است) اضلاع مثلث کوچک و بزرگ بترتیب ۱۰ و ۲۰ سانتیمتر است.



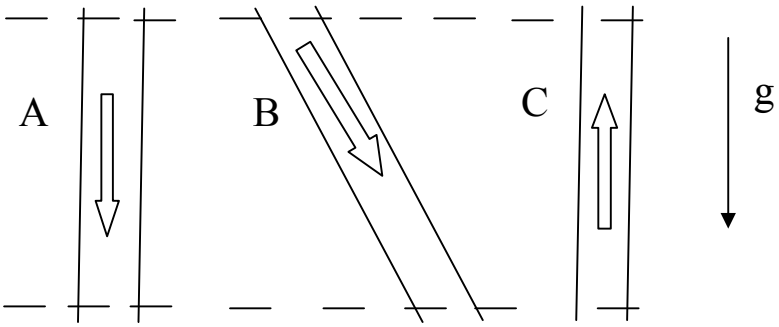
۴-۲۲- دو مخزن بی نهایت بزرگ مطابق شکل توسط لوله ای به قطر d به یک د یگر متصل شده اند و دبی Q در این لوله جریان دارد. اگر به جای این لوله از لوله دیگری به قطر $\frac{d}{2}$ استفاده شود،تلفات اصطکاکی در این لوله نسبت به حالت قبل چه تغییری می کند؟

(از تلفات موضعی در ورود وخروج صرف نظر کنید)

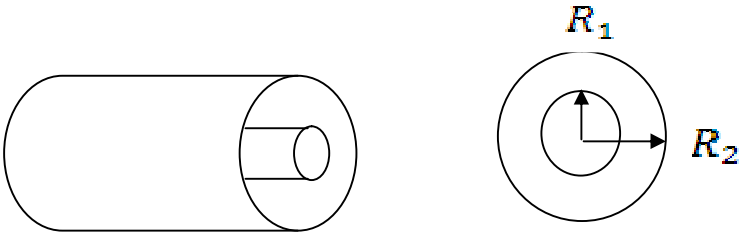


۴-۲۳- در سه لوله با قطر یکسان،دبی جریان یکسان است.اگر جریان در هر سه آرام و تکامل یافته باشد،برای افت فشار در ناحیه ای که با خط چین مشخص شده است اثبات کنید که:

$$\Delta P_C > \Delta P_B > \Delta P_A$$

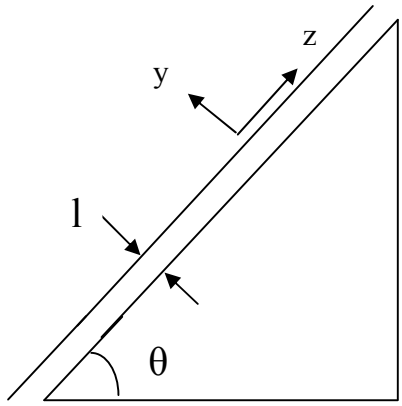


۴-۲۴- با استفاده از معادلات ناویه-استوکس پروفیل سرعت و افت ارتفاع را برای جریان بین دو لوله هم محور را بدست آورید. نتایج را بر حسب خواص سیال،شعاع لوله هاو L طول بین دو مقطع بیان کنید.

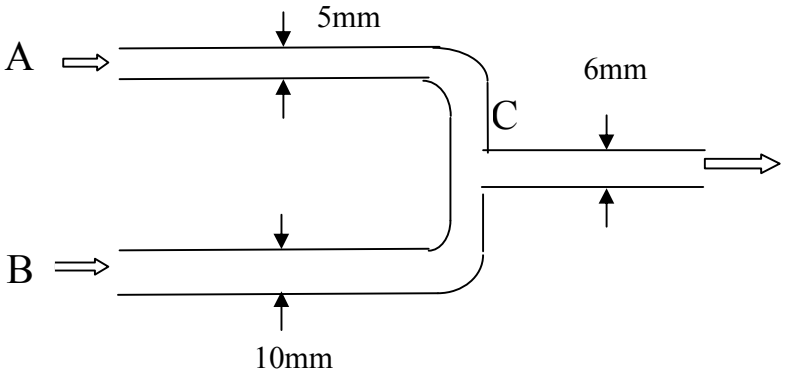


۴-۲۵- جریانی آرام بین دو صفحه موازی را در نظر بگیرید. در این حالت صفحه فوقانی با سرعت V_0 به سمت راست حرکت می کند. روابط پروفیل سرعت و افت ارتفاع را بدست آورید.
محور x را منطبق بر صفحه تحتانی گرفته و فاصله فوقانی از آن را h بگیرید.

۴-۲۶- از معادلات ناویه استوکس استفاده کرده و ضخامت فیلم سیالی که با سرعت و ضخامت ثابت روی یک دیواره شیبدار حرکت می کند را بر حسب دبی بر واحد عرض q به دست آورید.



۴-۲۷- آب از طریق لوله های مویین A و B به لوله C جریان می یابد. اگر دبی جریان در لوله برابر 2×10^{-3} L/s باشد،حداکثر دبی ممکن در B چقدر می تواند باشد تا جریان در لوله آرام بماند؟
دمای آب ۴۰ درجه سلسیوس است. بر اساس مقداری که برای q_B بدست می آورید چه نوع جریانی در لوله های A و B وجود دارد؟

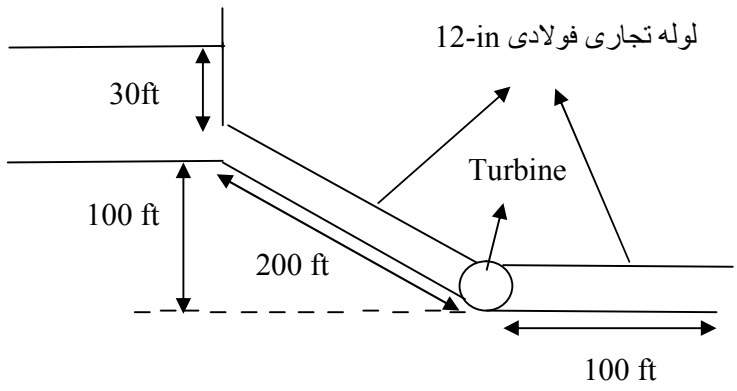


۴-۲۸- آب با دمای ۴۰ درجه سلسیوس از مخزن A به مخزن B جریان می یابد. دبی حجمی چقدر است؟ از افت های ورودی به لوله مویین و نیز افت های خروجی صرف نظر شود
ب)قطر داخلی لوله چقدر باشد تا
دبی جریان 6×10^{-4} L/s شود؟

۴-۲۹- دبی جریان از مخزن به لوله چقدر است؟ آب یک توربین آبی را که hp ۱۰۰ توان تولید می کند می گرداند. فرض کنید:

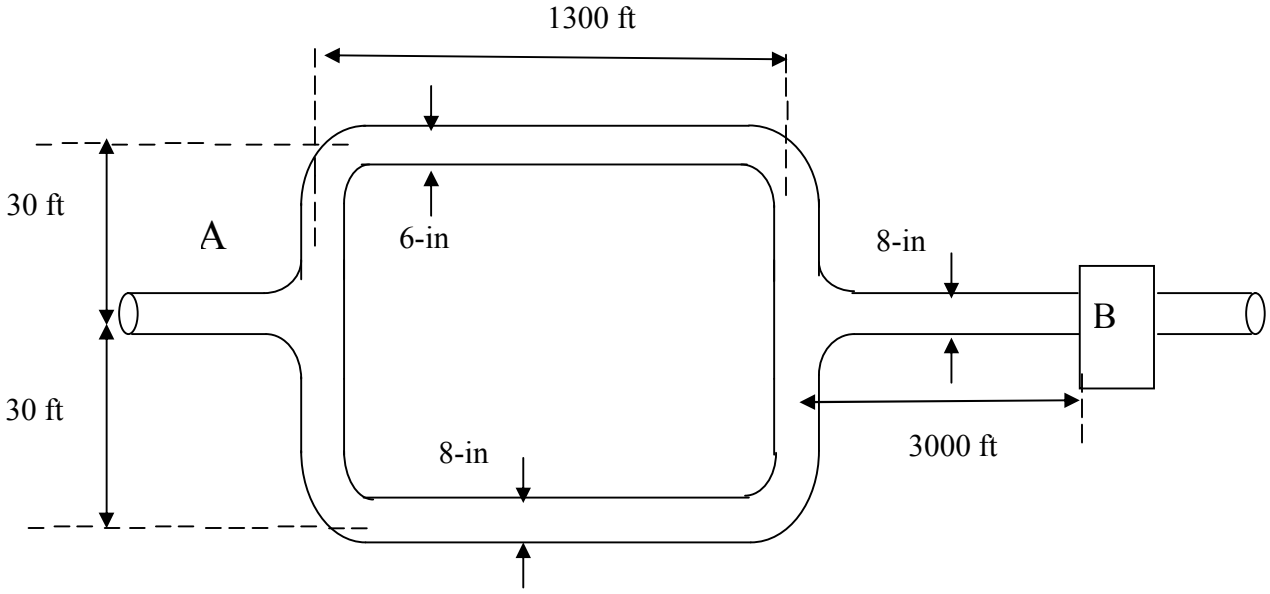
$\mu=2.11\times10^{-5}$

واحدμ: $lb.s/ft^2$



ب)قطر لوله فولادی تجاری را در حالتی تعیین کنید که ft^3/s ۵۰ آب را منتقل کرده و قدرتhp ۱۰۰ را نیز به توربین اعمال نمایید.

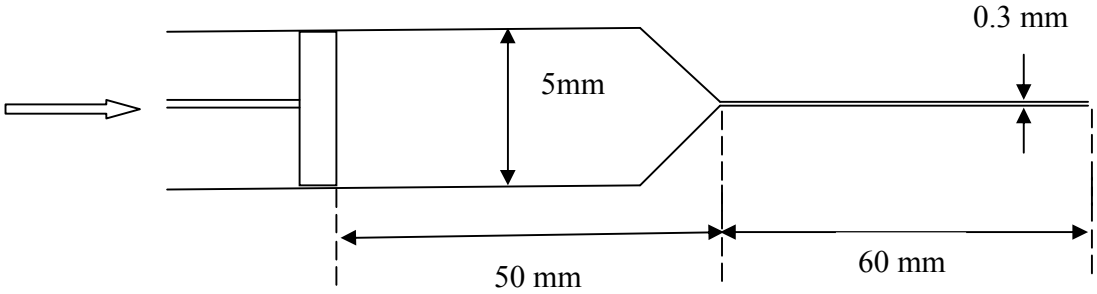
۴-۳۰- اگر ft^3/s ۱ آب در A که دارای فشار $lb/in^2 gage$ ۱۰۰ است به شبکه وارد شود،فشار درB چقدر خواهد بود؟ از افت های موضعی صرف نظر کنید. لوله از نوع فولاد تجارتی است و فرض کنید: $\mu=2.11\times10^{-5}$



۴-۳۱- بین دو صفحه نامحدود موازی و ساکن که به فاصله 2h از یکدیگر قرار دارند یک سیال غیرقابل تراکم لزج در جهت x جریان می یابد. برای جریان دایمی سرعت را به صورت تابعی از y بدست آورید. فرض کنید تمام متغیرها در جهت مثبت محورها افزایش می یابند.

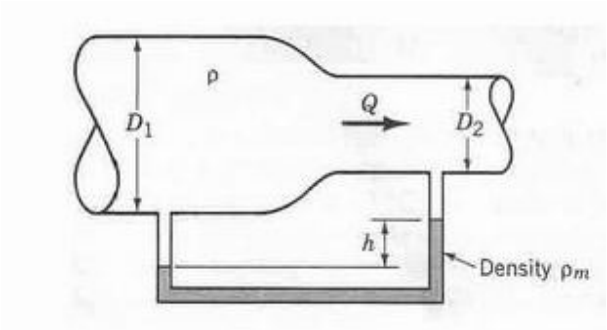
ب)برای این جریان افت ارتفاع h_l بین مقاطع z_1 و z_2 به فاصله L را بدست آورید؟
نتیجه را بر حسب دبی حجمی بر واحد طول q بنویسید.

۴-۳۲- طول سوزن یک سرنگ ۶۰ mm و قطر داخلی آن ۰.۳mm است. اگر پیستون با سرعت ۱۸ mm/s به سمت راست حرکت کند و نشتی وجود نداشته باشد،نیروی وارده به پیستون F چقدر خواهد بود؟
ویسکوزیته داخل سرنگ 0.980×10^{-3} N.s/m^2 و جرم مخصوص آن 800 Kg/m^3 است. هم جریان داخل سرنگ و هم جریان داخل لوله را در نظر بگیرید. از تلفات خروجی سوزن و تلفات در محل اتصال سوزن و سرنگ صرف نظر کنید.
ب)فرض کنید که با این سرنگ دارو را در فشار اتمسفر از ظرفی بیرون می کشید. اگر فشار بخار مطلق سیال ۴۷۰۰ Pa باشد،حداکثر دبی چقدر است؟
ج)از افت های داخل سرنگ صرف نظر کنید. اگر در فشار مطلق ۴۷۰۰ Pa داخل سیلندر ۱۰ درصد نشتی از پیرامون پیستون داشته باشیم،سرعت پیستون برای این دبی ماکزیمم چقدر است؟



د)برای اینکه پیستون با سرعت ۱۸ mm/s به سمت راست حرکت کند،نیروی ۲.۰۶ N لازم است. اگر بخواهیم که برای همین سرعت نیروی ۱ نیوتن کافی باشد،قطر داخلی سوزن باید چقدر باشد؟ از افت های سرنگ صرف نظر کنید.

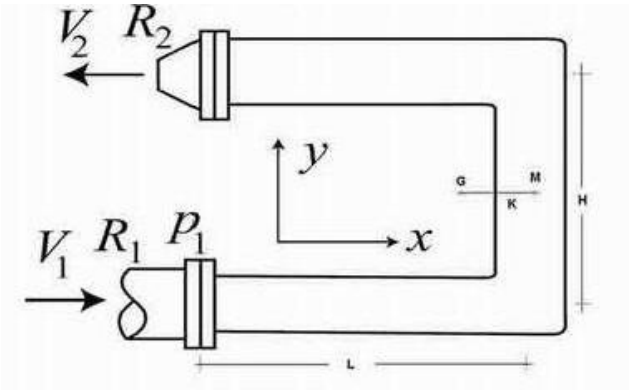
۴-۳۳-در ونتوری متر شکل زیر $D_1 = 30Cm$ ،$D_2 - 15Cm$ ،$\rho = 1000Kg/m^3$ ،$\rho_m = 13600Kg/m^3$ و h=3 Cm است. در صورتی که ضریب افت انرژی ونتوری متر K_L=۰/۲ باشد، جریان Q را محاسبه کنید.



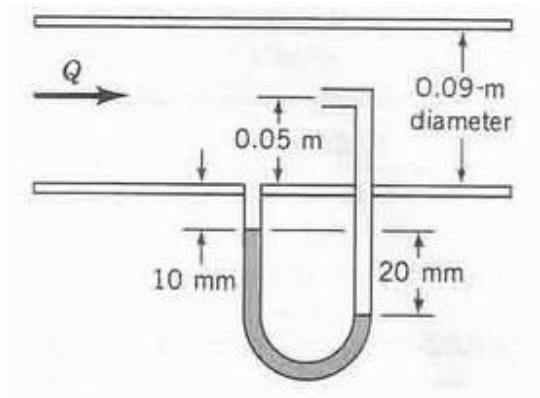
۴-۳۴- آب فشانی مطابق شکل قرار است برای مهار ازراه دور آتش و یا مقابله با تجمعات خیابانی غیر قانونی طراحی و بر روی ماشین آتش نشانی نصب شده شود.x راستای افقی و y راستای قائم می باشد این آب فشان بایستی آب را با سرعت $V_2 = 15m/s$ از نازل انتهایی به اتمسفر خارج نماید R_1 شعاع مجرای زانویی شکل *15Cm* و R_2 شعاع نازل انتهایی *10Cm* است. آب فشان در نقطه میانی بخش قائم (نقطه*M*) توسط یک تکیه گاه صلب مهار می شود. طول دو قسمت افقی، روی محور مرکزی لوله *L=2m* و طول قسمت قائم روی محور مرکزی لوله،*H=1m* می باشد. وزن لوله و آب داخل آن مجموعاً *400Kgf* است که به نقطه *G* وارد می شود. این نقطه در یک راستای ارتفاعی نسبت به نقطه *M* و به فاصله *K=0.5m* در سمت چپ آن واقع شده است.

الف) ابتدا مقدار فشار P_1 در ورودی آب فشان را محاسبه کنید و سپس لنگر و نیروهای وارد بر تکیه گاه *M* را تعیین نمایید.

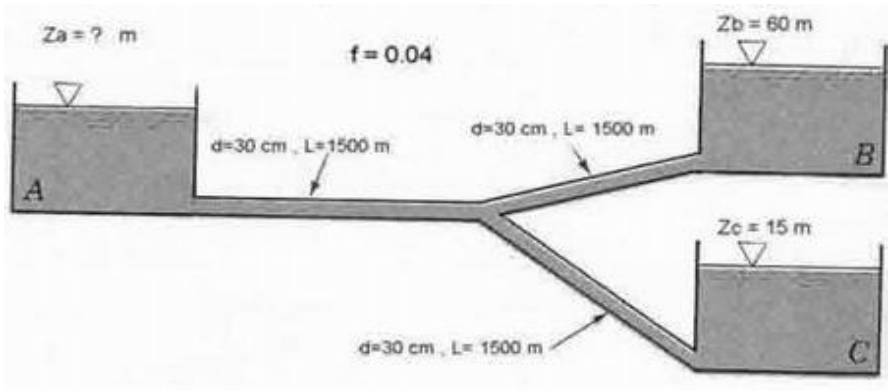
ب) اگر جت خروجی به صورت افقی به یک مانع قائم ساکن (مانند بدن یک فرد) برخورد کند،نیروی وارد بر آن را محاسبه نمایید اگر این فرد یا مانع با سرعت ثابت *3m/s* از جت آب در راستای افقی فرار کند، مجدداً این نیرو را محاسبه نمایید.
(در تمامی مراحل از اصطکاک و افت انرژی صرف نظر نمایید.)



۴-۳۵-در شکل زیر اگر آب و مایع مانومتریک دارای چگالی نسبی ۳ باشد، شدت جریان را با فرض ناچیز بودن افت انرژی محاسبه کنید.

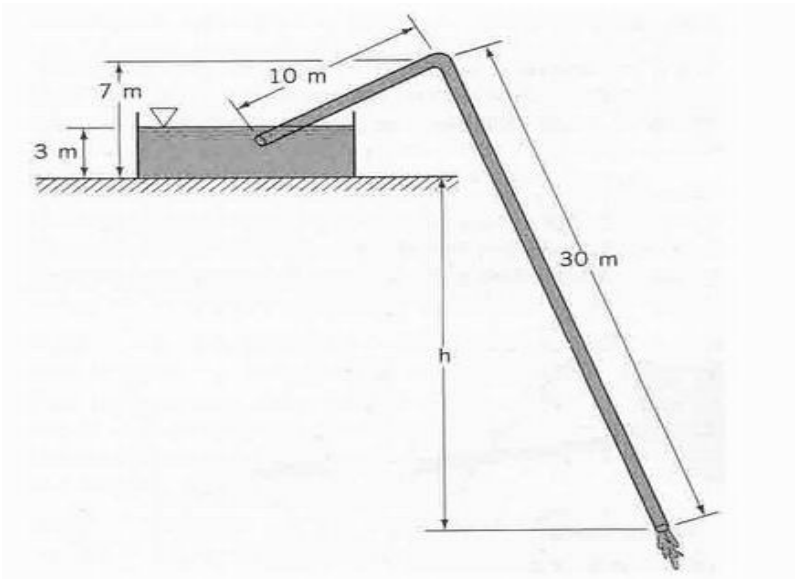


۴-۳۶-در شرایط شکل مقابل با صرف نظر از افت های موضعی و فرض $f=0.04$ برای تمامی لوله ها و با توجه به یکسان بودن قطر و طول هر سه لوله،تراز سطح آب مخزن A را طوری محاسبه کنید که جریان با شدت $20lit/s$ از آن خارج شود.
(هر سه لوله دارای طول $1500m$ و قطر $30Cm$ است.)



۴-۳۷-مطابق شکل لوله ای به طول 40m و قطر 2.5Cm آب را از مخزنی سیفون کرده و در انتها به اتمسفر تخلیه می کند. در صورتی که لوله از جنس فولاد تجاری با زبری متوسط $K_s = 0.045mm$ و $h=25m$ باشد:

الف) شدت جریان را محاسبه کنید.

ب) اگر فشار هوا $P_0 = 100Kpa$ و فشار آب اشباع $P_V = 3Kpa$ باشد. احتمال بروز کاویتاسیون در لوله را با محاسبات کافی بررسی کنید.

(در هر در دوقسمت از افت های موضعی در مقایسه با افت های طولی صرف نظر می شود)