



دانشکده مهندسی عمران، آب و محیط زیست

**مقاومت مصالح ۱**  
**دکتر حمید محمد نژاد**

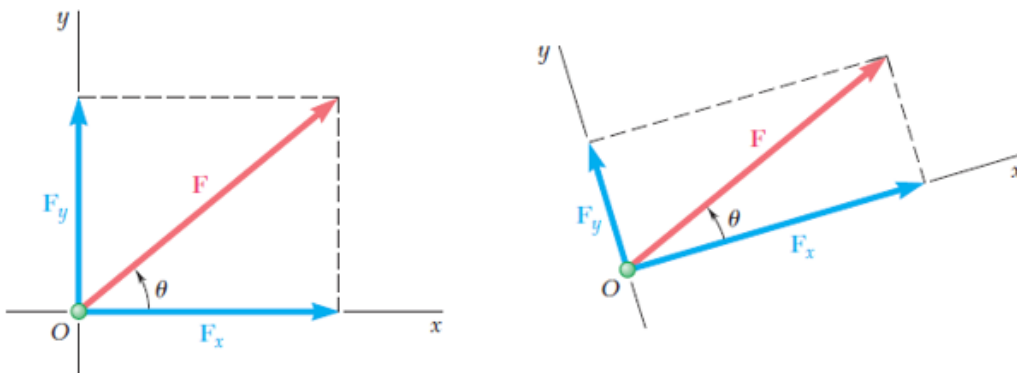
ترم اول سال تحصیلے ۱۴۰۰-۱۴۰۱



در این بخش برخی از مفاهیم مورد نیاز از درس استاتیک مرور خواهد شد. برای مطالعه بیشتر به جزوات درس استاتیک و تمرین های حل شده که در کانال موجود می باشد مراجعه فرمایید.

نیروی  $F$  را که بر یک ذره وارد می شود را می توان با دو یا چند نیرو جایگزین کرد که با هم، همان اثر را بر ذره داشته باشند. این نیروها را مولفه های نیروی  $F$  می نامند. لازم به ذکر است که برای هر نیروی  $F$  بینهایت مجموعه نیرو با این شرایط می توان تصور کرد. به فرآیند جایگزینی نیروی  $F$  با این مجموعه نیرو را تجزیه نیرو به مولفه هایش می گوئیم.

در عمده مسائل پیش رو مناسب است که نیرو به مولفه هایی عمود بر هم تجزیه شود. این حالت خاصی از روش کلی است که در قسمت قبل به آن اشاره کردیم. به همان روش قبلی با ترسیم خطوطی به موازات امتداد های موردنظر از انتهای نیرو، مولفه ها بدست می آید. توجه داشته باشید که در این حالت متوازی الاضلاع به مستطیل تبدیل شده است.



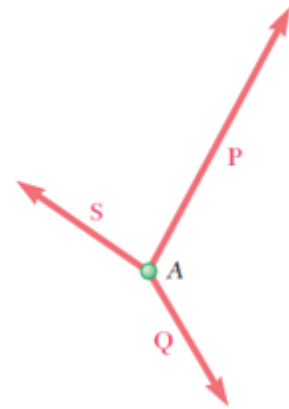
شکل 1: مولفه های قائم یک نیرو

## جمع نیروها (بردارها) با استفاده از مولفه های عمود بر هم (روش تحلیلی)

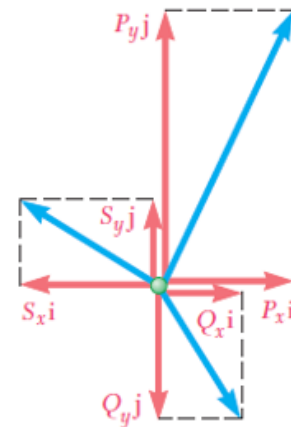


در این روش، هر نیرو به دو مولفه عمود بر هم (عمدتاً  $x$  و  $y$ ) تجزیه می شود. سپس با جمع مولفه های هر امتداد با در نظر گرفتن جهت آنها، نهایتاً به دو نیرو (هر نیرو در یک امتداد) می رسیم. در نهایت با بدست آوردن برآیند این دو نیرو، برآیند کل نیروها بدست می آید. روابط ریاضی مربوط به این روش به صورت زیر می باشد:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$$



$$\begin{aligned} R_x \hat{i} + R_y \hat{j} &= P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + Q_x \hat{i} + Q_y \hat{j} + S_x \hat{i} + S_y \hat{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x) \hat{i} + (P_y + Q_y + S_y) \hat{j} \end{aligned}$$

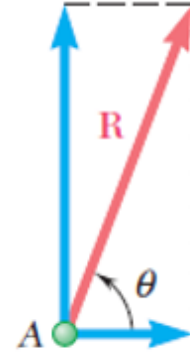


$$R_x = \sum F_x$$

$$R_y = \sum F_y$$

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j}$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x}$$

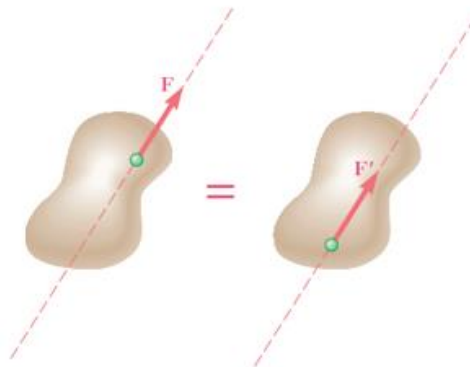


شکل 2: جمع نیروها با استفاده از مولفه‌های قائم

#### ۱-۴ اصل انتقال پذیری نیرو

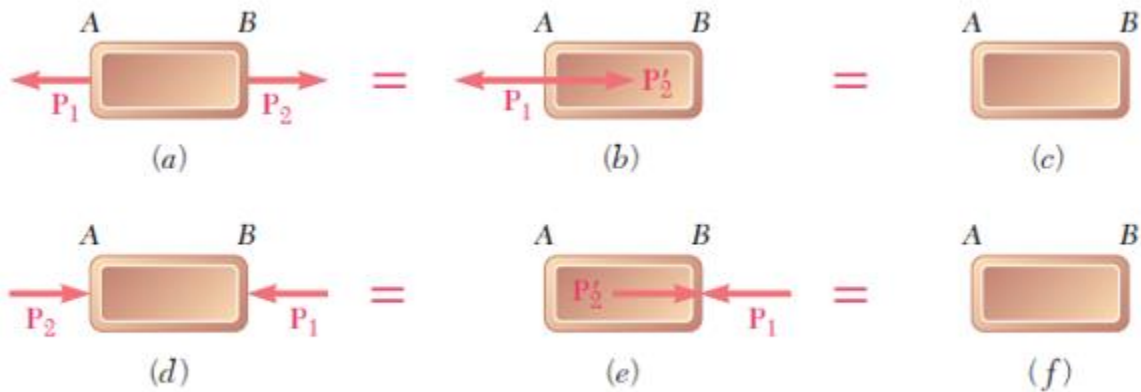


یک قانون تجربی است که با استفاده از دینامیک اجسام صلب قابل استنتاج است. بر اساس این اصل نیروی وارد بر یک جسم صلب را می‌توان در طول خط اثر آن انتقال داد بدون اینکه وضعیت تعادل یا حرکت جسم صلب تغییر کند.



شکل 3: اصل انتقال پذیری

**توجه خیلی مهم:** هرچند می‌توان آزادانه از اصل انتقال پذیری برای تعیین وضعیت حرکت یا تعادل اجسام صلب استفاده کرد و نیروهای خارجی وارد بر این اجسام را بدست آورد، در تعیین نیروهای داخلی و تغییرشکل‌ها باید از کاربرد این اصل اجتناب کرد یا، دست کم، آن را با احتیاط به کار برد.



شکل 4: استثنا در استفاده از اصل انتقال پذیری

۱-۵

### نیروهای خارجی و داخلی

نیروهای خارجی معرف اثر جسمی دیگر بر جسم موردنظرند به عبارتی عامل حرکت و سکون جسم می‌باشند. نیروهای داخلی نیروهایی هستند که ذرات تشکیل دهنده جسم را متصل به هم نگه می‌دارند و عامل تغییر شکل جسم می‌باشند.

تقسیم نیرو از نظر نحوه تاثیر

داخلی

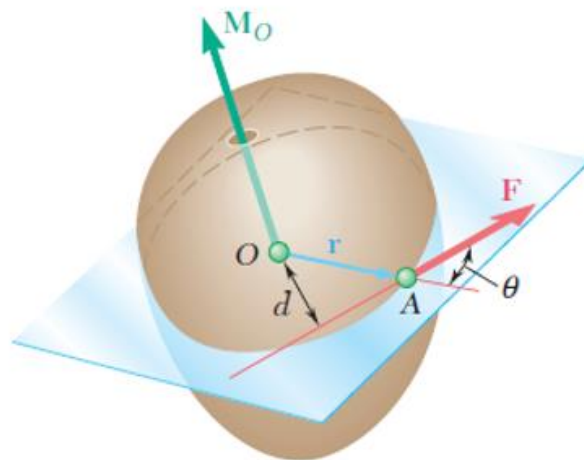
خارجی

شکل 5: تقسیم بندی نیرو از نظر نحوه تاثیر

۱-۶

### لنگر نیرو حول یک نقطه

فرض کنید نیروی  $F$  در نقطه  $A$  به جسم صلبی وارد می‌شود. لنگر نیروی  $F$  حول نقطه  $O$  به صورت حاصلضرب برداری (خارجی) بردار  $r$  و  $F$  تعریف می‌شود:



شکل 6: لنگر نیرو حول یک نقطه

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{r}$  بردار مکان نقطه A می باشد. (بردارای که نقطه O را به نقطه A یا هر نقطه ای از خط اثر  $\vec{F}$  وصل می کند)

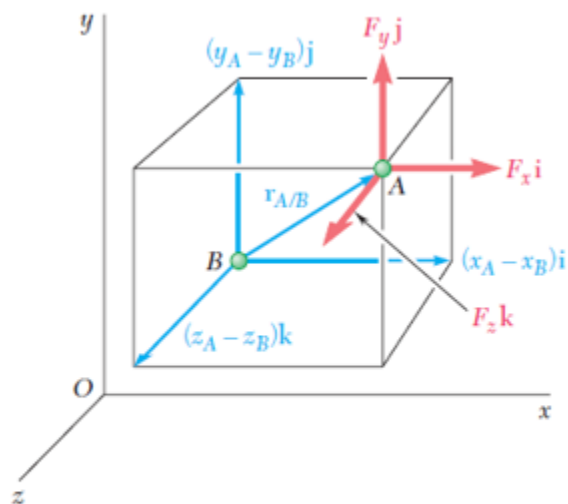
لنگر  $M_o$  بر صفحه ای که O و  $\vec{F}$  در آن قرار دارند، عمود است و جهت آن با استفاده از قانون دست راست بدست می آید. اندازه  $M_o$  در واقع میزان تمایل نیروی  $\vec{F}$  به چرخاندن جسم صلب حول محوری ثابت در امتداد  $M_o$  را نشان می دهد.



شکل 7: جهت لنگر نیرو حول یک نقطه



اگر نیرو و بردار مکان در فرمول محاسبه لنگر نیرو، بر حسب مولفه های قائم نوشته شوند، مولفه های قائم لنگر نیرو طبق رابطه زیر در فضای سه بعدی بدست می آید:



شکل 8: مولفدهای قائم لنگر نیرو در حالت کلی

$$M_B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

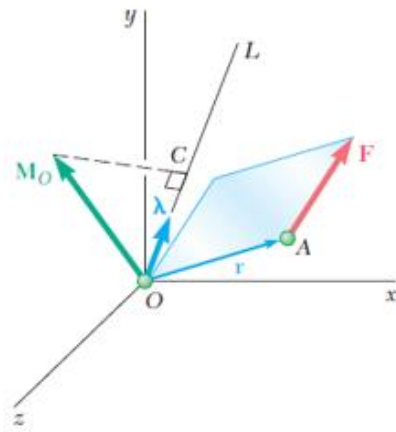
$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

$r_{A/B}$  بردار مکان A نسبت به B می باشد..

## ۱-۸ لنگر نیرو حول محوری مفروض

فرض کنید نیروی  $F$  در نقطه A بر جسم صلبی وارد شده است و  $M_o$  لنگر این نیرو حول نقطه O می باشد. همچنین فرض کنید OL محوری باشد که از نقطه O می گذرد. لنگر  $M_{oL}$  نیروی  $F$  حول محور OL به صورت تصویر لنگر  $M_o$  روی محور OL (OC) OL تعریف می شود. اگر  $\lambda$  بردار یکه روی محور OL باشد داریم:





شکل 9: لنگر نیرو حول محور مفروض

$$M_{OL} = \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_O = \vec{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

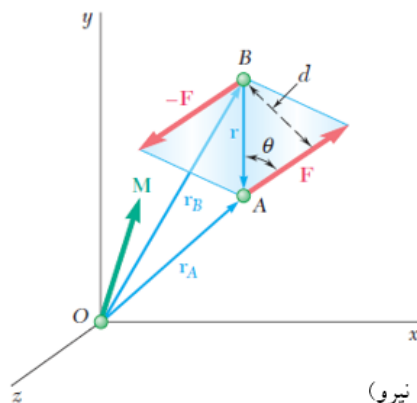
لنگر  $M_{OL}$  نیروی  $F$  حول  $OL$ ، میزان گرایش (تمایل) نیروی  $F$  به ایجاد حرکت چرخشی در جسم صلب، حول محور ثابت  $OL$ ، را نشان می‌دهد.

۱-۹

### کوپل (زوج نیرو)



دو نیروی  $F$  و  $-F$  با اندازه‌های مساوی، خطوط اثر موازی و جهت‌های مخالف، تشکیل کوپل می‌دهند. بدیهی است جمع مولفه‌های این دو نیرو در هر امتداد برابر صفر است ولی جمع لنگرهای این دو نیرو حول نقطه‌ای مفروض صفر نیست. لذا می‌توان نتیجه گرفت که اگر این دو نیرو به جسم صلبی وارد شوند، حرکت انتقالی ایجاد نکرده ولی تمایل به چرخاندن آن دارند.



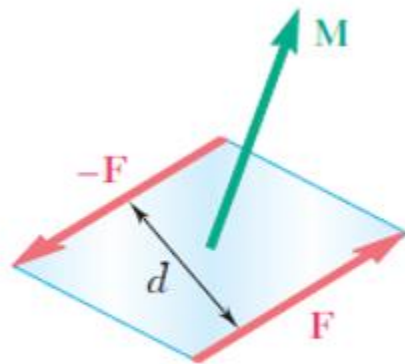
شکل 10: کوپل (زوج نیرو)



اندازه آن نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$M = rF \sin \theta = Fd$$

که در آن  $d$  فاصله عمودی بین خطوط اثر  $F$  و  $-F$  است.



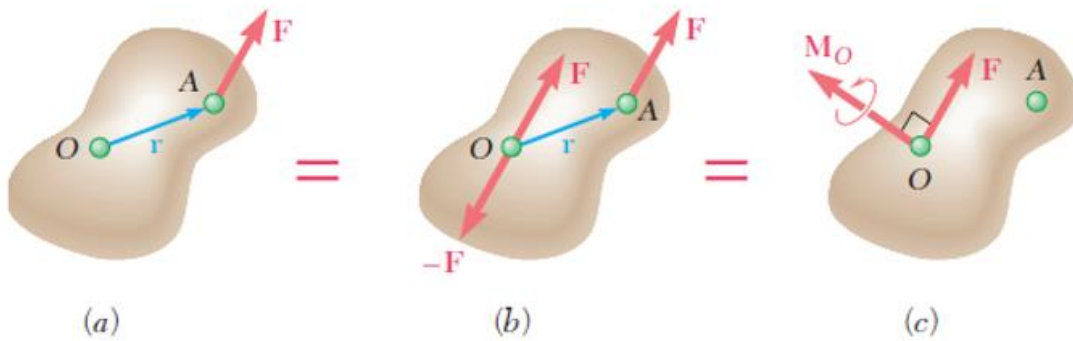
شکل 11: جهت لنگر کوپل

### ۱-۱۰ جابجایی نیرو به نقطه‌ای غیر از راستای خط اثرش (سیستم کوپل-نیرو)



هر سیستم نیروی وارد بر جسم صلب را می‌توان با سیستم هم‌ارزی جایگزین کرد که از یک نیروی وارد بر نقطه‌ای مفروض و یک کوپل تشکیل می‌شود که به آن سیستم نیرو-کوپل می‌گویند.

فرض کنید قصد داریم نیروی  $F$  که در نقطه  $A$  به جسم صلب وارد می‌شود را به نقطه  $O$  منتقل کنیم:



شکل 12: انتقال نیرو بین دو نقطه

بنابراین هر نیروی  $F$  وارد بر جسمی صلب را می توان به هر نقطه دلخواه  $O$  انتقال داد، به شرط آن که کوپلی به سیستم اضافه شود که لنگر آن مساوی لنگر نیروی  $F$  حول نقطه  $O$  باشد.

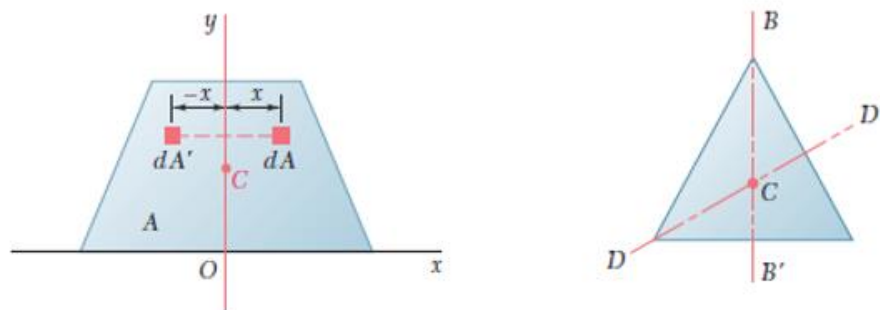


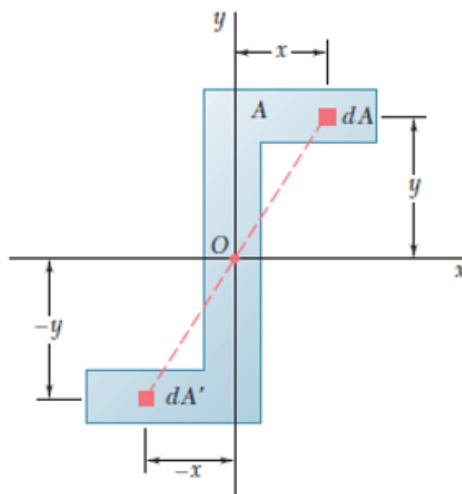
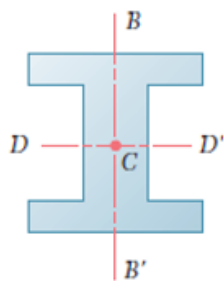
طبق آنچه در بخش های قبلی یاد گرفتیم لنگر اول سطح به صورت زیر تعریف می گردد:

$$Q_y = \bar{x} A = \int x_c dA \quad , \quad Q_x = \bar{y} A = \int y_c dA$$

در تعیین مرکز سطح توجه به نکات زیر میتواند بسیار کمک کننده باشد:

- 1- هرگاه مرکز سطح روی یکی از محورهای مختصات واقع شود، لنگر اول سطح نسبت به آن محور صفر خواهد بود. و برعکس، اگر لنگر اول سطح نسبت به یکی از محورهای مختصات صفر باشد، آنگاه مرکز سطح روی همین محور واقع است.
- 2- اگر سطح یا خط محور تقارن داشته باشد، مرکزوار آن روی محور تقارن خواهد بود.
- 3- اگر سطح یا خط دارای دو محور تقارن باشد، مرکزوار آن در محل تقاطع دو محور تقارن خواهد بود.
- 4- اگر سطح یا خطی دارای مرکز تقارن باشد، مرکزوار آن بر مرکز تقارن منطبق می باشد. (از هندسه به یاد داریم که اگر شکلی دو محور تقارن متعامد داشته باشد، نقطه تقاطع این محورها مرکز تقارن آن شکل است.)





شکل 13: محور و مرکز تقارن

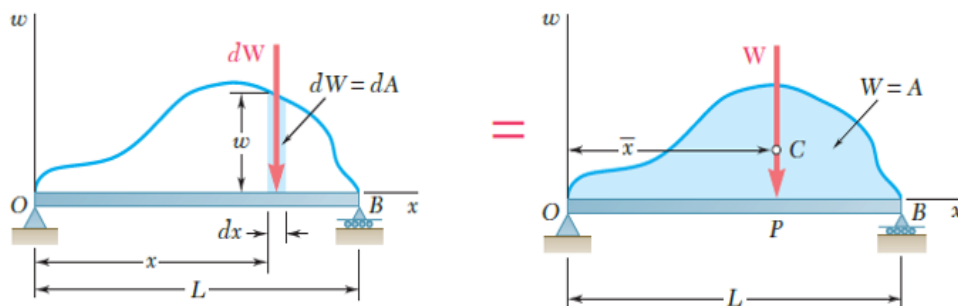
۱-۱۲

## معادل سازی نیروهای گسترده با نیروی متمرکز

با استفاده از مفهوم مرکز سطح، می توان نیروی گسترده را با نیروی متمرکز جایگزین کرد، به این صورت که این نیروی متمرکز با سطح زیر منحنی نیروی گسترده مساوی است و خط اثر آن از مرکز سطح نیروی گسترده می گذرد.

**تذکر مهم:** باید توجه داشت که نیروی متمرکز فقط در صورتی هم ارز نیروی گسترده است که نیروهای خارجی را در نظر بگیریم. از این نیروی متمرکز می توان برای محاسبه واکنش در تکیه گاه ها استفاده کرد، اما نباید آن را برای محاسبه نیروهای داخلی و خیزها به کار برد.

به زبان ریاضی این معادل سازی به صورت شکل و روابط زیر می باشد:

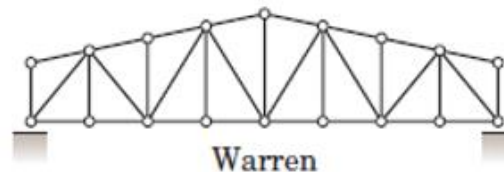
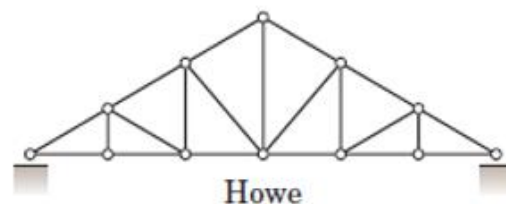
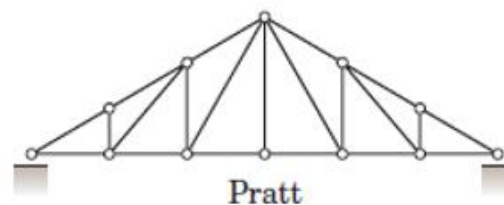
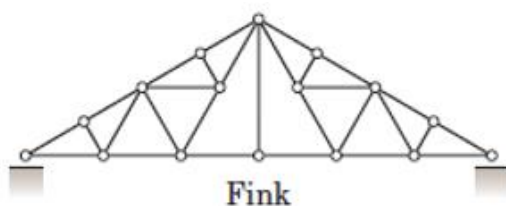
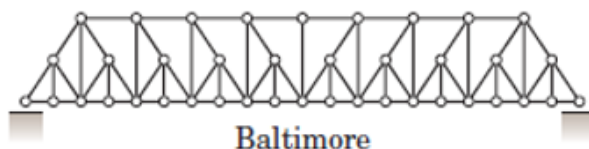
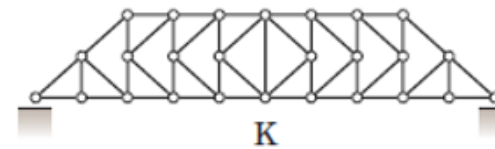
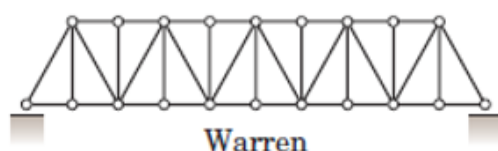
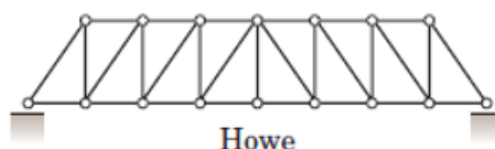
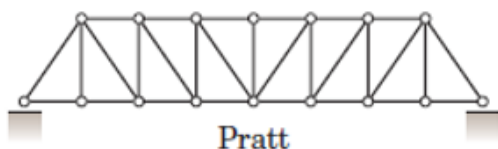


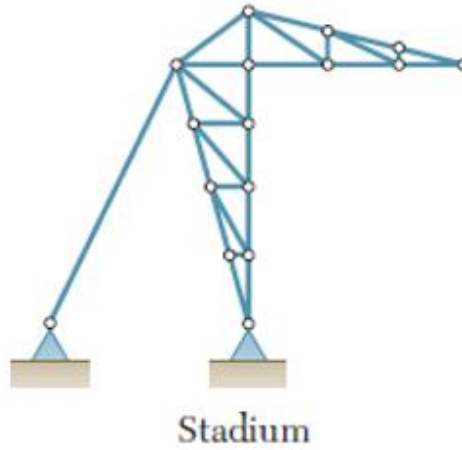
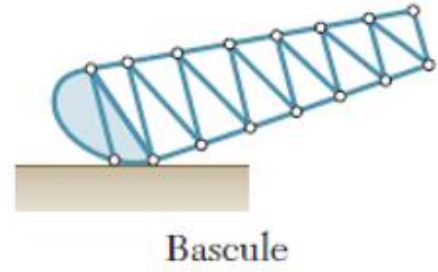
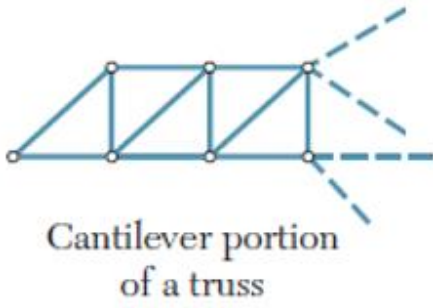
شکل 14: نیروی متمرکز معادل نیروی گسترده

در شکل بالا،  $w$  بیانگر شدت نیروی گسترده خطی و  $W$  بیانگر نیروی متمرکز معادل می باشد.

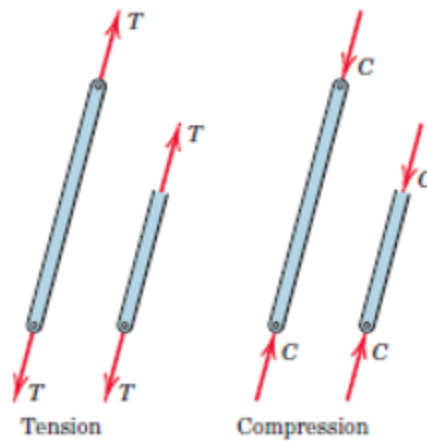


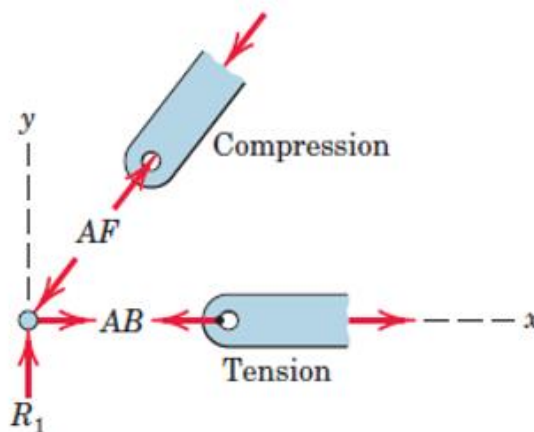
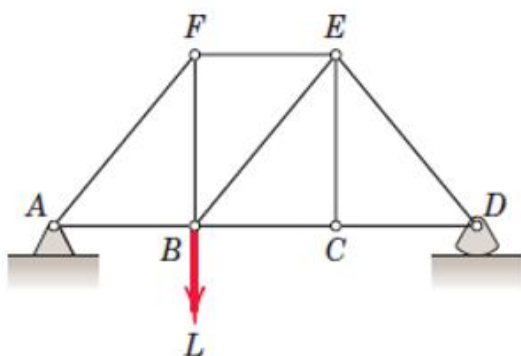
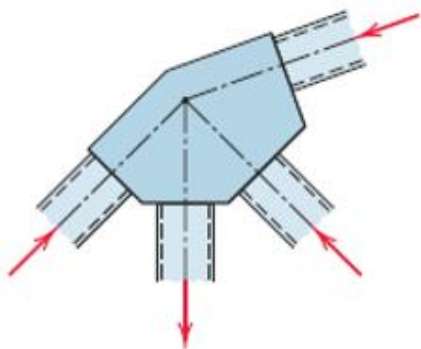
خرپا یکی از انواع مهم سازه‌های مهندسی است که معمولاً در طراحی پل‌ها، جرثقیل‌ها و ساختمان‌ها به عنوان راه حلی عملی و به صرفه برای بسیاری از مسائل مهندسی استفاده می‌شود. خرپا از عضوهای مستقیمی تشکیل شده است که از ناحیه سر به هم در مفصل‌ها متصل شده‌اند. در واقعیت از تیرآهن، ناودانی، نبشی، میله و ... که سرهای آن‌ها با جوشکاری، استفاده از اتصالات پیچی یا پین‌ها به هم متصل می‌شوند. در شکل (15) نمونه‌هایی از خرپاهای متداول مسطح دیده می‌شود. خرپای مسطح خرابایی است که عضوهای آن در یک صفحه واقع شوند.





شکل 15: نمونه‌ای از خریاهای مسطح متداول





شکل 16: فرضیات خریا

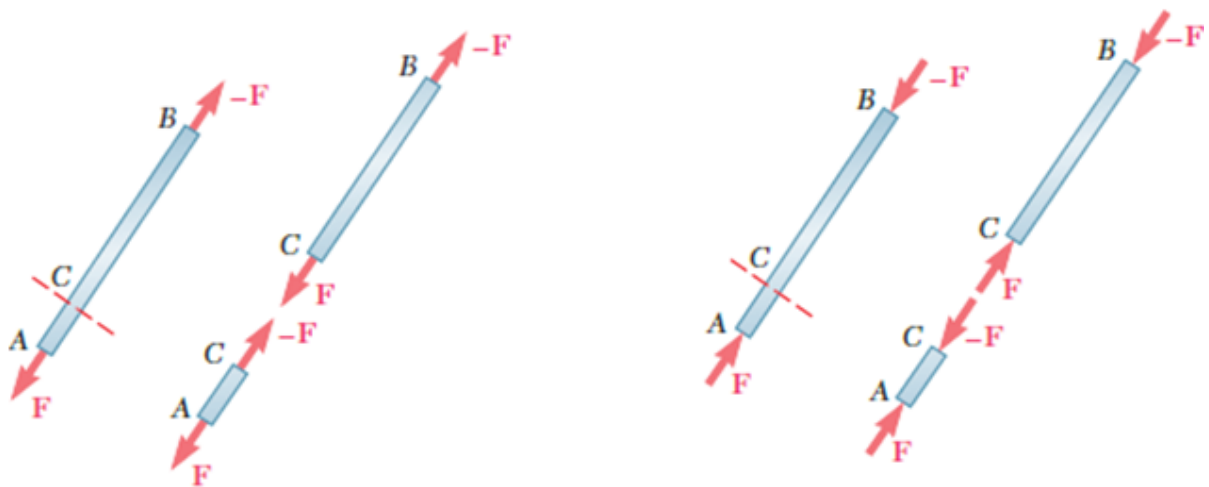
## نیروی داخلی عضو

۱-۱۴

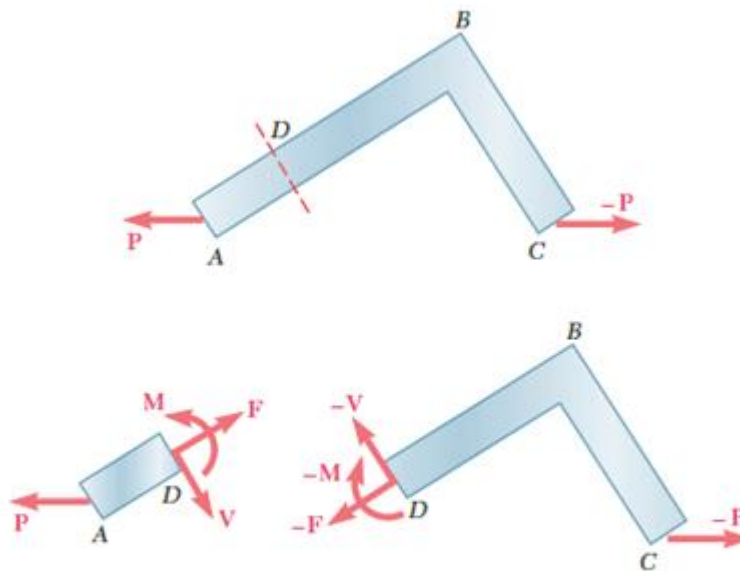


در این بخش قصد داریم با نیروهای داخلی در اعضای مختلف سازه ها آشنا شویم. برای درک مفهوم نیروی داخلی در عضو، در ادامه چند حالت بررسی خواهد شد. به یاد داریم که در بخش های قبلی یاد گرفتیم که وقتی در سازه ای که در حالت تعادل است، مقطعی زده شود، بخش های جدا شده نیز در تعادل می باشند. همچنین در محل مقطع زده شده، اثرات هر بخش جدا شده روی بخش دیگر طبق قانون عمل و عکس العمل به صورت نیروهایی (و در برخی موارد به همراه لنگر (مان)) در نظر گرفته می شود. این نیروها و لنگرها را نیروهای داخلی می گوئیم.

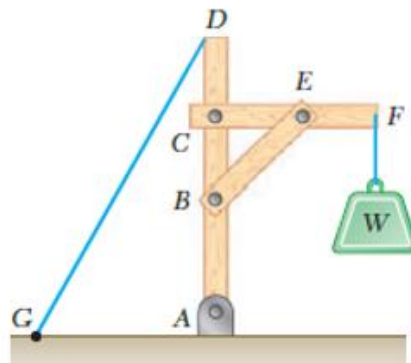
به یاد دارید که وقتی دو بخش جدا شده دوباره به هم چسبیده شوند، این نیروهای داخلی اثرات یکدیگر را خنثی خواهند کرد.



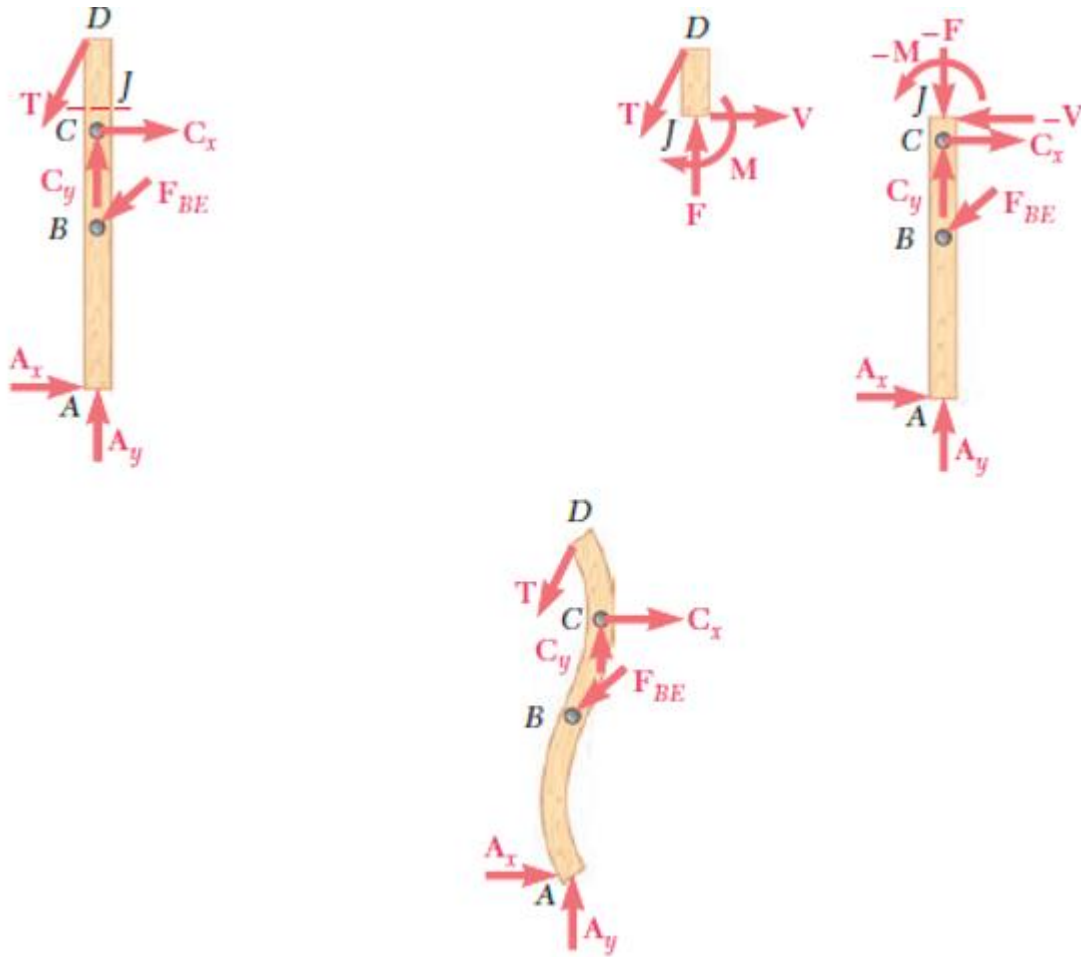
شکل 17: نیروی داخلی در عضو دو نیرویی مستقیم



شکل 18: نیروی داخلی در عضو دو نیرویی غیرمستقیم



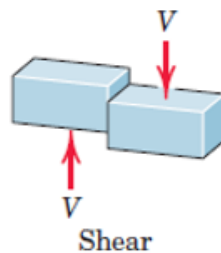


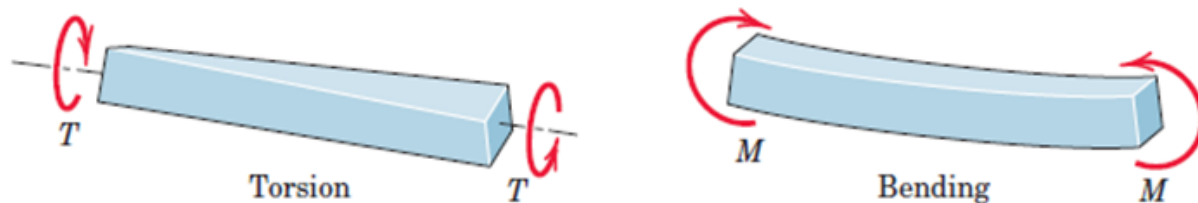


شکل 19: نیروی داخلی در عضو غیر دو نیرویی

در شکل بالا نیروی  $F$  نیروی محوری، نیروی  $V$  نیروی برشی و لنگر  $M$  لنگر خمشی در نقطه  $J$  می باشد.

با بررسی حالت های بالا، به این نتیجه می رسیم که در یک عضو بسته به بارگذاری روی سازه، هر مقطع، علاوه بر تحمل کشش یا فشار (نیروی محوری)، می تواند در برابر برش، خمش و پیچش نیز مقاومت کند. به عبارتی دیگر، نیروهای داخلی شامل نیروی محوری، نیروی برشی، لنگر خمشی و لنگر پیچشی می باشد. با اثرات نیروی محوری روی عضو در بخش های قبلی مخصوصاً خرپا آشنا شدیم. نیروی برشی و لنگرهای خمشی و پیچشی تاثیری شبیه شکل (20) روی عضو خواهند داشت.





شکل 20: اثرات نیروهای داخلی روی عضو

در ادامه به بررسی نیروهای داخلی تیر خواهیم پرداخت

۱-۱۵

## نیروی داخلی تیر



تیر عضوی سازه ای است که در برابر خمش ناشی از وارد شدن بار (نیرو) مقاومت می کند. تیرها از مهمترین عضوهای سازه ای هستند. در بیشتر موارد، بارها بر محور تیر عمودند و فقط سبب برش و خمش در تیر می شوند. وقتی بارها بر تیر عمود نباشند، نیروهای محوری هم در تیر ایجاد می کنند.

تیرها معمولاً میله های مستقیم، منشوری و بلندند. برای طراحی تیر جهت تحمل بارها دو گام اساسی داریم: 1- تعیین نیروهای برشی و لنگرهای خمشی ناشی از بارها

2- انتخاب مناسب ترین مقطع برای مقاومت در برابر نیروهای برشی و لنگرهای خمشی که در گام اول فرآیند طراحی تیر تعیین شدند.

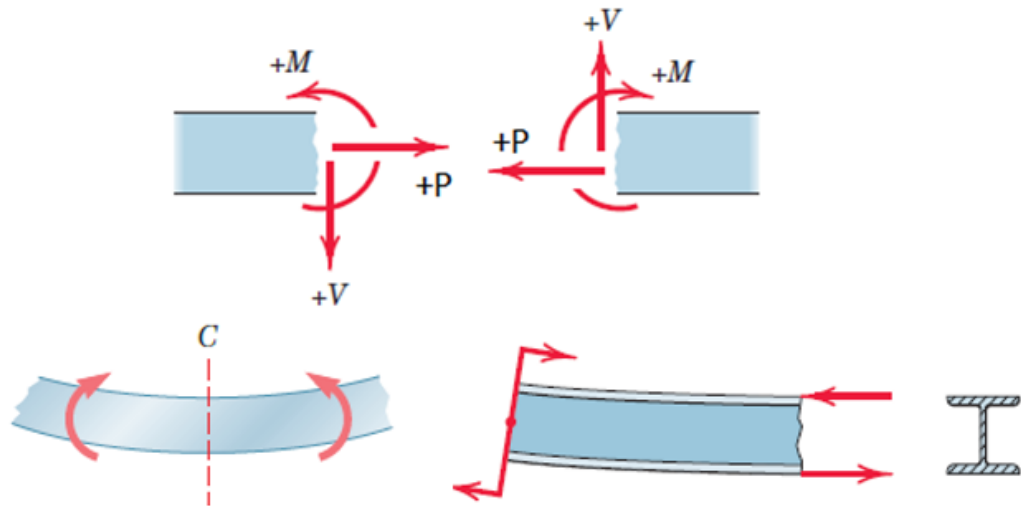
گام اول در درس استاتیک و گام دوم در درس های مقاومت مصالح و طراحی سازه ها مورد بحث قرار می گیرد.

۱-۱۵-۱

## قرارداد نیروهای داخلی



نیروهای داخلی در نقطه ای مفروض از تیر را مثبت می نامند، هرگاه نیروها و لنگر خمشی داخلی، امتدادی مطابق شکل (21) داشته باشد.



شکل 21: جهت قراردادی مثبت برای نیروهای داخلی

با توجه به نکات زیر نیازی به حفظ کردن این قراردادها نداریم:

1- نیروی محوری به سمت بیرون مقطع (نیروی کششی) مثبت می باشد.

2- نیروی برشی که تمایل به دوران بخش جداشده به صورت ساعتگرد دارد، مثبت می باشد.

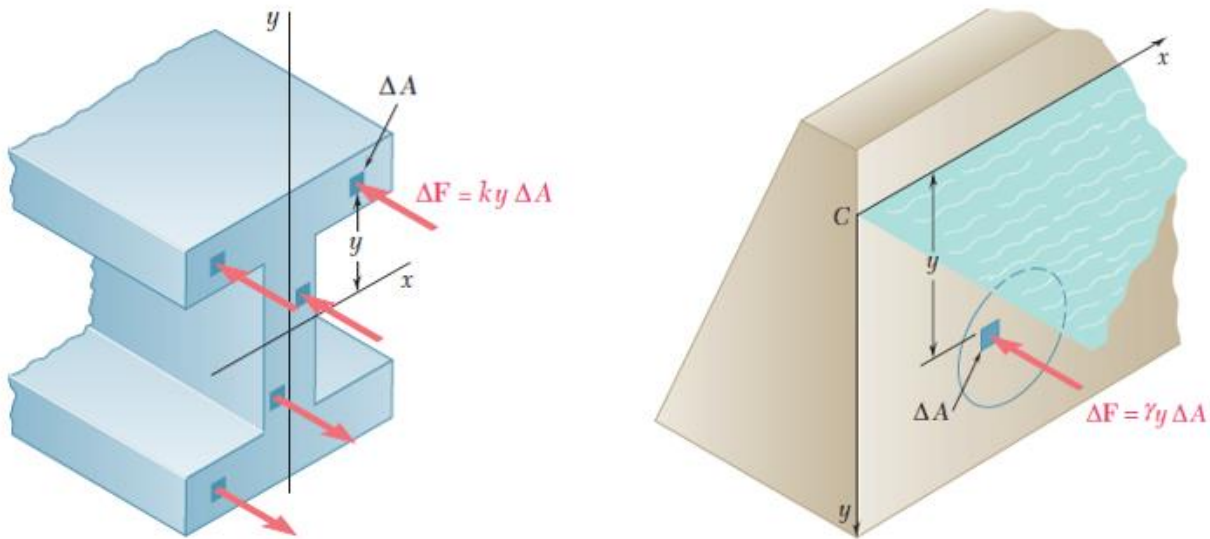
3- لنگر خمشی که تمایل به تغییر شکل شبیه کاسه دارد، مثبت می باشد.

تغییرات نیروهای داخلی در طول تیر، اطلاعات لازم برای طراحی تیر را فراهم می کند. مخصوصاً مقادیر حداکثر آنها، نخستین عاملی است که در طراحی یا انتخاب تیر در نظر گرفته می شود. لذا باید مقدار و محل نیروی داخلی حداکثر نیز مشخص شود. بهترین شیوه نمایش تغییرات نیروهای داخلی شیوه ترسیمی است که در واقع نمودار تابع بدست آمده برای  $N$ ،  $V$  و  $M$  بر حسب فاصله روی تیر را باید ترسیم کنیم. این نمودارها را نمودارهای نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی تیر می نامیم.



هنگامی که نیروها روی سطحی که بر آن وارد می شوند به صورت پیوسته توزیع شده اند، غالباً لازم است لنگر آن ها را حول محوری واقع در صفحه آن سطح، یا عمود بر این صفحه، محاسبه کرد. اغلب اوقات شدت نیرو (فشار یا تنش) با فاصله خط اثر نیرو از محور لنگر متناسب است.

. نیروی جزئی وارد بر هر جزء سطح با فاصله ضرب در سطح دیفرانسیلی آن جزء، و لنگر جزئی با مجذور فاصله ضرب در سطح دیفرانسیلی متناسب است. بنابراین مشاهده می‌شود که نیروی کل به صورت  $\int (x \text{ or } y) dA$  بوده که قبلاً یاد گرفتیم که همان لنگر اول سطح می‌باشد. و همچنین لنگر کل به صورت  $\int (x \text{ or } y)^2 dA$  است که این انتگرال را لنگر لختی یا لنگر دوم سطح یا ممان اینرسی سطح می‌نامند. دقت کنید که این انتگرال تابع هندسه سطح است.



شکل 22: مفهوم لنگر دوم سطح

۱-۱۶-۱

### تعیین لنگر لختی (ممان اینرسی) از طریق انتگرال گیری



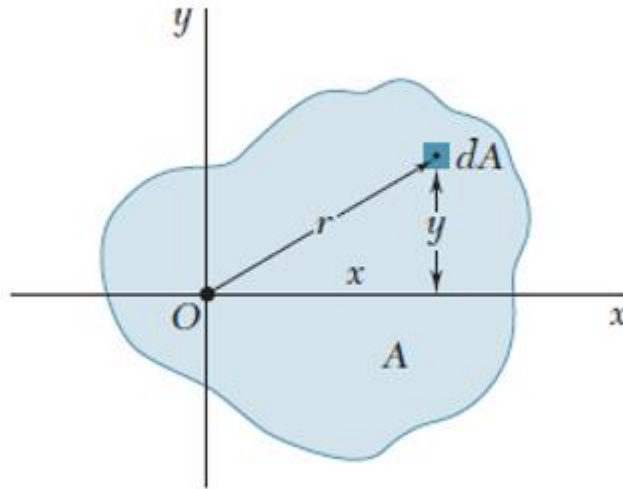
لنگر لختی (ممان اینرسی) سطح  $A$  نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  با استفاده از انتگرال‌های زیر محاسبه می‌گردد:

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

که به این لنگرها، لنگرهای لختی قائم می‌گویند.

با توجه به شکل زیر، انتگرال  $J_o = \int r^2 dA$  که در مسائل مرتبط با پیچش سروکار خواهیم داشت، را ممان اینرسی قطبی یا لنگر لختی قطبی می‌نامند.



دقت کنید که لنگر لختی قطبی سطح مفروض را می توان با استفاده از لنگرهای لختی قائم بدست آورد. به این صورت که:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$J_o = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_y + I_x$$

در نتیجه داریم:

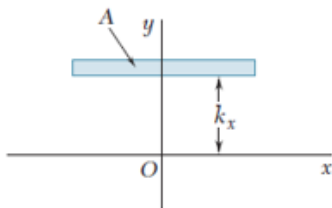
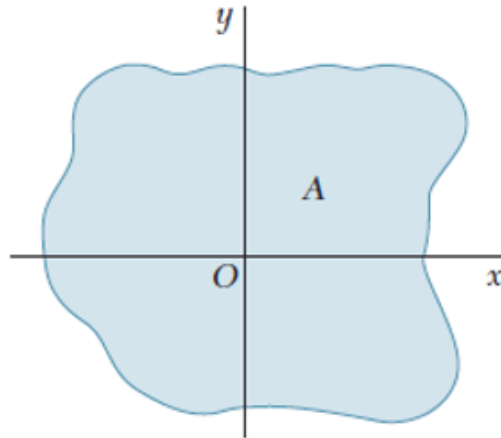
$$J_o = I_x + I_y$$

۱-۱۶-۲  
شعاع ژیراسیون

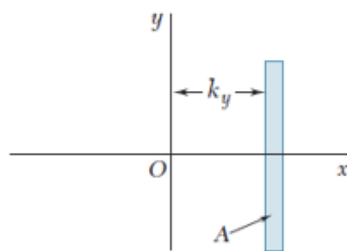


سطح A را در نظر بگیرید که لنگر لختی (ممان اینرسی) آن نسبت به محور X برابر  $I_x$  است. حال تجسم کنید که این سطح را به صورت نواری موازی با محور X فشرده کنیم. اگر قرار باشد لنگر لختی این نوار نسبت به محور X با لنگر لختی سطح اصلی یکی باشد، این نوار باید در چه فاصله‌ای از محور X باشد؟؟ این فاصله را شعاع ژیراسیون می نامیم. با استفاده از این تعریف و

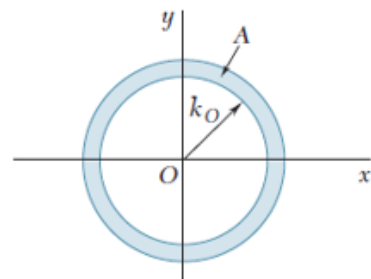
شکل های زیر داریم:



شعاع ژیراسیون نسبت به محور X



شعاع ژیراسیون نسبت به محور Y



شعاع ژیراسیون قطبی

$$I_x = k_x^2 A$$

$$I_y = k_y^2 A$$

$$J_o = k_o^2 A$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

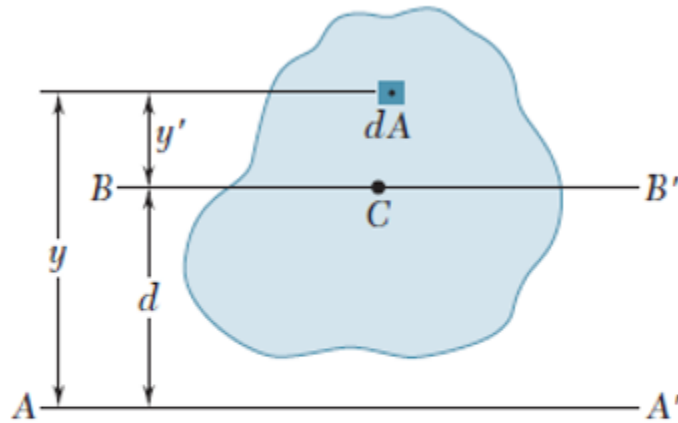
$$k_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

با توجه به تعاریف بالا، رابطه زیر بین شعاع ژیراسیون‌ها برقرار است:

$$k_o^2 = k_x^2 + k_y^2$$



اگر در شکل زیر C مرکز سطح A بوده و محور AA' با محور BB' گذرنده از مرکز سطح موازی باشد، طبق قضیه محور موازی داریم:



$$I_{AA'} = I_{BB'} + A d^2$$

$$I = \bar{I} + A d^2$$

طبق قضیه محور موازی رابطه زیر بین شعاع‌های ژیراسیون نیز برقرار است:

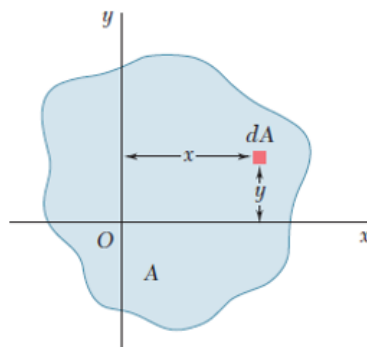
$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2$$

با استفاده از قضیه‌ای مشابه، می‌توان لنگر لختی قطبی،  $J_O$ ، سطح نسبت به نقطه  $O$  را، به لنگر لختی قطبی،  $\bar{J}_C$  همان سطح حول مرکزوار  $C$  مربوط کرد. اگر فاصله بین  $O$  و  $C$  را  $d$  بنامیم، خواهیم داشت:

$$J_O = \bar{J}_C + A d^2 \quad \text{or} \quad k_O^2 = \bar{k}_C^2 + d^2$$



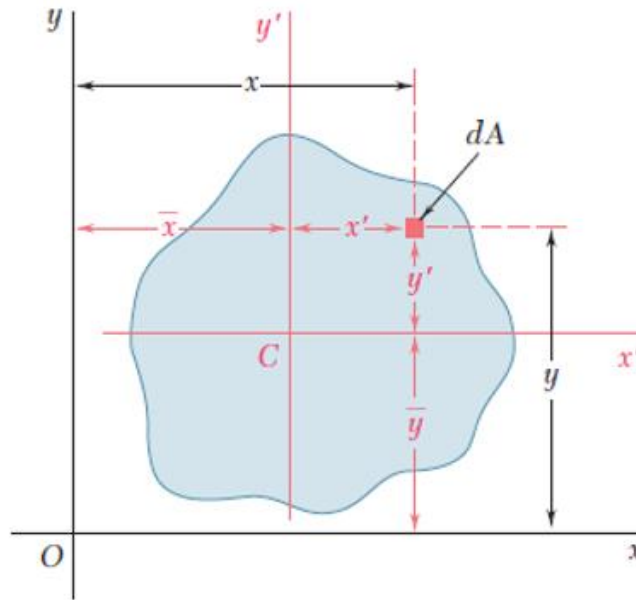
با توجه به شکل زیر، حاصلضرب لختی سطح  $A$  نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  به صورت انتگرال زیر تعریف می‌شود:



$$I_{xy} = \int xy \, dA$$

وقتی یکی از محورهای  $x$  و  $y$  یا هر دو آن‌ها محور تقارن سطح  $A$  باشند، حاصلضرب لختی  $I_{xy}$  صفر است.

با استفاده از قضیه محور موازی برای حاصلضرب لختی طبق شکل زیر داریم:



$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x} \bar{y} A$$

۵-۱۶-۱

### لنگر لختی (مان اینرسی) سطوح مرکب



لنگر لختی (مان اینرسی) یک سطح مرکب نسبت به یک محور برابر است با مجموع لنگر لختی (مان اینرسی) سطوح تشکیل‌دهنده آن نسبت به آن محور. دقت کنید که در محاسبه مان اینرسی سطوح مرکب نسبت به یک محور از قضیه محور موازی به وفور استفاده خواهیم کرد. همچنین اگر سطحی حذف شده باشد (حفره یا ...) مان اینرسی آن را در محاسبات منفی در نظر می‌گیریم.

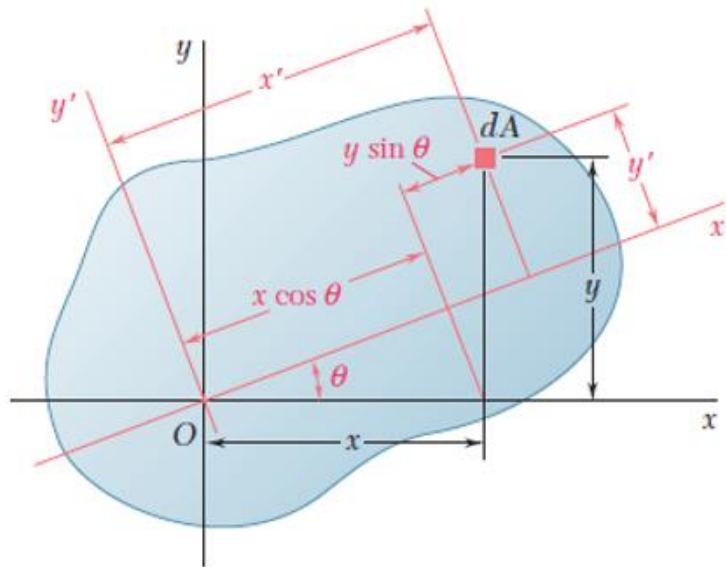
نکته مهمی که باید توجه کنیم این است که شعاع ژیراسیون سطح مرکب، با جمع شعاع‌های ژیراسیون سطوح تشکیل‌دهنده آن مساوی نیست.





## محورهای اصلی و لنگر لختی (ممان اینرسی) اصلی

در این بخش قصد داریم با معلوم بودن مقدار ممان اینرسی حول محور  $x$  و  $y$ ، طبق شکل زیر، ممان اینرسی سطح را نسبت به محورهایی که حول مبدا  $O$  به اندازه  $\theta$  دوران کرده است (یعنی محورهای  $x'$  و  $y'$  تعیین نماییم.



با استفاده از روابط مثلثاتی و ساده سازی ها خواهیم داشت:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

با استفاده از روابط بالا، می توان ممان اینرسی سطح را نسبت به هر محوری که حول مبدا دوران کرده بدست آورد.

از روابط مربوط به ممان اینرسی محورهای دوران یافته نتایج زیر بدست می آید:

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$$

(الف)

ب) معادلات مربوط به  $I_{x'}$  و  $I_{x'y'}$  معادله‌های پارامتری یک دایره هستند. یعنی اگر به ازای مقادیر مختلف  $\theta$  در یک دستگاه مختصات قائم نقاط به مختصات  $(I_{x'}, I_{x'y'})$  را ترسیم کنیم، نقاط بدست آمده روی یک دایره قرار خواهند گرفت. معادله این دایره به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$$

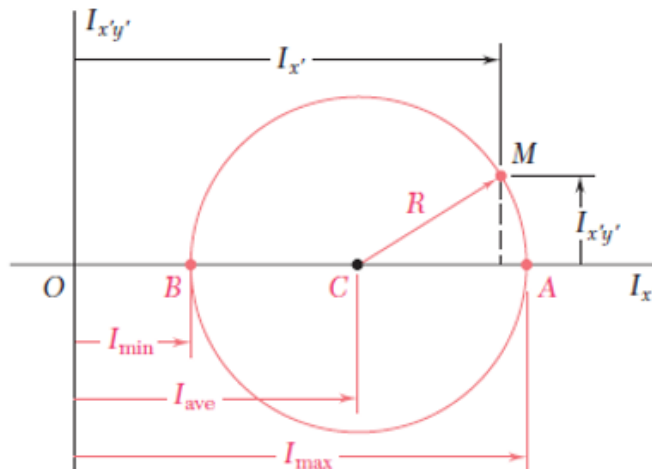
که با تعریف

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2} \quad \text{and} \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

خواهیم داشت:

$$(I_{x'} - I_{ave})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$$

همانطور که می‌دانید، معادله فوق، معادله دایره به شعاع  $R$  و مرکز  $C$  به مختصات  $(I_{ave}, 0)$  می‌باشد. این دایره را که نخستین بار مهندس آلمانی به نام اوتو مور معرفی کرد دایره مور می‌نامیم.



دو نقطه A و B در دایره مور، یعنی نقاط تقاطع دایره با محور افقی اهمیت خاصی دارند. این نقاط به ترتیب متناظر با مقادیر ماکزیمم و مینیمم ممان اینرسی  $I_{x'}$  می‌باشند. دقت کنید که در این دو نقطه  $I_{x'y'}$  صفر می‌باشند. مقادیر  $\theta_m$  پارامتر  $\theta$  که با نقاط A و B متناظر است با حل معادله  $I_{x'y'} = 0$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

دقت کنید که هر شعاع از دایره معادل یک محور در شکل اصلی می‌باشد. همچنین بازای دوران یک محور به اندازه  $\theta$  روی شکل اصلی، روی دایره به اندازه  $2\theta$  و هم‌جهت با دوران شکل، دوران خواهیم داشت.

محورهای متناظر با نقاط A و B که بیانگر محورهایی هستند که ممان اینرسی سطح نسبت به آنها ماکزیمم و مینیمم می‌باشد، محورهای اصلی سطح حول نقطه O و مقادیر متناظر  $I_{\max}, I_{\min}$  را لنگرهای لختی اصلی (ممان اینرسی اصلی) سطح نامیده می‌شود. دقت کنید که حاصلضرب لختی سطح نسبت به محورهای اصلی برابر صفر است.

مقادیر ممان اینرسی اصلی را می‌توان هم با ترسیم دایره مور و هم از روابط زیر بدست آورد:

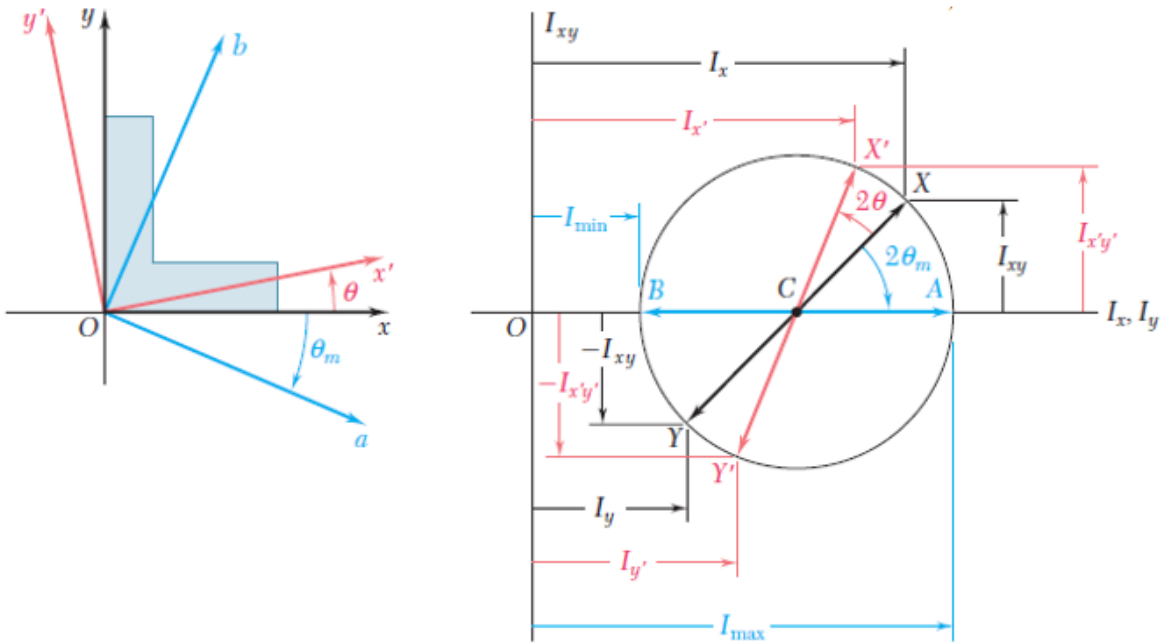
$$I_{\max} = I_{\text{ave}} + R \quad I_{\min} = I_{\text{ave}} - R$$

$$I_{\max, \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

هرگاه سطحی محور تقارنی داشته باشد که از نقطه O می‌گذرد، این محور باید محور اصلی آن سطح حول نقطه O باشد. از طرف دیگر، محور اصلی لزوماً نباید محور تقارن سطح باشد. خواه سطحی محور تقارن داشته باشد و خواه نداشته باشد، دو محور اصلی لختی (عمود برهم) حول هر نقطه O خواهد داشت.



سطح مفروض  $A$  و دو محور مختصات قائم  $X$  و  $Y$  را به صورت شکل زیر در نظر بگیرید.



با فرض معلوم بودن (یا محاسبه) مقادیر ممان اینرسی  $I_x$  و  $I_y$  و  $I_{xy}$  طی مراحل زیر دایره مور را ترسیم می‌کنیم:

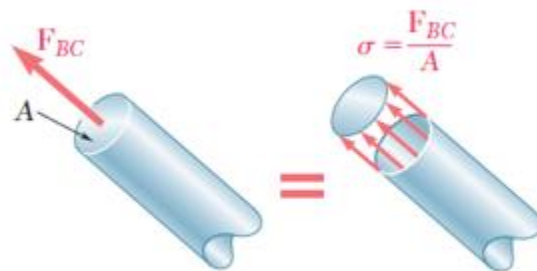
- 1- نقطه  $X$  به مختصات  $(I_x, I_{xy})$  را روی نمودار مشخص می‌کنیم.
  - 2- نقطه  $Y$  به مختصات  $(I_y, -I_{xy})$  را روی نمودار مشخص می‌کنیم.
  - 3-  $X$  و  $Y$  را با خطی راست به هم متصل می‌کنیم و نقطه تقاطع خط  $XY$  با محور افقی را  $C$  می‌نامیم.
  - 4- دایره‌ای به مرکز  $C$  و قطر  $XY$  ترسیم می‌کنیم.
- دایره حاصل، دایره مور برای سطح مفروض حول نقطه  $O$  می‌باشد.



همانطور که در جلسات قبل صحبت کردیم، هدف اصلی از مطالعه مقاومت مصالح دستیابی به ابزار تحلیل و طراحی سازه‌ها براساس مفاهیم تنش و تغییر شکل می‌باشد. در این بخش با مفهوم تنش آشنا خواهیم شد و برای درک بیشتر از یک مثال که قبلاً مشابه آن را در درس استاتیک بررسی کردیم، استفاده خواهیم کرد.



فرض کنید عضوی از یک سازه (مثلاً خرپا) دارای نیروی داخلی به صورت شکل زیر باشد. آیا به نظر شما صرفاً با دانستن مقدار نیروی داخلی  $F_{BC}$  می‌توان در مورد گسیختگی یا عدم گسیختگی میله نظر داد؟ در جواب باید گفت نه. زیرا وضعیت گسیختگی میله علاوه بر نیروی داخلی به مساحت مقطع عرضی میله و جنس آن نیز بستگی دارد. در واقع، نیروی داخلی  $F_{BC}$  برآیند نیروهای جزئی است که در تمام مساحت مقطع عرضی توزیع شده‌اند.



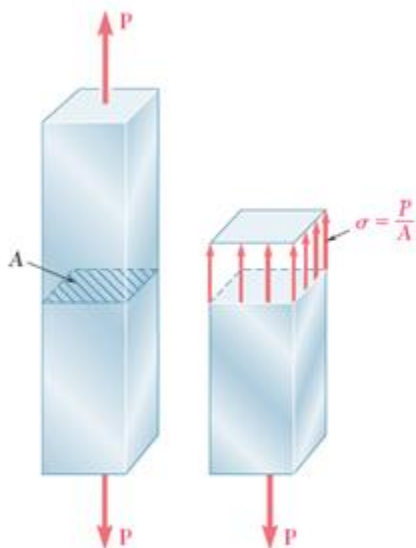
شکل ۱: نیروی محوری و تنش مربوطه

شدت متوسط این نیروهای توزیعی برابر است با نیروی وارده بر مساحت واحد این مقطع. نیرو در سطح واحد، یا شدت نیروهای توزیع شده روی یک مقطع معین را تنش در آن مقطع می‌گویند.

تنش در یک عضو با مساحت مقطع عرضی  $A$  که تحت بار محوری  $P$  است از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

این تنش از نوع تنش نرمال می‌باشد و از علامت مثبت برای تنش کششی و از علامت منفی برای تنش فشاری استفاده می‌شود.



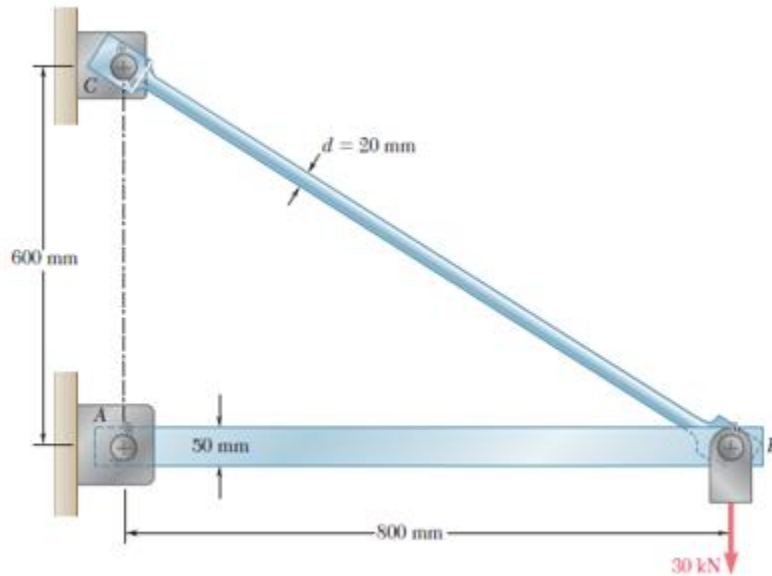
شکل ۲: عضو با نیروی محوری

در خصوص واحد تنش، اگر بار  $P$  برحسب نیوتن ( $N$ ) و مساحت  $A$  بر حسب مترمربع ( $m^2$ ) باشد، تنش  $\sigma$  بر حسب  $N/m^2$  خواهد بود که این واحد را پاسکال ( $Pa$ ) می‌نامیم. از فیزیک به یاد دارید که برای مقادیر بزرگتر یک کمیت از مضرب‌های کیلو، مگا و گیگا می‌توان استفاده کرد.

۲-۲-۱

### مثال برای درک مفهوم تنش محوری

برای درک مفهوم تنش محوری، سازه شکل زیر را تحلیل خواهیم کرد. این سازه تحت اثر نیروی خارجی  $30\text{ kN}$  قرار دارد. این سازه از عضو  $AB$  با مقطع عرضی مستطیلی به ابعاد  $30 \times 50\text{ mm}$  و عضو  $BC$  با مقطع عرضی دایره‌ای به قطر  $20\text{ mm}$  تشکیل شده است. این اعضا توسط مفصل  $B$  به هم متصل شده‌اند و توسط مفصل‌ها و بست‌ها در  $A$  و  $C$  نگه داشته شده‌اند. با استفاده از آنچه که در استاتیک یاد گرفتیم به صورت مرحله به مرحله این سازه را تحلیل کرده و نیروهای داخلی آن را بدست می‌آوریم.



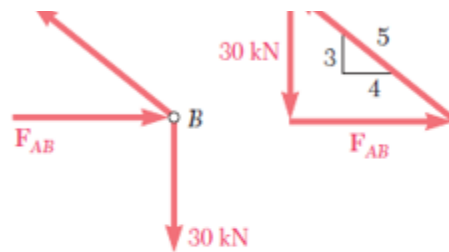
شکل 3: مثال کاربردی برای درک مفهوم تنش

دو روش برای تحلیل این سازه وجود دارد:

1- نمودار جسم آزاد کل سازه را ترسیم کرده و با استفاده از معادلات تعادل عکس العمل‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی اعضا را بدست آوریم.

2- از مفهوم عضو دو نیرویی استفاده کنیم.

می‌دانیم اعضای  $AB$  و  $BC$  عضوهای دو نیرویی هستند، یعنی عضوهایی که فقط در دو نقطه تحت اثر نیرو قرار دارند. از طرفی از استاتیک می‌دانیم که برای یک عضو دو نیرویی، خطوط اثر برآیند نیروهای وارد بر هر یک از این دو نقطه در خلاف جهت هم بوده و از این دو نقطه می‌گذرند. با دانستن این نکته و بررسی تعادل مفصل  $B$  با استفاده از ترسیم مثلث نیروها، خواهیم داشت:

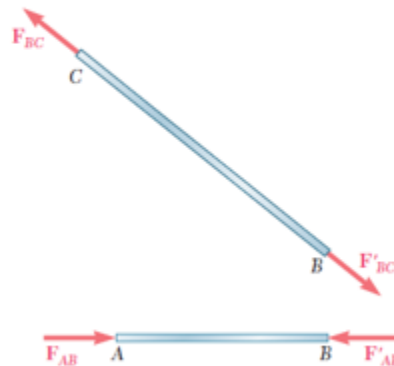


شکل 4: مثلث نیرو برای بررسی تعادل مفصل B

$$\frac{F_{AB}}{4} = \frac{F_{BC}}{5} = \frac{30 \text{ kN}}{3}$$

که با حل تناسب بالا، خواهیم داشت:

$$F_{AB} = 40 \text{ kN} \quad , \quad F_{BC} = 50 \text{ kN}$$



شکل 5: نیروی داخلی اعضای سازه

حال که نیروهای در دو سر عضوها، را بدست آوردیم می توانیم به راحتی با زدن مقطع در نقاط دلخواه عضو، نیروی داخلی را بدست آوریم.

در نهایت به این نتیجه می رسیم که عضو BC تحت کششی برابر با  $50 \text{ kN}$  و عضو AB تحت فشار برابر با  $40 \text{ kN}$  می باشد.



در ادامه برای درک مفهوم تنش و آشنایی بیشتر با اهمیت این درس در طراحی سازه‌ها دو حالت زیر را بررسی می‌نماییم.

**حالت 1:** فرض کنید میله  $BC$  به قطر  $20\text{ mm}$  از فولاد با ماکزیمم تنش مجاز  $\sigma_{all} = 165\text{ MPa}$  ساخته شده است. آیا این میله می‌تواند بار وارده را تحمل کند؟

**جواب:** با استفاده از نتایج تحلیل بخش قبل، نیروی داخلی عضو  $BC$  و ابعاد مقطع را داریم. لذا مقدار تنش محوری عضو را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P = F_{BC} = +50\text{ kN} = +50 \times 10^3\text{ N}$$

$$A = \pi r^2 = \pi \left( \frac{20\text{ mm}}{2} \right)^2 = \pi (10 \times 10^{-3}\text{ m})^2 = 314 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{+50 \times 10^3\text{ N}}{314 \times 10^{-6}\text{ m}^2} = +159 \times 10^6\text{ Pa} = +159\text{ MPa}$$

تنش حاصله در عضو  $BC$  تحت اثر بار اعمالی، کمتر از تنش مجاز فولاد بوده، لذا این میله با اطمینان می‌تواند بار وارده را تحمل کند.

**حالت 2:** فرض کنید می‌خواهیم از آلومینیم با تنش مجاز  $\sigma_{all} = 100\text{ MPa}$  برای عضو  $BC$  استفاده نماییم. در این حالت قطر مقطع دایره‌ای عضو چقدر باید باشد تا عضو با اطمینان بار وارده را تحمل کند؟

**جواب:** در این حالت دنبال یافتن ابعاد مناسب برای مقطع هستیم. به عبارتی در حال طراحی عضو  $BC$  هستیم. برای این منظور باید ابعاد مقطع را به گونه‌ای تعیین کنیم که تنش حاصله از نیروی اعمالی به سازه، کمتر از تنش مجاز آلومینیم باشد. لذا:

$$\sigma_{\text{all}} = \frac{P}{A} \quad A = \frac{P}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{100 \times 10^6 \text{ Pa}} = 500 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A = \pi r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{500 \times 10^{-6} \text{ m}^2}{\pi}} = 12.62 \times 10^{-3} \text{ m} = 12.62 \text{ mm}$$

$$d = 2r = 25.2 \text{ mm}$$

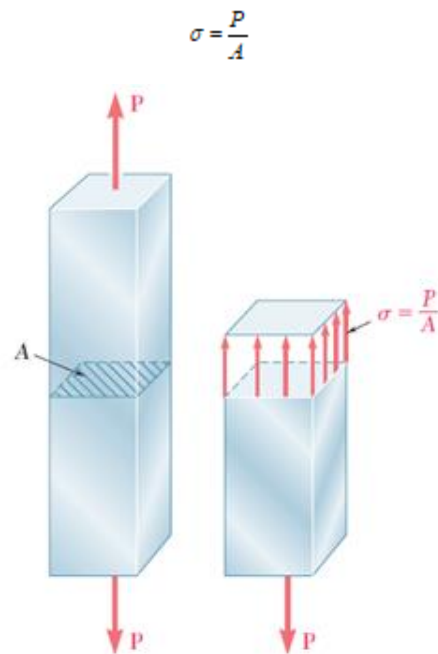
پس میله آلومینیم به قطر  $26 \text{ mm}$  یا بیشتر انتخاب می‌گردد.

حال که با مفهوم تنش به صورت کلی و مفهوم تحلیل و طراحی آشنا شدیم، در ادامه با تنش نرمال و تنش برشی آشنا خواهیم شد و در قالب یک مثال به درک عمیق‌تری از این مفاهیم در تحلیل و طراحی سازه‌ها خواهیم رسید. لازم به ذکر است در جلسات آینده با پیشرفت یادگیری، جزئی‌تر مفاهیم بررسی خواهد شد.

### ۲-۳ تنش قائم یا نرمال

این نوع تنش متناظر با نیروی داخلی محوری و لنگر خمشی در مقطع عضو ایجاد می‌شود. ساده‌ترین مثال برای درک موضوع طبق مباحث جلسات قبل، تنش متناظر با نیروی محوری در اعضای خرپا می‌باشد.

در شکل زیر، عضو تحت بار محوری، یادگرفتیم که **تنش نرمال متوسط** ناشی از **نیروی محوری** به صورت زیر محاسبه می‌گردد:



شکل 2- تکرار: عضو با نیروی محوری

دقت کنید که تنش  $\sigma$  در فرمول بالا، مقدار **متوسط تنش** روی مقطع عرضی می‌باشد و تنش در یک نقطه خاص از مقطع عرضی نمی‌باشد.

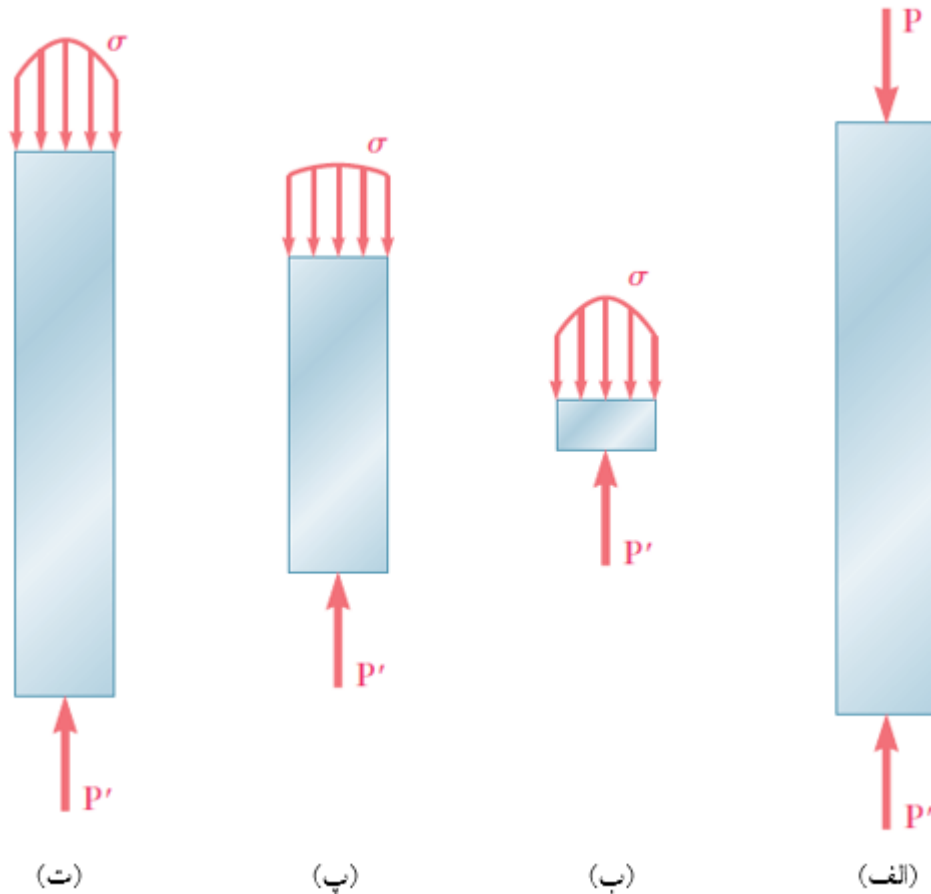
برای تعریف تنش در یک نقطه معین از مقطع عرضی، باید مساحت کوچک (جزء دیفرانسیل مساحت)  $\Delta A$  را در نظر گرفته و از تقسیم مقدار نیروی اعمالی روی این سطح کوچک  $\Delta F$  مقدار متوسط تنش را روی این سطح کوچک بدست آوریم. با استفاده از مفهوم حد در ریاضیات، با میل دادن  $\Delta A$  به سمت صفر، تنش در نقطه مورد نظر بدست می‌آید:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$



شکل 6: تنش در یک نقطه مقطع عرضی

به طور کلی، مقدار تنش در یک نقطه معین از یک مقطع عرضی با مقدار تنش متوسط مقطع متفاوت است و در هر مقطع تغییر می‌کند. برای روشن شدن موضوع به شکل زیر توجه کنید.



شکل 7: توزیع تنش نرمال ناشی از نیروی محوری

شکل (الف) میله باریکی است که تحت بارهای متمرکز مساوی قرار دارد. در شکل (پ) مشاهده می‌کنید که میزان تغییرات تنش در مقاطع دور از نقاط اثر بارهای متمرکز کوچک است. ولی در مقاطع نزدیک این نقاط میزان تغییرات قابل توجه می‌باشد. (شکل‌های ب و ت)

مقدار برآیند نیروهای داخلی در مقاطع اشکال بالا که تحت تنش نرمال هستند را از رابطه زیر می‌توانیم بدست آوریم:

$$\int dF = \int_A \sigma dA$$

برای درک بیشتر از مفاهیم تعادل استاتیکی استفاده می‌کنیم.

در شکل بالا اگر میله را از یک مقطع برش بزنیم و از رابطه بالا استفاده کنیم و تعادل آن را بررسی نماییم، خواهیم داشت:

$$P = P' = \int dF = \int_A \sigma dA$$

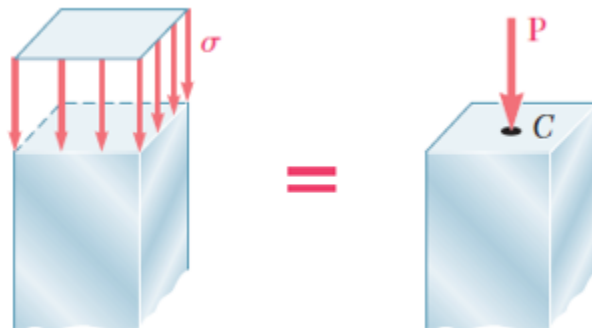
به عبارتی حجم زیر هریک از توزیع‌های تنش در هر مقطعی از میله، با مقدار نیروی خارجی اعمالی  $P$  برابر خواهد بود.

برای تعیین دقیق توزیع واقعی تنش در مقطع نیازمند دانستن اطلاعاتی از تغییر شکل‌های ناشی از اعمال بار هستیم و به عبارتی با یک مساله نامعین استاتیکی روبرو هستیم که در جلسات آینده مفصل در خصوص آن صحبت خواهیم کرد.

در عمل فرض می‌کنیم که توزیع تنش‌های قائم در عضوی که به طور محوری بارگذاری شده است به جز در مجاورت نقاط اثر بارها، یکنواخت می‌باشد. لذا مقدار تنش در هر نقطه  $\sigma$  با مقدار متوسط تنش  $\sigma_{ave}$  برابر است و از تقسیم نیرو بر مساحت مقطع بدست می‌آید.

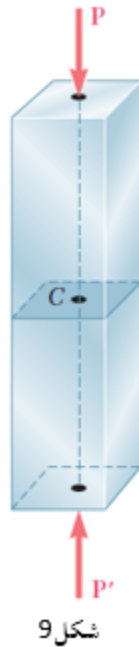
حال سوال جالب و مهم این است که اگر توزیع تنش نرمال تحت نیروی محوری را یکنواخت فرض کنیم، محل اثر نیروی برآیند این تنش که مقدار آن را قبلاً محاسبه کردیم، کجا خواهد بود؟

با توجه به شکل زیر و آنچه از استاتیک به یاد داریم، اگر توزیع تنش در مقطع یکنواخت باشد، برآیند  $P$  نیروهای داخلی در مرکزوار مقطع عرضی وارد می‌شود.



شکل 8: محل اثر نیروی برآیند متجه از تنش نرمال

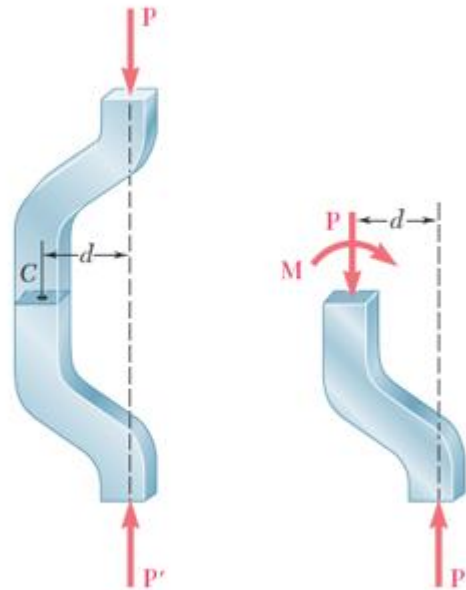
به عبارتی، توزیع تنش یکنواخت تنش فقط وقتی امکان پذیر است که خط اثر بارهای متمرکز خارجی  $P, P'$  از مرکزوار مقطع عرضی تحت بررسی بگذرد. این نوع بارگذاری را بارگذاری مرکزی می گویند و فرض می شود که در تمام عضوهای دو نیرویی مستقیم که در خرابها و سازه های مفصلی وجود دارند، روی می دهد.



شکل 9

ممکن است پیرسید که اگر یک عضو دنیرویی به طور محوری بارگذاری شود و بار دارای خروج از مرکز باشد، چه تاثیری روی تنش خواهد داشت؟

برای جواب دادن به این سوال به شکل زیر توجه کنید.



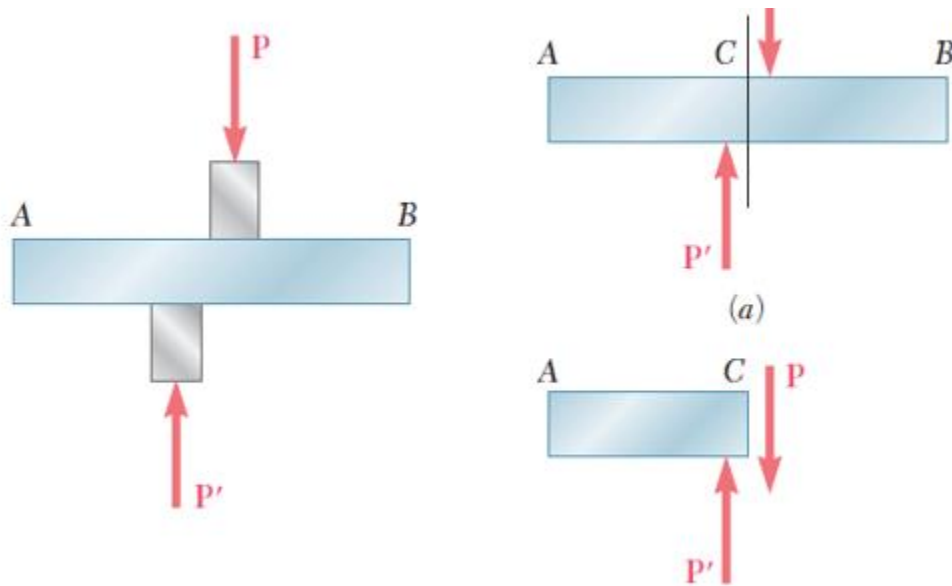
شکل 10: نیروی محوری خارج از مرکز

در شکل بالا مقطعی دلخواه را در نظر گرفتیم. از استاتیک می‌دانیم که برای تعادل قطعه جدا شده در این حالت، لازم است نیروهای داخلی شامل (معادل) نیروی محوری  $P$  که در مرکزوار مقطع وارد می‌شود و کوپل  $M$  با لنگر  $M = P \times d$  باشد. در این حالت توزیع تنش‌ها دیگر یکنواخت و متقارن نمی‌باشد.



تعریف تنش برشی را با بررسی یک مثال ساده شروع می‌کنیم. در شکل زیر مقطعی در  $C$  زده و تعادل بخش جدا شده را بررسی می‌کنیم.





شکل 11

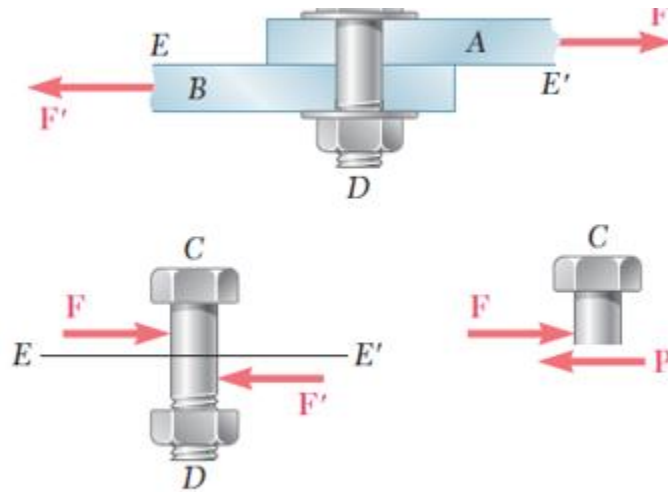
از تعادل بخش جدا شده نتیجه می شود که در صفحه مقطع عرضی، نیروهای داخلی وجود دارد که برآیند آنها برابر  $P$  است. این نیروهای داخلی مماس بر مقطع عرضی می باشند. این نیروهای جزئی داخلی را نیروهای برشی و برآیند آنها را برش در آن مقطع می نامیم.

از تقسیم برش  $P$  بر مساحت مقطع عرضی  $A$ ، تنش برشی متوسط بدست می آید:

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A}$$

برخلاف آنچه که برای تنش نرمال گفتیم، توزیع تنش های برشی در عرض مقطع را نمی توان یکنواخت فرض کرد. فعلا بدانید که مقدار واقعی تنش برشی از صفر در سطح عضو تا مقدار ماکزیمم  $\tau_{max}$  که می تواند بزرگتر از مقدار متوسط  $\tau_{ave}$  باشد، تغییر کند. مفصل در جلسات آینده در این مورد صحبت خواهیم کرد.

تنش های برشی معمولا در پیچ و مهره ها، مفصل ها و پرچ ها روی می دهد. برای درک بیشتر، چند مثال رو با هم بررسی می کنیم.

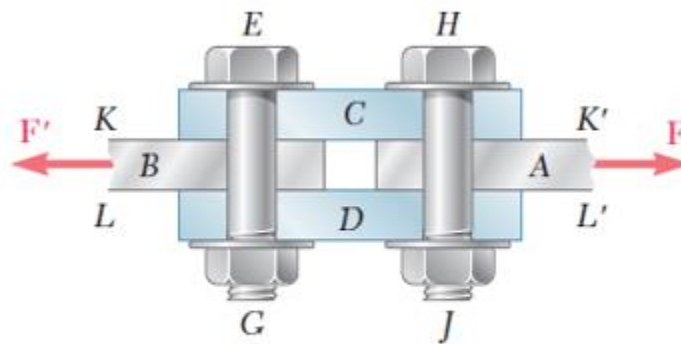


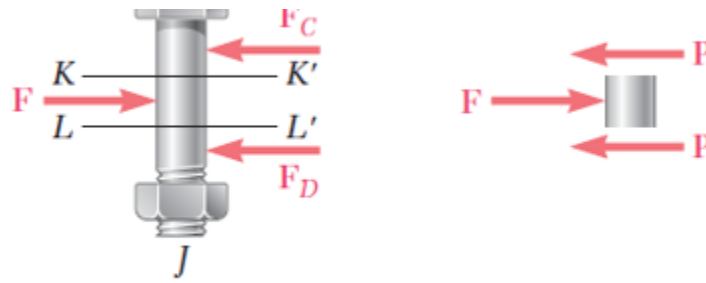
شکل 12

در شکل بالا دو صفحه با پیچ و مهره به هم متصل شده‌اند. این صفحات تحت نیروهای کششی  $F$  قرار گرفته‌اند. در صفحه  $EE'$  مقطعی زده و با بررسی تعادل بخش جدا شده نتیجه می‌شود که برش  $P$  در این مقطع با نیروی خارجی  $F$  برابر است. تنش برشی متوسط در این مقطع به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A}$$

مثال دیگر برای بررسی برش در اتصالات پیچ و مهره ای به صورت زیر است.





شکل 13

با توجه به نمودار جسم آزاد ترسیم شده پیچ و مهره در شکل بالا، مقدار تنش برشی متوسط به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A}$$

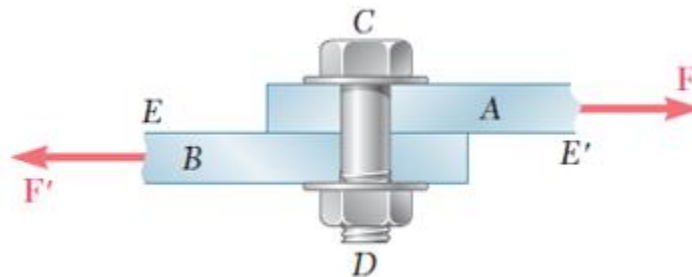
در این حالت، به اصطلاح گفته می‌شود که پیچ و مهره تحت برش دوگانه قرار دارد.

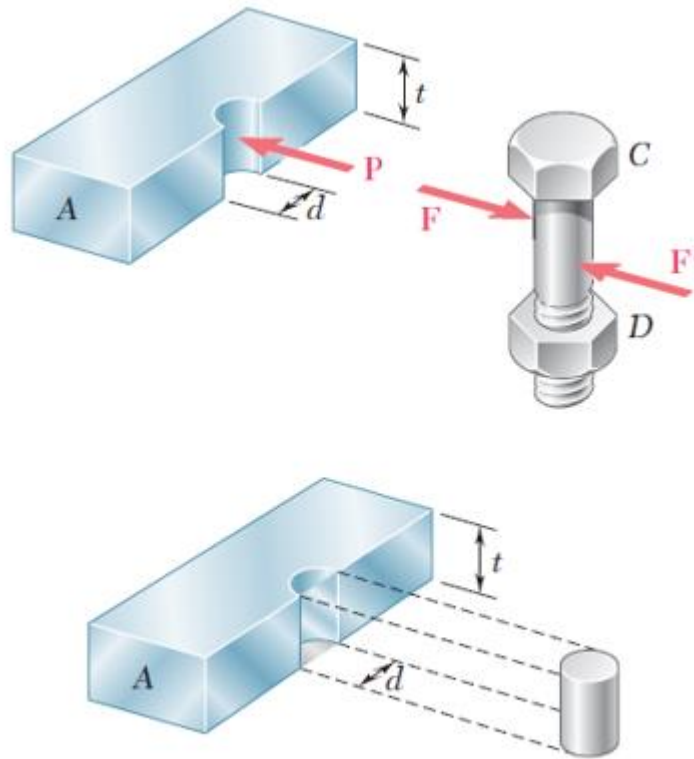
۲-۵

### تنش تکیه‌گاهی (لهیدگی) در اتصالات



پیچ و مهره، مفصل‌ها و پرچ‌ها، تنش‌هایی را در امتداد سطح تماس عضوهای متصل بوجود می‌آورند. شکل زیر را در نظر بگیرید.





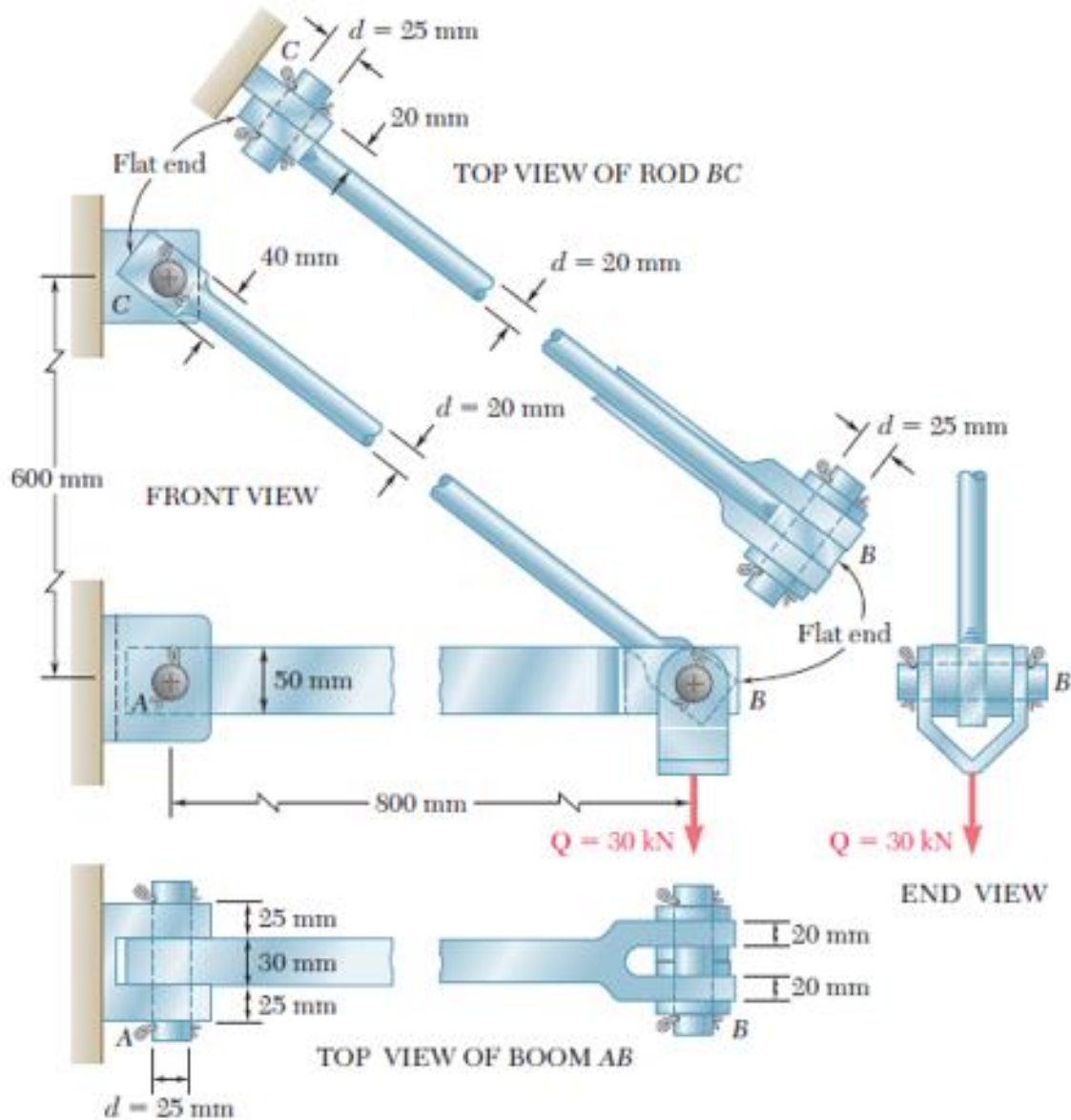
شکل 14

در شکل بالا، پیچ و مهره، نیروی  $P$  را بر صفحه  $A$  وارد می‌کند که برابر و در خلاف جهت نیروی  $F$  وارده از صفحه بر پیچ و مهره می‌باشد. نیروی  $P$  برآیند نیروهای جزئی توزیع شده روی سطح داخلی نیم‌استوانه‌ای به قطر  $d$  و به طول  $t$  (ضخامت صفحه) است.

توزیع این نیروها و توزیع تنش‌های متناظر کاملاً پیچیده است، لذا در عمل از مقدار متوسط تنش که آن را تنش تکیه‌گاهی  $\sigma_b$  می‌گویند، استفاده می‌شود. این تنش از تقسیم بار  $P$  بر مساحت مستطیلی تصویر پیچ و مهره روی مقطع صفحه بدست می‌آید، لذا داریم:

$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{td}$$

در این بخش برای جمع بندی، مثال حل شده جلسه قبل را با جزئیات بیشتری بررسی خواهیم کرد. شکل زیر که همان مثال جلسه قبل با جزئیات است، را در نظر بگیرید.



شکل 15



در ادامه تنش در بخش‌های مختلف سازه را بدست می‌آوریم.

الف: تنش قائم در بازوی  $AB$  و میله  $BC$

الف-1: بخش دایره‌ای میله  $BC$

$$F_{BC} = 50 \text{ kN}$$

$$A = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\sigma_{BC} = +159 \text{ MPa}$$

الف-2: باریک‌ترین قسمت تخت میله  $BC$  که دارای سوراخ است.

$$F_{BC} = 50 \text{ kN}$$

$$A = (20 \text{ mm})(40 \text{ mm} - 25 \text{ mm}) = 300 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$(\sigma_{BC})_{end} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{300 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = +167 \text{ MPa}$$

توجه کنید که مقدار تنش بدست آمده یک مقدار متوسط است. در جلسات بعد خواهیم دید که تنش در نزدیک سوراخ به مقدار خیلی بیشتری می‌رسد.

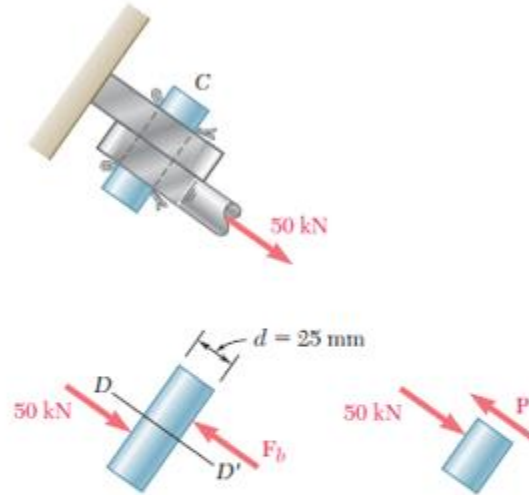
حال سوال جالب این است که به نظر شما این میله از کدام بخش گسیخته می‌شود؟

بدیهی است میله تحت بار افزایشی در نزدیک یکی از سوراخ‌ها گسیخته می‌شود نه در قسمت استوانه‌ای، لذا با افزایش عرض یا ضخامت تخت میله، می‌توان طراحی آن را بهبود داد.

ب: تنش برشی در اتصالات

برای تعیین تنش برشی در اتصالاتی مانند پیچ و مهره، مفصل یا پرچ، ابتدا نیروهای وارده از عضوهای مختلفی را که توسط این اتصالات به هم متصل شده‌اند را نشان می‌دهیم.

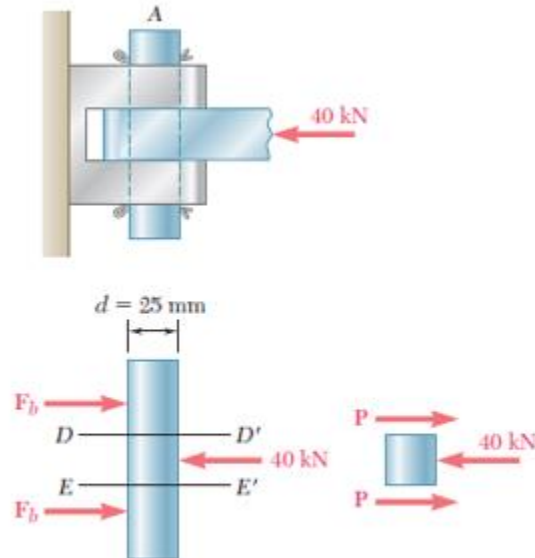
ب-1: مفصل C



$$A = \pi r^2 = \pi \left( \frac{25 \text{ mm}}{2} \right)^2 = \pi (12.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 491 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 102 \text{ MPa}$$

ب-2: مفصل A

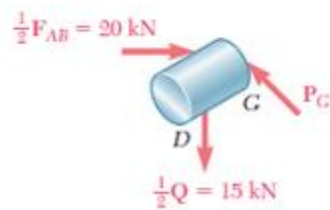
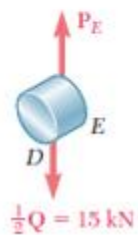
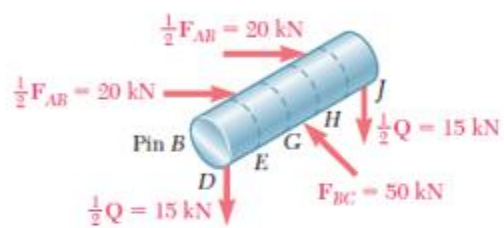




$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{20 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 40.7 \text{ MPa}$$

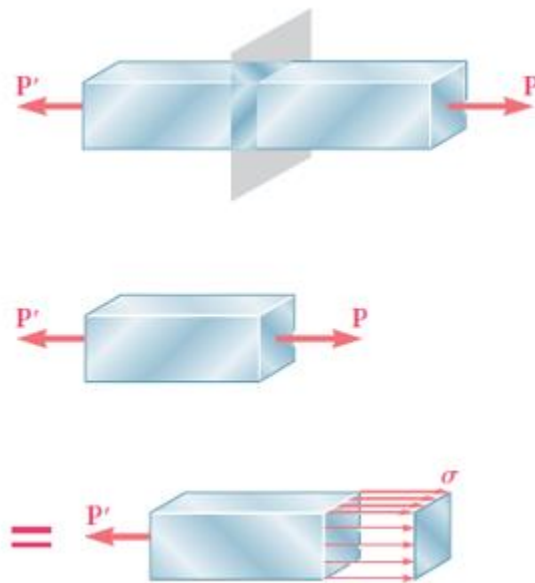
ب-3: مفصل B

$$\tau_{ave} = \frac{P_G}{A} = \frac{25 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 50.9 \text{ MPa}$$

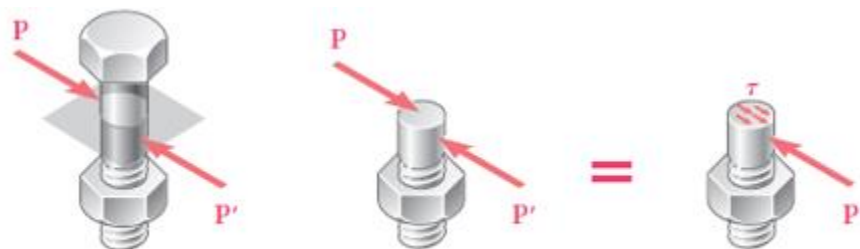




با توجه به شکل زیر و جلسات قبل، دیدیم که وقتی یک عضو دو نیرویی تحت نیروی محوری قرار می‌گیرد، فقط تنش نرمال (قائم) در آن به وجود می‌آید.



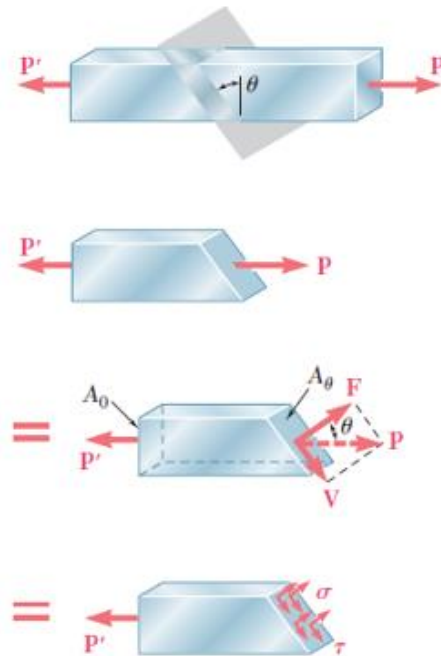
همچنین طبق شکل زیر، دیدیم که نیروهای عرضی وارد بر پیچ و مهره‌ها و مفصل‌ها، فقط تنش برشی در آن اتصالات ایجاد می‌کنند.



در دو مورد گفته شده در بالا، به صفحاتی که تنش در آنها بررسی شده است، دقت کنید. این صفحات نسبت به بار اعمالی خارجی در چه موقعیتی هستند؟

در ادامه خواهیم دید که نیروهای محوری در صفحاتی که بر محور عضو عمود نباشند، تنش‌های قائم و برشی را با هم به وجود می‌آورند. همچنین، نیروهای عرضی وارد بر یک پیچ و مهره نیز در صفحاتی که بر محور پیچ و مهره عمود نباشند، تنش‌های قائم و برشی را با هم ایجاد می‌کنند.

برای روشن شدن موضوع، عضو دو نیرویی زیر را که تحت تاثیر نیروهای محوری قرار دارد در نظر بگیرید. می‌خواهیم تنش را در مقطعی از عضو که با راستای عمود زاویه  $\theta$  می‌سازد، بررسی نماییم.



با بررسی تعادل قطعه جدا شده و استفاده از مفهوم تجزیه نیروها، مقادیر تنش نرمال و برشی در این مقطع به صورت زیر

محاسبه می‌گردد:

$$F = P \cos \theta \quad V = P \sin \theta$$

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} \quad \tau = \frac{V}{A_\theta}$$

از طرفی در خصوص مساحت مقاطع عمود و مایل در این عضو می‌دانیم:

$$A_0 = A_\theta \cos \theta, \text{ or } A_\theta = A_0 / \cos \theta,$$

در نتیجه مقادیر تنش نرمال و برشی برابر خواهد بود با:

$$\sigma = \frac{P \cos \theta}{A_0 / \cos \theta} \quad \tau = \frac{P \sin \theta}{A_0 / \cos \theta}$$

یا

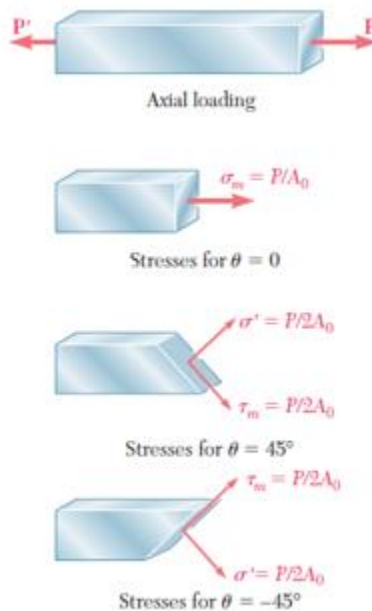
$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad \tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$

از روی شکل مشخص است که  $A_0$  مساحت مقطع در امتداد عمود بر محور عضو است.

از معادلات بالا به وضوح مشخص است که با تغییر زاویه مقطع، مقادیر تنش برشی و نرمال تغییر خواهد کرد. به نظرتون مقادیر

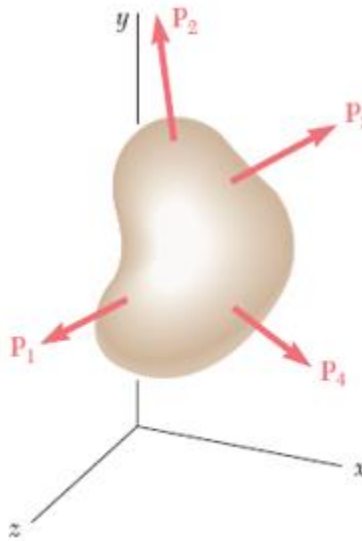
حداکثر تنش نرمال و برشی در چه زاویه‌ای است؟

در شکل زیر مقادیر تنش نرمال و برشی در صفحات مختلف نشان داده شده است.

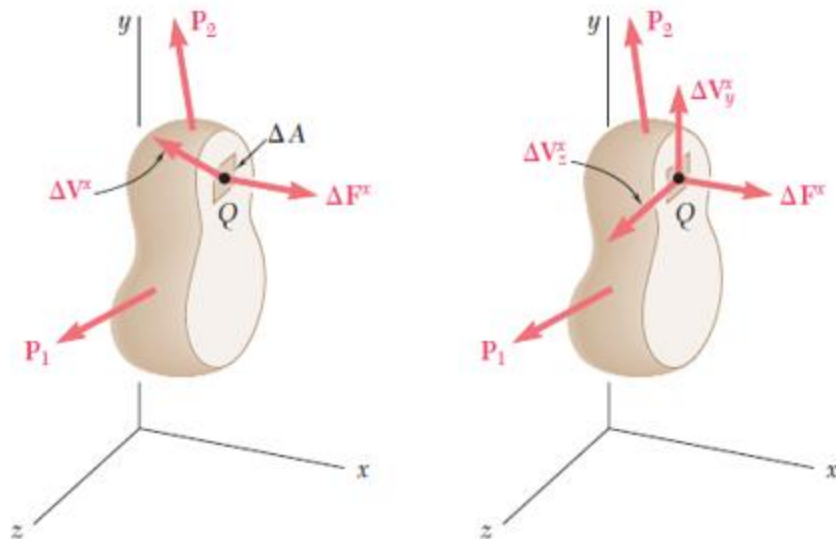




عضوهایی که تا الان تنش آنها را بررسی کردیم، عضوهای دونیرویی تحت بارگذاری محوری و اتصالات تحت بارگذاری عرضی قرار داشتند. ولی اغلب اعضای سازه‌ها تحت شرایط بارگذاری پیچیده‌تری هستند. در ادامه مولفه‌های تنش تحت شرایط کلی بارگذاری بررسی خواهد شد. جسم فرضی به صورت شکل زیر را در نظر بگیرید که تحت بارگذاری کلی  $P_1, P_2, \dots$  قرار دارد.



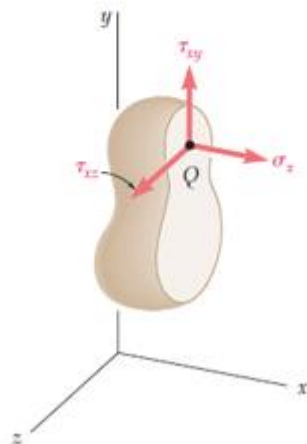
برای بررسی تنش حاصل از این بارگذاری در نقطه  $Q$  از جسم، ابتدا این جسم را توسط صفحه‌ای به موازات صفحه  $yz$  در نقطه  $Q$  مقطع می‌زنیم. قسمتی از جسم در سمت چپ این مقطع تحت تاثیر چند نیروی خارجی، و نیروهای قائم و برشی توزیعی داخلی قرار دارد. نیروهای قائم و برشی را که در مساحت کوچک  $\Delta A$  پیرامون نقطه  $Q$  اثر می‌کنند، به ترتیب با  $\Delta F^x$  و  $\Delta V^x$  نشان می‌دهیم. توجه کنید که برای نشان دادن این نیروها، چون بر یک سطح عمود بر محور  $x$  اثر می‌کنند، از اندیس  $x$  استفاده می‌شود. توجه کنید که جهت نیروی قائم  $\Delta F^x$  کاملاً مشخص است در حالی که نیروی برشی  $\Delta V^x$  می‌تواند هر جهتی را در صفحه مقطع داشته باشد. لذا  $\Delta V^x$  را به دو مولفه  $\Delta V_y^x$  و  $\Delta V_z^x$  در جهت‌های موازی با محورهای  $y$  و  $z$  تجزیه می‌کنیم.



برای بدست آوردن تنش در این نقطه کافی است مقادیر نیروها را بر مساحت کوچک  $\Delta A$  تقسیم و این مساحت را به سمت صفر میل دهیم. با اینکار سه مولفه تنش به دست می آید که در شکل زیر نشان داده شده است.

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}$$

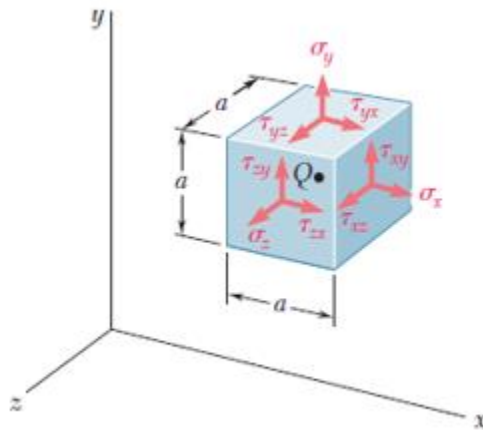
$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A}$$



در مولفه های تنش بالا، اندیس اول نشان دهنده این است که تنش های تحت بررسی بر سطح عمود بر محور  $x$  اثر می کنند و اندیس دوم جهت مولفه تنش را نشان می دهد.

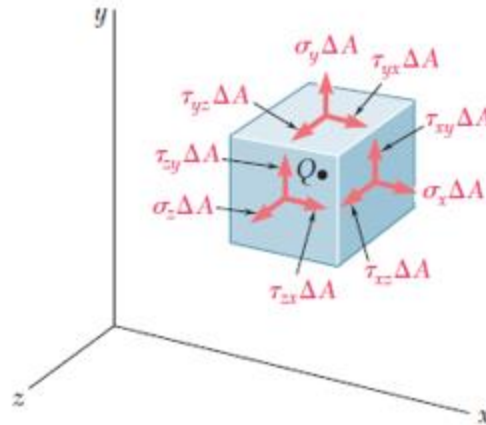
در نقطه  $Q$  می توانستیم صفحات دیگری نیز عبور دهیم و همین روند را تکرار کنیم. با عبور یک مقطع از  $Q$  به موازات صفحه  $z,x$ ، مولفه های تنش  $\sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{yx}$  را مشخص می کنیم. همچنین با عبور یک مقطع از  $Q$  به موازات صفحه  $xy$ ، مولفه های تنش  $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$  را به دست می آوریم.

برای سهولت تجسم حالت تنش در نقطه  $Q$ ، مطابق شکل زیر، مکعب کوچکی به ضلع  $a$  با مرکز  $Q$  و تنش های وارد بر شش وجه مکعب را در نظر می گیریم.



دقت کنید که در شکل بالا، فقط تنش های وارد بر سه وجه مکعب نشان داده شده است. بر وجوه دیگر نیز تنش های مساوی و مخالف با تنش های نشان داده شده اثر می کنند. توجه کنید که تنش های وارد بر وجوه مکعب با تنش های موجود در نقطه  $Q$  کمی تفاوت دارند، ولی خطای موجود کم است و وقتی ضلع  $a$  مکعب به سمت صفر میل می کند، این خطا از بین می رود.

حال با بررسی تعادل این مکعب، رابطه بین مولفه های تنش برشی را بدست می آوریم. ابتدا نمودار جسم آزاد مکعب را ترسیم می کنیم. و 6 معادله تعادل لازم را بررسی می کنیم.



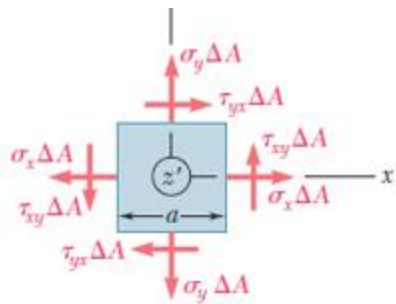
ابتدا سه معادله تعادل نیرویی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$$

با توجه به اینکه در بخش قبل دیدیم، نیروهای مساوی و مخالف با نیروهای نشان داده شده در دیاگرام جسم آزاد، در وجوه روبرو اثر می‌کنند، لذا بدیهی است این سه معادله برقرار می‌باشد.

$$\Sigma M_{x'} = 0 \quad \Sigma M_{y'} = 0 \quad \Sigma M_{z'} = 0$$

با در نظر گرفتن تصویر روی صفحه  $x'y'$  مطابق شکل زیر، دیده می‌شود فقط لنگر نیروهای برشی نسبت به محور  $z$  غیرصفرند و این نیروها دو کوپل را تشکیل می‌دهند. لذا داریم:



$$+\sum M_z = 0: \quad (\tau_{xy} \Delta A)a - (\tau_{yx} \Delta A)a = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

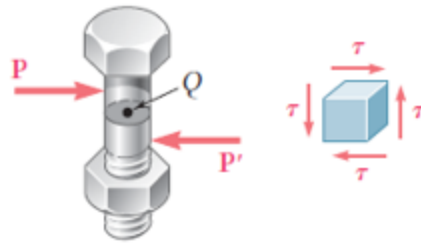
$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

نهایتاً از آنچه تا الان گفته شد، نتیجه می شود که برای تعریف حالت تنش در یک نقطه، به جای نه مولفه تنش، فقط شش مولفه تنش مورد نیاز است. این شش مولفه عبارتند از:

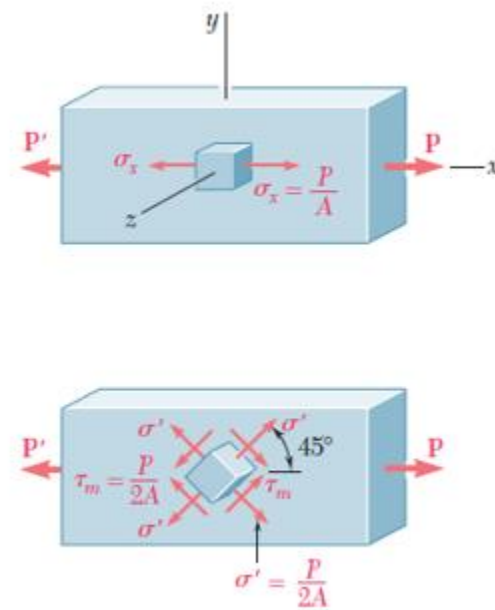
$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}$$

همچنین، در یک نقطه، برش نمی تواند فقط در یک صفحه روی دهد، بلکه یک تنش برشی مساوی با آن بر صفحه دیگری که بر صفحه اول عمود است وارد می شود. در مثال پیچ و مهره مطابق شکل این نکته دیده می شود.





برای جمع‌بندی و درک بیشتر این بخش، عضو تحت نیروی محوری را که قبلاً بررسی کردیم، دوباره از این منظر مورد بحث قرار می‌دهیم.



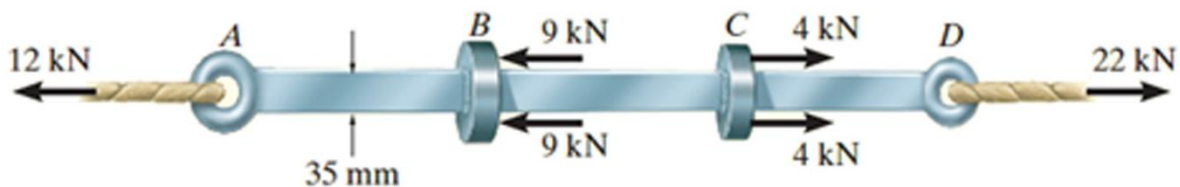
به عنوان تمرین کلاسی و آشنایی با روند جست و جو در بین منابع علمی، در کانال درسی با مشارکت شما دانشجویان مورد بحث قرار گرفته و جمع‌بندی شد.

## مثال‌های حل شده سری ۱

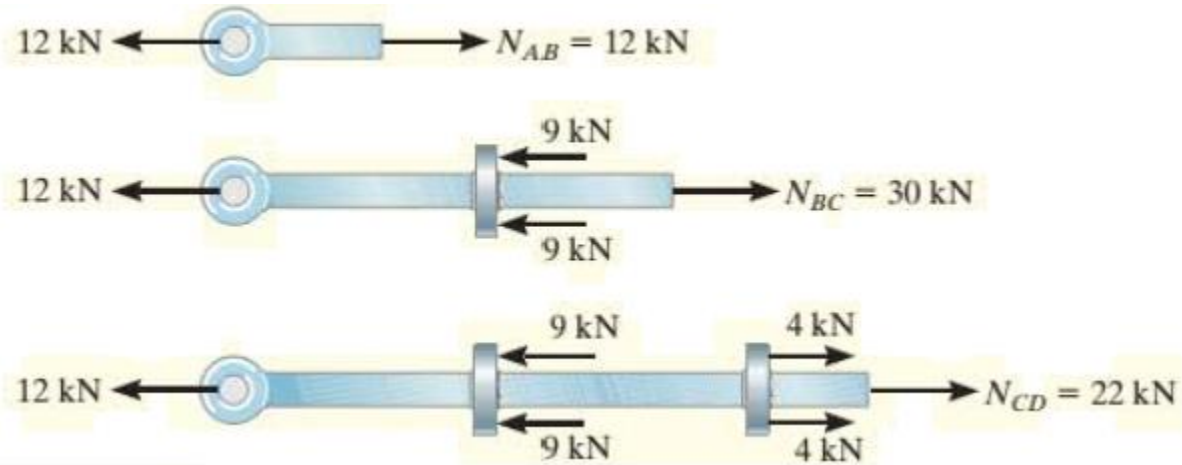
هدف: در این مثال با محاسبه تنش نرمال متوسط تحت بارگذاری محوری آشنا خواهیم شد.

میله شکل مقابل دارای عرض ثابت ۳۵ میلی‌متر و ضخامت ۱۰ میلی‌متر می‌باشد. حداکثر تنش نرمال متوسط تحت بارگذاری نشان داده شده، محاسبه کنید.

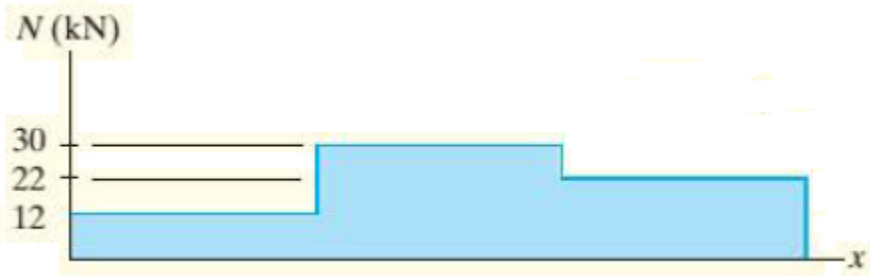
The bar has a constant width of 35 mm and a thickness of 10 mm. Determine the maximum average normal stress in the bar when it is subjected to the loading shown.



برای حل مساله، لازم است مقدار نیروی محوری را در مقاطع مختلف میله بدست آوریم. به عبارتی نمودار نیروی محوری میله را ترسیم کنیم. برای این منظور در بخش های مختلف میله، مقطع زده و با استفاده از اصل تعادل، مقدار نیروی محوری را بدست می آوریم.

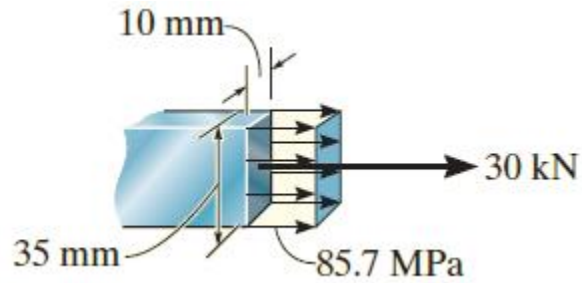


با استفاده از مقاطع بالا، نمودار نیروی محوری میله به صورت زیر می باشد:



با توجه به اینکه مقطع میله ثابت می باشد، حداکثر تنش نرمال در بخشی از میله رخ می دهد که نیروی محوری حداکثر باشد. حداکثر نیروی محوری میله در بخش BC و برابر 30 کیلونیوتن می باشد. لذا حداکثر تنش نرمال برابر است با :

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{30(10^3) \text{ N}}{(0.035 \text{ m})(0.010 \text{ m})} = 85.7 \text{ MPa}$$



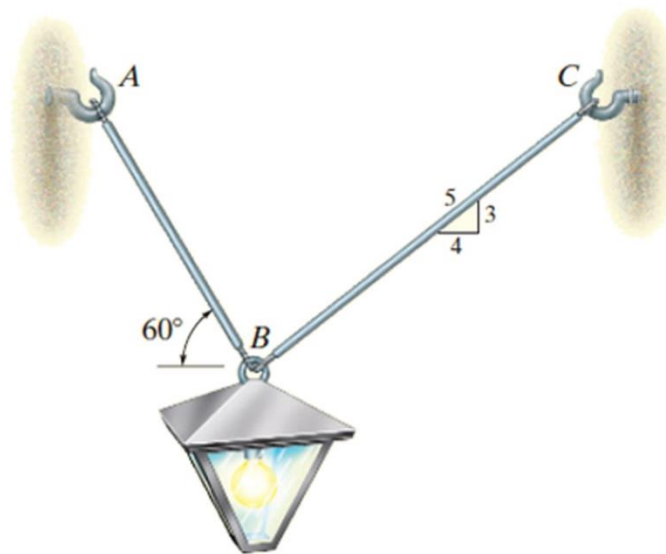
## مثال‌های حل شده سری ۱

۲

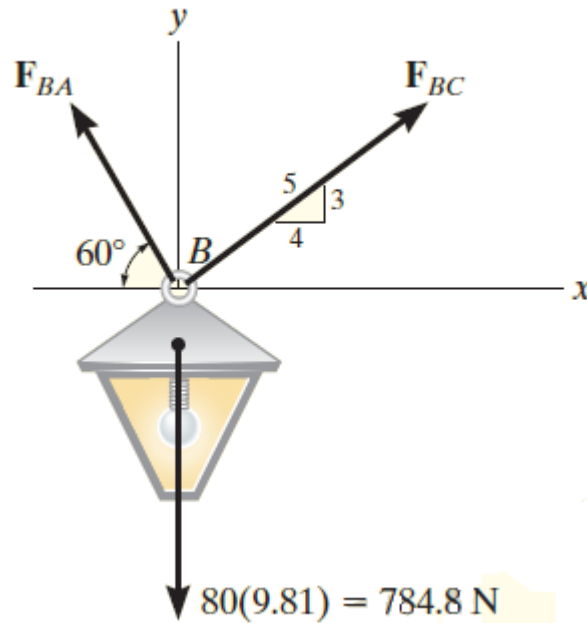
هدف: در این مثال با محاسبه تنش نرمال متوسط تحت بارگذاری محوری در یک سازه نگهدارنده آشنا خواهیم شد.

لامپ ۸۰ کیلوگرمی توسط دو میله به صورت شکل مقابل نگهداری شده است. اگر قطر میله AB و BC به ترتیب برابر ۱۰ و ۸ میلیمتر باشد، تنش نرمال متوسط در هر میله را محاسبه نمایید.

The 80-kg lamp is supported by two rods AB and BC as shown in figure. If AB has a diameter of 10 mm and BC has a diameter of 8 mm, determine the average normal stress in each rod.



برای بدست آوردن تنش نرمال، ابتدا لازم است نیروی محوری در هر یک از میله‌ها را بدست آوریم. برای این کار ابتدا دیاگرام جسم آزاد لامپ را مطابق شکل زیر ترسیم می‌کنیم:



حال با بررسی تعادل داریم:

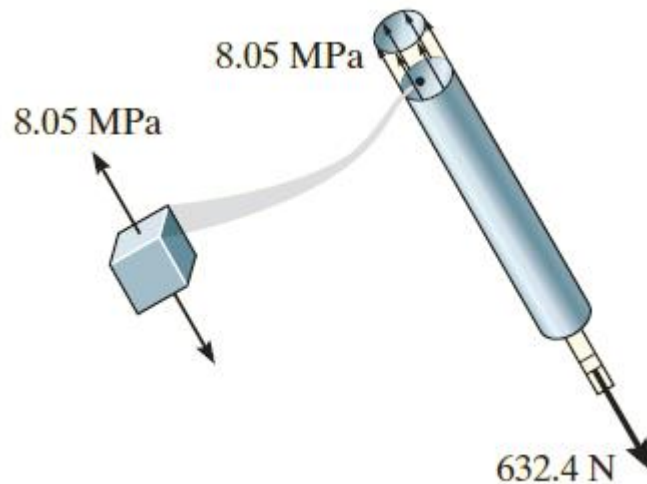
$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; & \quad F_{BC} \left(\frac{4}{5}\right) - F_{BA} \cos 60^\circ = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad F_{BC} \left(\frac{3}{5}\right) + F_{BA} \sin 60^\circ - 784.8 \text{ N} = 0 \\ & \quad F_{BC} = 395.2 \text{ N}, \quad F_{BA} = 632.4 \text{ N} \end{aligned}$$

از استاتیک به یاد داریم که طبق قانون سوم نیوتن (عمل و عکس العمل) نیروهای میله، هم اندازه و خلاف جهت نیروهای بدست آمده در بالا می‌باشد.  
حال می‌توانیم تنش در میله‌ها را محاسبه نماییم:

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{395.2 \text{ N}}{\pi(0.004 \text{ m})^2} = 7.86 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BA} = \frac{F_{BA}}{A_{BA}} = \frac{632.4 \text{ N}}{\pi(0.005 \text{ m})^2} = 8.05 \text{ MPa}$$

برای فهم بیشتر تنش در میله AB در شکل زیر نشان داده شده است.



به همان تنش در یک نقطه از مقطع میله دقت کنید.

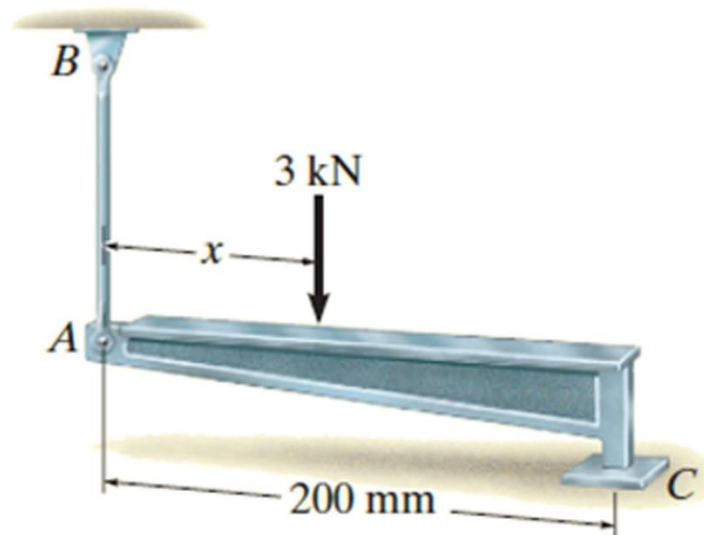
## مثال‌های حل شده سری ۱

۳

هدف: در این مثال با محاسبه تنش نرمال متوسط تحت بارگذاری دلخواه در یک سازه آشنا خواهیم شد

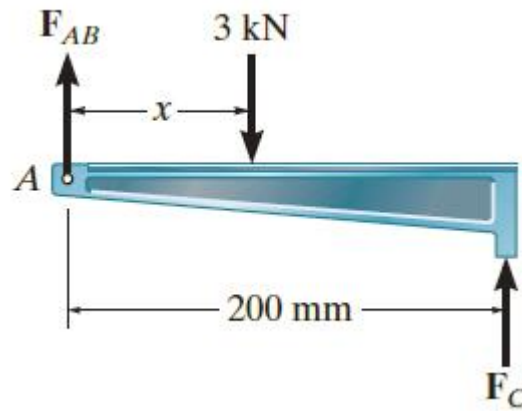
عضو AC نشان داده شده در شکل تحت بار قائم ۳ کیلونیوتن قرار دارد. موقعیت محل اثر نیرو (x) را به گونه‌ای تعیین کنید که تنش فشاری متوسط در تکیه‌گاه C برابر با تنش کششی متوسط در میله AB باشد. سطح مقطع میله برابر ۴۰۰ میلی‌متر مربع و مساحت تکیه‌گاه C برابر ۶۵۰ میلی‌متر مربع می باشد.

Member AC shown in figure is subjected to a vertical force of 3 kN. Determine the position x of this force so that the average compressive stress at the smooth support C is equal to the average tensile stress in the tie rod AB. The rod has a cross-sectional area of 400 mm<sup>2</sup> and the contact area at C is 650 mm<sup>2</sup>.





برای حل مساله، ابتدا دیاگرام جسم آزاد عضو AC را ترسیم می‌کنیم.



حال تعادل عضو را بررسی می‌کنیم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$\zeta + \sum M_A = 0;$$

$$F_{AB} + F_C - 3000 \text{ N} = 0$$

$$-3000 \text{ N}(x) + F_C(200 \text{ mm}) = 0$$

از طرفی با محاسبه تنش و شرط برابری تنش‌ها داریم:

$$\sigma = \frac{F_{AB}}{400 \text{ mm}^2} = \frac{F_C}{650 \text{ mm}^2}$$

$$F_C = 1.625 F_{AB}$$

با جایگذاری رابطه فوق در معادلات بدست آمده از تعادل عضو، مقدار نیروهای موردنظر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$F_{AB} = 1143 \text{ N}$$

$$F_C = 1857 \text{ N}$$

حال مقدار  $x$  به صورت زیر بدست می آید:

$$x = 124 \text{ mm}$$

به عنوان یک نکته تو ذهنتون باشه که همیشه جواب های بدست آمده را کنترل کنید که با ماهیت و فیزیک مساله همخوانی داشته باشد. مثلا در این مثال مقدار  $x$  باید بین 0 تا 200 میلیمتر باشد که جواب بدست آمده در این محدوده قرار دارد.

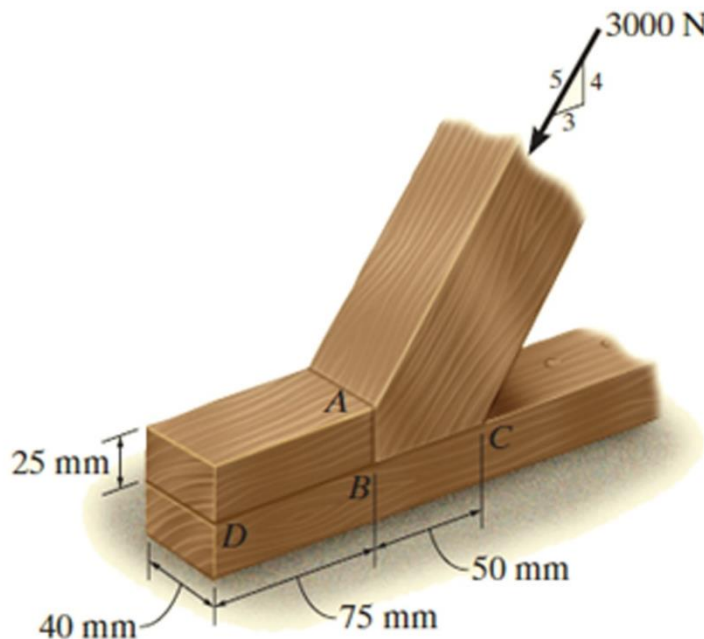
## مثال‌های حل شده سری ۱

۴

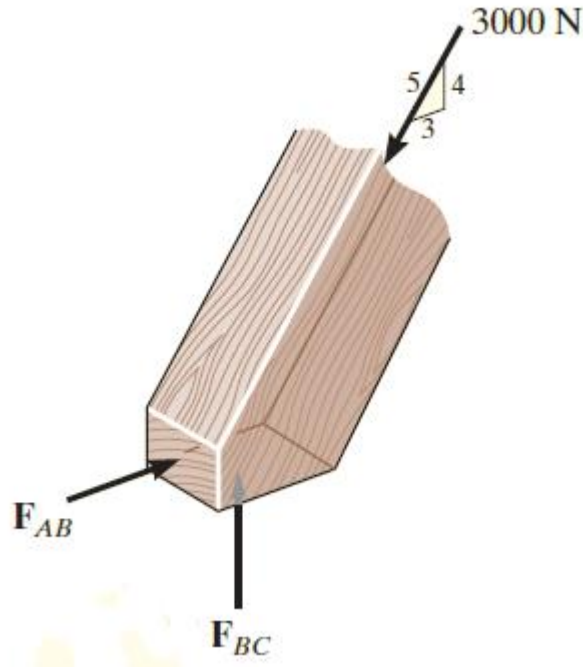
هدف: در این مثال با محاسبه تنش برشی متوسط تحت بارگذاری دلخواه در یک سازه آشنا خواهیم شد.

عضو نشان داده شده در شکل تحت بار فشاری ۳۰۰۰ نیوتن قرار دارد. تنش فشاری متوسط را در سطوح صاف AB و BC و تنش برشی متوسط را در صفحه DB محاسبه نمایید.

The inclined member in figure is subjected to a compressive force of 3000 N. Determine the average compressive stress along the smooth areas of contact defined by AB and BC, and average shear stress along the horizontal plane defined by DB.



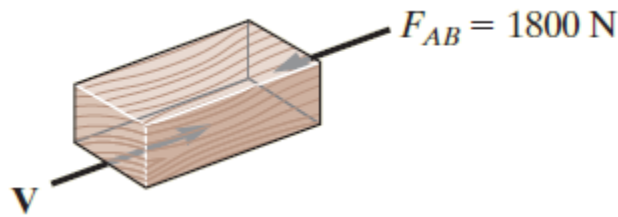
ابتدا دیاگرام جسم ازاد عضو مایل را به صورت زیر ترسیم می‌کنیم:



با بررسی تعادل جسم داریم:

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; & \quad F_{AB} - (3000 \text{ N})\left(\frac{3}{5}\right) = 0 & \quad F_{AB} = 1800 \text{ N} \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad F_{BC} - (3000 \text{ N})\left(\frac{4}{5}\right) = 0 & \quad F_{BC} = 2400 \text{ N} \end{aligned}$$

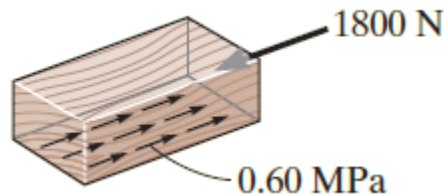
با بررسی تعادل بخش بالایی ABD و ترسیم دیاگرام جسم آزاد به صورت شکل زیر، مقدار نیروی برش در صفحه BD و تنش برشی متوسط متناظر بدست می‌آید.



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0;$$

$$V = 1800 \text{ N}$$

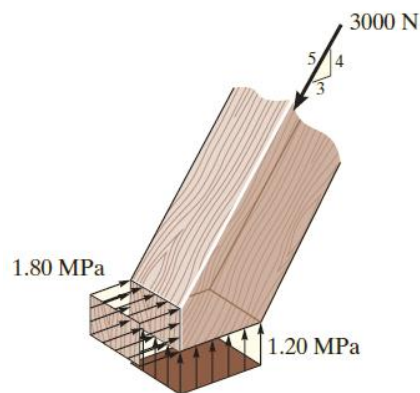
$$\tau_{\text{avg}} = \frac{1800 \text{ N}}{(0.075 \text{ m})(0.04 \text{ m})} = 0.600(10^6) \text{ N/m}^2 = 0.600 \text{ MPa}$$



تنش فشاری متوسط در سطوح صاف AB و BC به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} = \frac{1800 \text{ N}}{(0.025 \text{ m})(0.04 \text{ m})} = 1.80(10^6) \text{ N/m}^2 = 1.80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{2400 \text{ N}}{(0.05 \text{ m})(0.04 \text{ m})} = 1.20(10^6) \text{ N/m}^2 = 1.20 \text{ MPa}$$

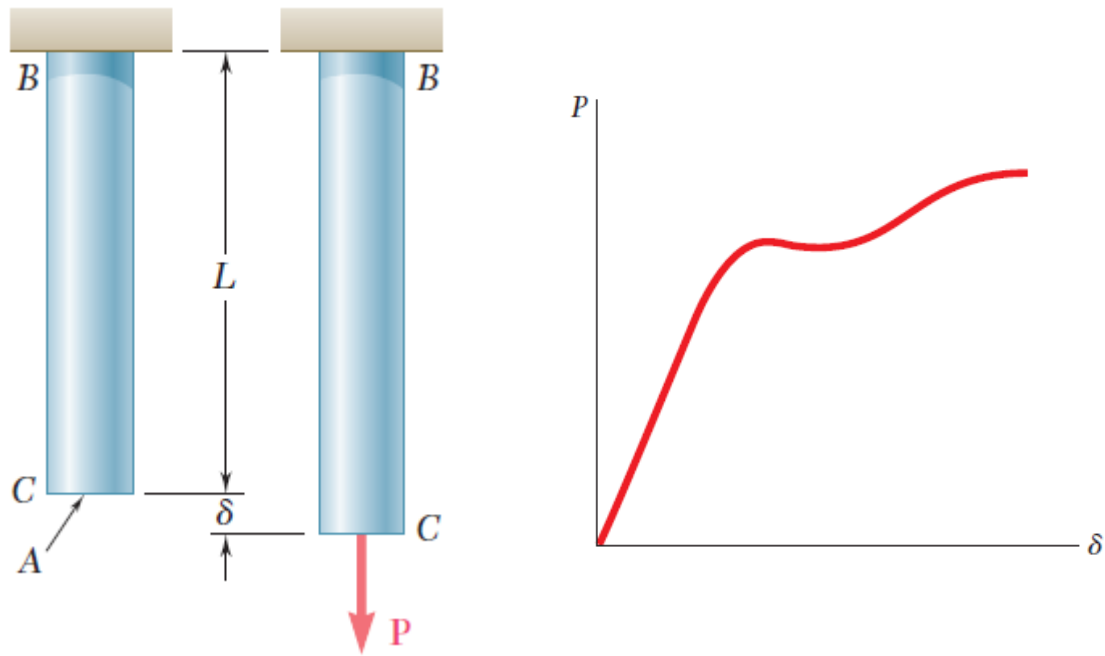




در بخش قبلی با مفهوم تنش و طراحی عضوها و اتصالات به گونه‌ای که تحت شرایط خاص بارگذاری گسیخته نشوند، آشنا شدیم. جنبه دیگر تحلیل و طراحی سازه‌ها مربوط می‌شود به تغییر شکل‌هایی که توسط نیروهای وارده ایجاد می‌شوند. بدیهی است که باید از تغییرشکل‌های بزرگ جلوگیری شود تا سازه بتواند هدف‌های طراحی را برآورده کند. تحلیل تغییرشکل‌ها در تعیین تنش‌ها نیز کمک می‌کند. در حقیقت، همیشه نمی‌توان نیروهای موجود در عضوهای یک سازه را فقط با کاربرد اصول استاتیک تعیین کرد، زیرا در استاتیک فرض می‌شود که سازه‌ها صلب و تغییر شکل ناپذیرند. با در نظر گرفتن سازه‌های مهندسی به عنوان سازه‌های تغییرشکل‌پذیر و با تحلیل تغییرشکل‌های عضوهای مختلف آنها، می‌توان نیروهای نامعین استاتیکی، یعنی نیروهایی را که با استاتیک نمی‌توان تعیین کرد، بدست آورد. همچنین، در جلسات قبل نشان دادیم که توزیع تنش‌ها در یک عضو از نظر استاتیکی نامعین است، حتی اگر نیرو در آن عضو معلوم باشد. لذا، برای تعیین توزیع واقعی تنش‌ها در یک عضو، باید تغییر شکل‌های آن عضو را تحلیل کرد. در این بخش، تغییرشکل‌های اعضای سازه‌ای تحت بارگذاری محوری مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین با مفاهیم کرنش، رابطه تنش-کرنش، قانون هوک، ضریب پواسون و ... آشنا خواهیم شد.

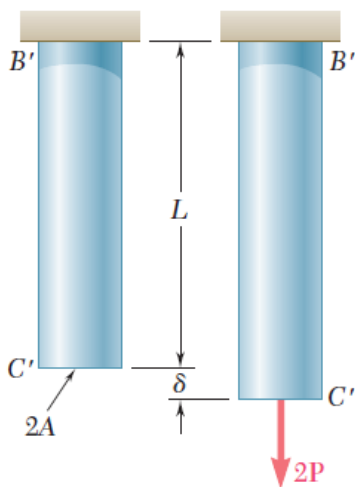


برای تعریف کرنش از یک مثال ساده کمک می‌گیریم. میله‌ای به طول  $L$  و با مساحت مقطع عرضی یکنواخت  $A$  را در نظر بگیرید که از نقطه‌ای آویزان است. با اعمال بار  $P$  بر انتهای میله، میله افزایش طول می‌دهد. نمودار مقدار  $P$  بر حسب تغییر شکل  $\delta$  (نمودار بارگذاری-تغییرشکل) را ترسیم می‌کنیم.



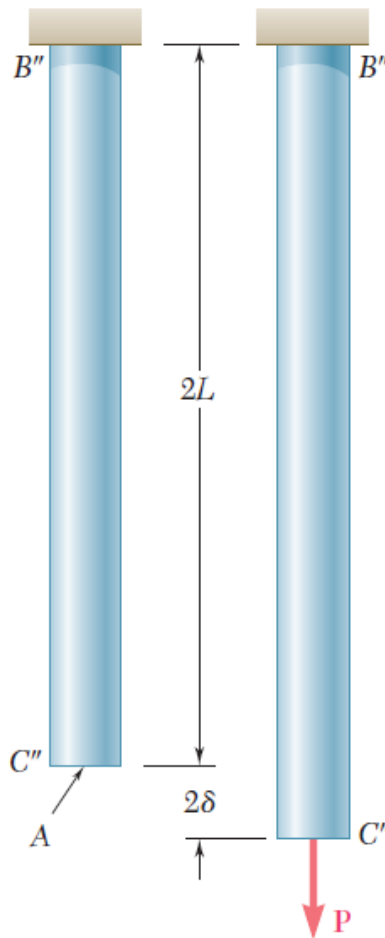
نمودار نیرو-تغییر مکان میله تحت بار محوری

گرچه این نمودار شامل اطلاعات مفیدی برای تحلیل میله تحت بررسی است، ولی از آن نمی‌توان برای پیش‌بینی تغییر شکل یک میله از همان جنس ولی با ابعاد دیگر استفاده کرد. مشاهده می‌شود اگر تغییر شکل  $\delta$  توسط نیروی  $P$  در میله  $BC$  ایجاد شود، بار  $2P$  باعث می‌شود همان تغییر شکل در میله  $B'C'$  به طول  $L$  و با مساحت مقطع عرضی  $2A$ ، به وجود آید.



در هر دو حالت، مقدار تنش یکسان و برابر با  $\sigma = \frac{P}{A}$  است.

حال حالتی را در نظر بگیرید که بار  $P$  بر میله  $B''C''$  با مساحت مقطع عرضی  $A$  و به طول  $2L$  وارد می شود که باعث می شود تغییر شکل  $2\delta$  در این میله به وجود آید. تنش در این حالت نیز برابر  $\sigma = \frac{P}{A}$  می باشد.



به نظر شما در دو حالت علاوه بر تنش، چه کمیت دیگری یکسان است؟



در هر دو حالت، نسبت تغییرشکل به طول میله دارای مقدار یکسان  $\frac{\delta}{L}$  است. با استفاده از این مثال‌ها مفهوم کرنش را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

کرنش قائم در میله تحت بارگذاری محوری، به عنوان تغییر شکل طول واحد آن میله تعریف می‌شود. به عبارتی اگر کرنش قائم را با  $\varepsilon$  نشان دهیم، داریم:

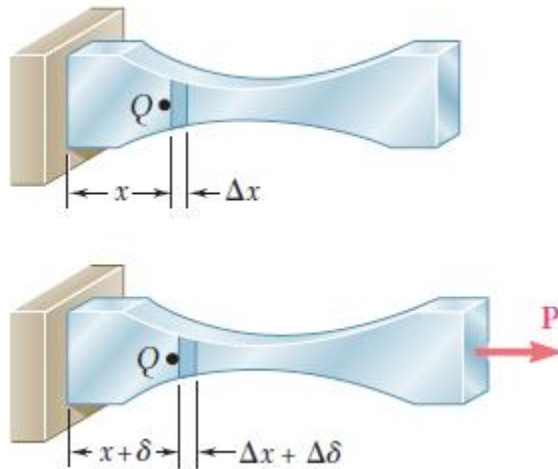
$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

منحنی تنش ( $\sigma = \frac{P}{A}$ ) بر حسب کرنش ( $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ )، مشخصه خواص ماده را نشان می‌دهد و شکل آن به ابعاد نمونه مورد استفاده بستگی ندارد. این منحنی را نمودار تنش-کرنش می‌گویند.

در مثال‌های بالا، میله دارای مساحت مقطع عرضی یکنواخت و ثابت  $A$  می‌باشد، و می‌توان فرض کرد تنش قائم  $\sigma$  در تمام میله دارای مقدار ثابت  $P/A$  است، لذا، کرنش به عنوان نسبت تغییرشکل به طول کل میله تعریف شد.

**حال اگر در یک عضو، مساحت مقطع عرضی متغیر باشد، چه باید کرد؟**

در یک عضو با مساحت مقطع عرضی متغیر، تنش قائم  $\sigma = \frac{P}{A}$  در امتداد عضو تغییر می‌کند و کرنش را باید در نقطه معین تعریف کرد. با توجه به شکل‌های زیر، کرنش قائم در نقطه  $Q$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

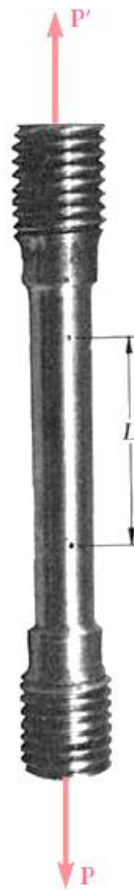


$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

دقت کنید چون تغییر شکل و طول در آحاد یکسان بیان می‌شوند، کرنش یک کمیت بی‌بعد است.

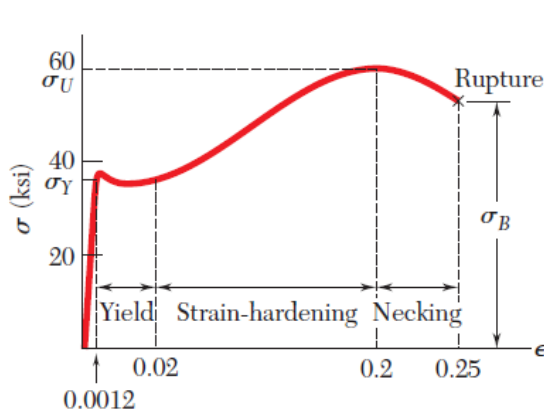


نمودار تنش-کرنش، یکی از مشخصه‌های مهم مواد است. برای تعیین نمودار تنش-کرنش یک ماده، معمولاً نمونه‌ای از آن (مطابق شکل زیر) را تحت آزمایش کشش قرار می‌دهند.

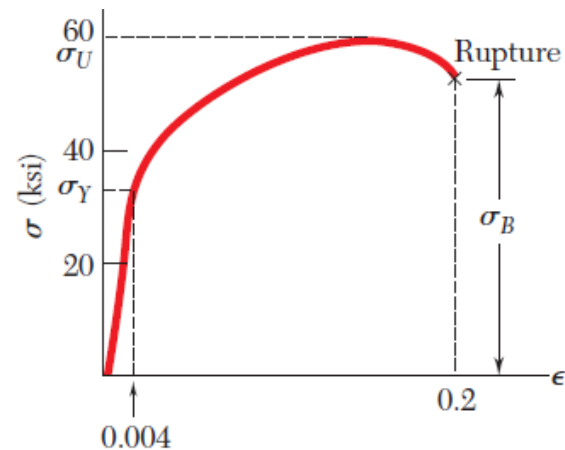


نمودارهای تنش-کرنش برای مواد مختلف کاملاً با هم متفاوت هستند و آزمایش‌های مختلف کشش روی یک ماده خاص، در دماهای متفاوت و سرعت‌های مختلف بارگذاری، ممکن است نتایج مختلف دهند. ولی، می‌توان وجه مشخصه‌های مشترکی را برای نمودارهای تنش-کرنش مواد مختلف تشخیص داد و مواد را بر مبنای این مشخصه‌ها به دو گروه شکل‌پذیر و شکننده (ترد) تقسیم بندی کرد.

مواد شکل پذیر، شامل فولاد ساختمانی و بسیاری از آلیاژهای فلزی، با قابلیت‌شان برای تسلیم در دماهای معمولی مشخص می‌شوند. وقتی نمونه تحت بار افزایشی قرار می‌گیرد، ابتدا طول آن بر حسب بار با نرخ (آهنگ) خیلی کم به طور خطی افزایش می‌یابد. لذا، قسمت اولیه نمودار تنش-کرنش یک خط راست با شیب تند است. ولی، پس از اینکه نمونه به تنش بحرانی  $\sigma_Y$  می‌رسد، با افزایش بار به میزان کم، دستخوش تغییر شکل بزرگی می‌شود. این تغییر شکل بر اثر لغزش ماده در امتداد سطوح مایل است، یعنی، عمدتاً از تنش‌های برشی ناشی می‌شود. شکل‌های زیر نمونه‌ای از نمودارهای تنش-کرنش دو ماده شکل پذیر می‌باشد.



فولاد کم کربن

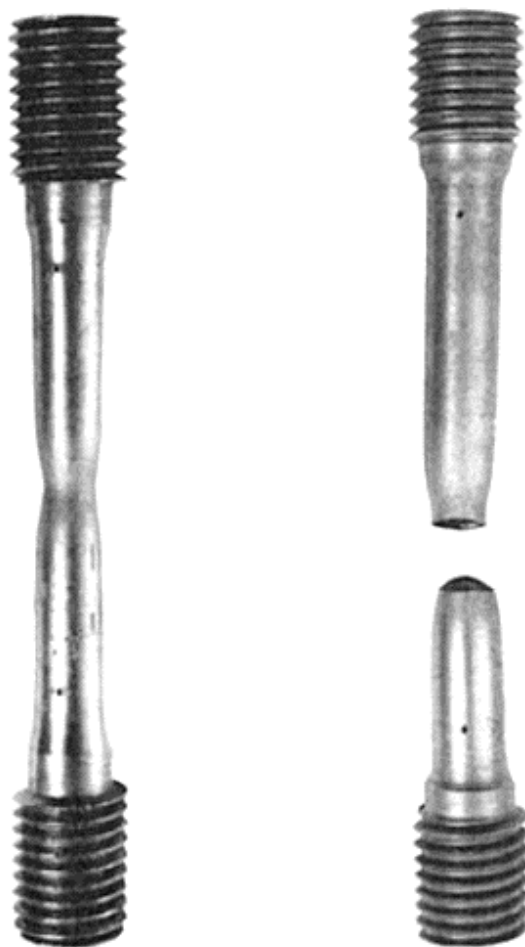


آلیاژ آلومینیوم

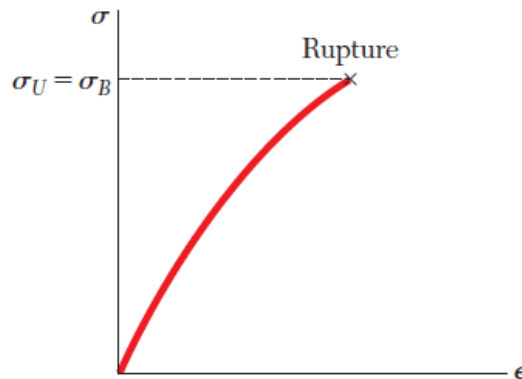
همانطور که از این نمودارها مشخص است، افزایش طول نمونه، پس از شروع تسلیم ممکن است 200 برابر تغییر شکل آن قبل از تسلیم باشد. پس از اینکه بار به مقدار ماکزیمم معینی می‌رسد، قطر قسمتی از نمونه شروع به کاهش می‌کند که ناشی از ناپایداری محلی است. این پدیده را باریک شدگی می‌گویند. پس از شروع باریک شدگی، بارهای کمتری برای افزایش طول بیشتر نمونه موردنیازند، تا سرانجام گسیختگی نهایی روی می‌دهد.



لازم به ذکر است که گسیختگی در امتداد یک سطح مخروطی روی می‌دهد که با سطح اولیه نمونه تقریباً زاویه 45 درجه می‌سازد. این نشان می‌دهد که شکست مواد شکل‌پذیر اساساً ناشی از برش است و نشان می‌دهد که در بار محوری، تنش‌های برشی وارد بر سطوحی که با بار زاویه 45 درجه می‌سازند، دارای بیشترین مقدار هستند. این مساله را در جلسات قبل هم دیدیم. تنش  $\sigma_T$  را که در آن تسلیم شروع می‌شود مقاومت (استقامت) تسلیم ماده و تنش  $\sigma_U$  متناظر با بار ماکزیمم را که بر نمونه وارد می‌شود مقاومت (استقامت) نهایی و تنش  $\sigma_B$  متناظر با گسیختگی را مقاومت (استقامت) شکست می‌گویند.



مواد شکننده، شامل چدن، شیشه و سنگ، دارای این مشخصه هستند که بدون اینکه قبلاً آهنگ افزایش طول آنها تغییر قابل توجهی دهد، گسیختگی در آنها روی می‌دهد.



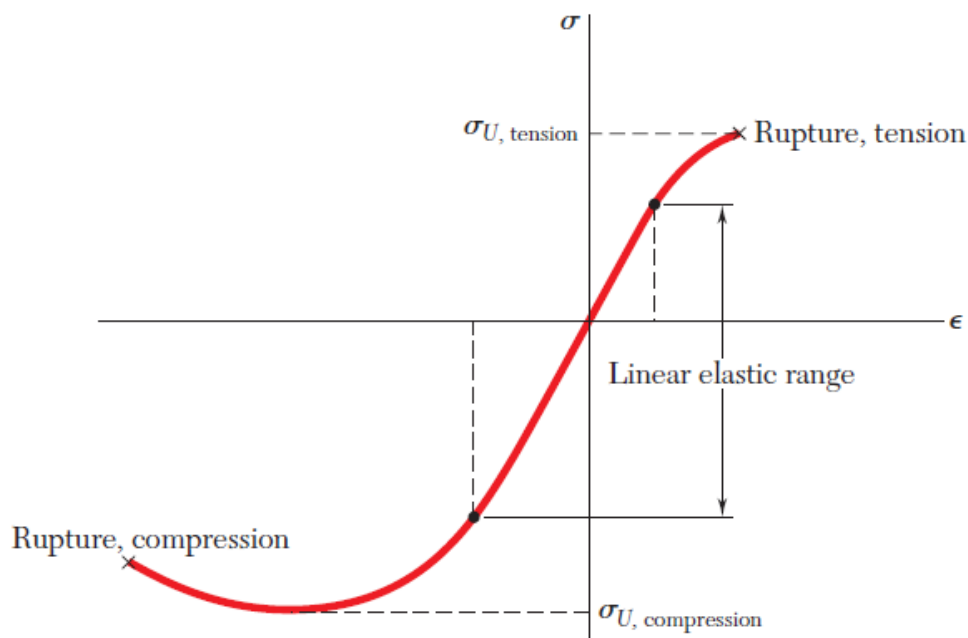
لذا برای مواد ترد (شکننده) هیچ اختلافی بین مقاومت (استقامت) نهایی و مقاومت (استقامت) شکست وجود ندارد. همچنین، کرنش در زمان گسیختگی برای مواد ترد در مقایسه با مواد شکل پذیر، خیلی کمتر است. همچنین حالت باریک شدگی برای ماده شکننده وجود ندارد و گسیختگی در امتداد سطوح عمود بر بار روی می‌دهد که یعنی، تنش‌های قائم عامل اصلی شکست مواد شکننده هستند.



## شکل پذیری (ductility) چیست و چگونه اندازه گیری می شود؟

اگر نمونه‌ای از یک ماده شکل پذیر تحت فشار قرار گیرد، منحنی تنش-کرنش حاصل اساساً از لحاظ قسمت خطی اولیه و شروع قسمت متناظر با تسلیم و سخت شوندگی کرنشی مانند منحنی تنش-کرنش در آزمایش کشش است. لازم به ذکر است که برای یک فولاد معین، مقاومت تسلیم در کشش و فشار دارای مقدار یکسان است. برای مقادیر بزرگتر کرنش، منحنی‌های تنش-کرنش در کشش و فشار از هم فاصله می‌گیرند. باید توجه داشت که باریک شدگی در آزمایش فشار روی نمی‌دهد. در اغلب مواد شکننده، دیده می‌شود که استقامت (مقاومت) نهایی در فشار خیلی بیشتر از استقامت (مقاومت) نهایی آن در کشش است و این ناشی از وجود نقص‌ها مانند ترک‌ها یا ... است که باعث تضعیف ماده در کشش می‌شوند.

بتن یک نمونه از ماده شکننده، با خواص مختلف در کشش و فشار است و نمودار تنش-کرنش آن در شکل زیر دیده می‌شود.



همانطور که از نمودار تنش- کرنش مشخص است، در سمت کششی نمودار، ابتدا یک ناحیه الاستیک خطی را می‌بینیم که در آن کرنش با تنش متناسب است. پس از نقطه تسلیم، کرنش سریعتر از تنش افزایش می‌یابد تا سرانجام، گسیختگی روی می‌دهد. ماده در فشار رفتار متفاوتی دارد. اول اینکه، محدوده الاستیک خطی به طور قابل توجهی بزرگتر است. دوم اینکه وقتی تنش به مقدار ماکزیمم خود می‌رسد، گسیختگی روی نمی‌دهد بلکه مقدار تنش کاهش می‌یابد، در حالی که کرنش همچنان افزایش می‌یابد تا سرانجام، گسیختگی روی می‌دهد. دقت کنید که مدول الاستیسیته، که با شیب منحنی تنش-کرنش قسمت خطی نمودار نشان داده می‌شود، در کشش و فشار دارای مقدار یکسان است. این موضوع برای اغلب مواد شکننده صحت دارد.

3-4

### قانون هوک و مدول الاستیسیته



اغلب سازه‌های مهندسی که برای تغییر شکل‌های نسبتاً کوچک طراحی می‌شوند، فقط شامل قسمت خطی نمودار تنش-کرنش هستند. برای قسمت اولیه نمودار (بخش خطی)، تنش  $\sigma$  با کرنش  $\epsilon$  به طور مستقیم متناسب است و لذا می‌توان نوشت:

$$\sigma = E \epsilon$$

این رابطه را به افتخار دانشمند انگلیسی رابرت هوک، قانون هوک می‌گویند. ضریب  $E$  را نیز به افتخار دانشمند انگلیسی توماس یانگ، مدول الاستیسیته یا مدول یانگ ماده می‌گویند. با توجه به اینکه کرنش  $\epsilon$  یک کمیت بی بعد است، مدول الاستیسیته با تنش دارای واحد یکسانی می‌باشند.

بیشترین مقدار تنشی که به ازای آن می‌توان قانون هوک را برای ماده‌ای به کار برد، حد تناسب آن ماده می‌گویند. در مواد شکل‌پذیر که نقطه تسلیم کاملاً مشخصی دارند، حد تناسب تقریباً بر نقطه تسلیم منطبق است. برای سایر مواد، حد تناسب را به سهولت نمی‌توان تعریف کرد. اما وقتی مقدار تنش کمی بیشتر از حد تناسب واقعی است، کاربرد قانون هوک برای مواد مذکور خطای زیادی به وجود نمی‌آورد.



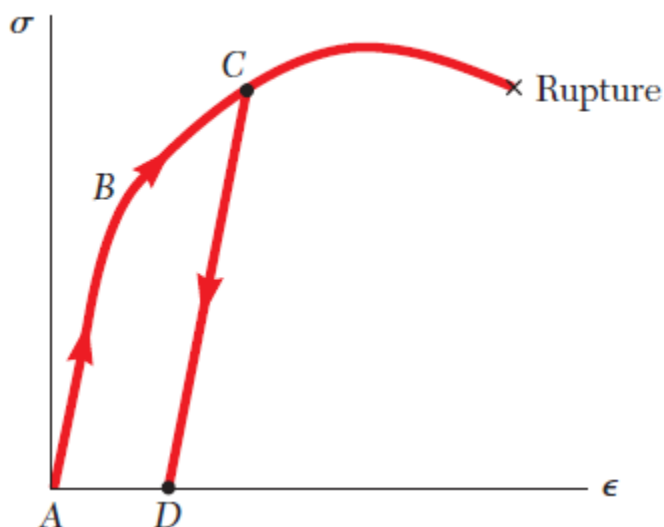
## سفتی یا سختی (stiffness) چه ویژگی از ماده است؟

3-5

## رفتار الاستیک و پلاستیک ماده

اگر کرنش‌هایی که با اعمال بار معینی در یک نمونه آزمایشی به وجود می‌آیند هنگام حذف بار از بین بروند، می‌گویند ماده به صورت الاستیک رفتار می‌کند. بیشترین مقدار تنش که به ازای آن ماده به صورت الاستیک رفتار می‌کند حد الاستیک آن ماده نام دارد.

اگر ماده دارای نقطه تسلیم کاملاً مشخصی باشد، حد الاستیک، حد تناسب و نقطه تسلیم آن اساساً با هم برابرند. به عبارت دیگر، تا وقتی تنش کمتر از نقطه تسلیم است، ماده به صورت الاستیک و خطی رفتار می‌کند. با توجه به شکل زیر، در حالت تسلیم با حذف بار (باربرداری)، تنش و کرنش در امتداد خط  $CD$  که به موازات قسمت خطی  $AB$  منحنی بارگذاری است، به صورت خطی کاهش می‌یابد.



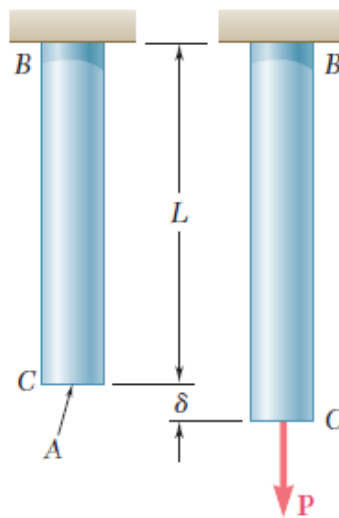
این موضوع که کرنش  $\epsilon$  پس از حذف بار به صفر برنمی‌گردد، نشان می‌دهد که تغییر شکل پلاستیک (دائمی) روی داده است. در اغلب مواد، تغییر شکل پلاستیک نه فقط به ماکزیمم مقدار تنش، بلکه به مدت اعمال این تنش قبل از حذف بار نیز بستگی دارد. در تغییر شکل پلاستیک، قسمت وابسته به تنش را لغزش و قسمت وابسته به زمان را که به دما نیز بستگی دارد، خزش می‌گویند.

3-6

## تغییر شکل عضو تحت بار محوری



میله همگن  $BC$  به طول  $L$  با مساحت مقطع عرضی یکنواخت  $A$  تحت بار محوری مرکزی  $P$  مطابق شکل زیر قرار دارد. اگر تنش محوری از حد تناسب ماده فراتر نرود، می‌توان قانون هوک را به کار برد. در نتیجه داریم:



$$\sigma = E\epsilon$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

$$\delta = \epsilon L$$

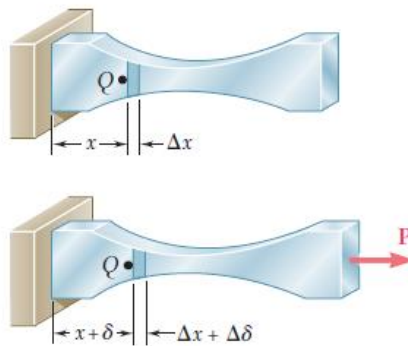
در نهایت با جایگذاری روابط فوق، داریم:

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

رابطه بدست آمده برای حالتی است که میله همگن (دارای  $E$  ثابت و یکنواخت در طول میله) و مساحت  $A$  مقطع عرضی آن یکنواخت و از دو سر میله بارگذاری شده باشد. اگر میله در نقاط دیگری بارگذاری شده باشد یا از چند قسمت با مقطع عرضی متفاوت یا از مواد مختلف ساخته شده باشد، باید آن را به اجزای مختلفی تقسیم کرد که هر کدام شرایط مورد نیاز برای کاربرد فرمول بالا را داشته باشد. در این حالت از رابطه زیر برای محاسبه تغییر شکل کلی میله استفاده می‌کنیم:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

در آخر، رابطه کلی برای محاسبه تغییر شکل میله که مساحت مقطع عرضی یا نیروی داخلی آن در طول میله متغییر باشد، تحت بارگذاری محوری، با توجه به شکل زیر به صورت زیر بدست می‌آید:



$$\epsilon = d\delta/dx$$

$$d\delta = \epsilon dx = \frac{P dx}{AE}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{P dx}{AE}$$

در نهایت داریم:

## اصل جمع آثار قوا (superposition principal)



مطابق این اصل هرگاه سازه‌ای به طور همزمان تحت تاثیر تعدادی نیرو باشد، تغییر مکان ایجاد شده در هر نقطه از آن برابر است با مجموع تغییر مکان‌های ایجاد شده بوسیله هر یک از آن نیروهاست وقتی که هر یک از آنها به تنهایی بر سازه وارد شوند. این اصل وقتی برقرار است که سازه رفتار خطی داشته باشد و برای اینکه این نکته صادق باشد دو شرط باید برقرار باشد. اول اینکه مصالح سازه باید از قانون هوک پیروی کند، به عبارت دیگر رابطه بین تنش و کرنش خطی باشد. دوم اینکه تغییر شکل‌های کوچک سازه نباید در روی عمل بارهای وارده تاثیر داشته باشد.

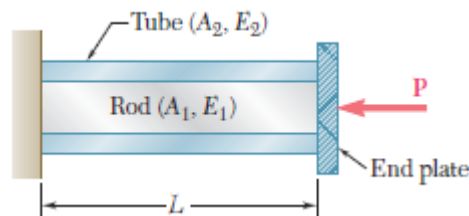
از این اصل به وفور در این درس و درس تحلیل سازه‌ها استفاده خواهیم کرد.

## مسائل نامعین استاتیکی



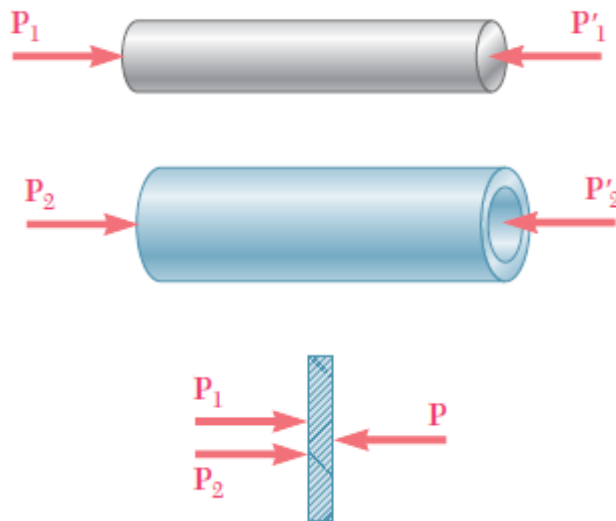
همانطور که از استاتیک به یاد داریم، مسائلی که تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات تعادل استاتیکی باشند، نامعین استاتیکی می‌نامیم. برای تحلیل چنین مسائلی در کنار معادلات تعادل نیاز به روابط داریم که شامل تغییر شکل هستند. این تغییر شکل‌ها از هندسه مساله تعیین می‌شوند. با بررسی مثالی، با این نوع از مسائل و شیوه حل آنها آشنا خواهیم شد.

در شکل زیر، میله‌ای به طول  $L$  و مساحت مقطع عرضی  $A_1$  و مدول الاستیسیته  $E_1$  در داخل لوله‌ای به طول  $L$  و با مساحت مقطع عرضی  $A_2$  و مدول الاستیسیته  $E_2$  قرار دارد. اگر نیروی  $P$  بر صفحه صلب انتهایی وارد شود، می‌خواهیم تغییر شکل میله و لوله را بدست آوریم.



از جلسات قبل به یاد داریم که برای به دست آوردن تغییر شکل این اعضا تحت نیروی محوری کافی است، نیروی محوری هر عضو و مشخصات هندسی و مکانیکی آن را داشته باشیم. لذا در این مثال کافی است که نیروی محوری در میله و لوله را بدست آوریم.

نیروهای محوری در میله و لوله را به ترتیب با  $P_1$  و  $P_2$  نشان می‌دهیم و نمودار جسم آزاد بخش‌های تشکیل دهنده سازه را مطابق شکل زیر ترسیم می‌کنیم:



معادله تعادل استاتیکی را با توجه به نمودار جسم آزاد به صورت زیر می‌نویسیم:

$$P_1 + P_2 = P$$

اگر دقت کنید با این معادله تعادل استاتیکی نمی‌توان دو مجهول (نیروهای داخلی  $P_1$  و  $P_2$ ) را بدست آورد و لذا با یک مساله نامعین استاتیکی سروکار داریم.

برای حل مساله چه باید کرد؟ چه رابطه‌ای با توجه به هندسه و شرایط مساله، براساس تغییر شکل‌ها، می‌توانید پیشنهاد کنید؟  
با توجه به شکل هندسی و شرایط مساله (وجود صفحه صلب انتهایی)، تغییر شکل‌های میله و لوله با هم برابر هستند. از این نکته استفاده کرده و یک معادله به معادلات اضافه شده و در نتیجه با دو معادله مستقل می‌توانیم دو مجهول مساله را بدست آوریم.

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1} \quad \delta_2 = \frac{P_2 L}{A_2 E_2}$$

$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2}$$

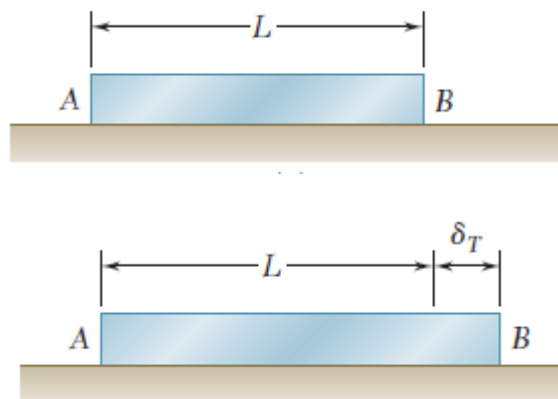
و در نهایت داریم:

$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \quad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$



در مسائلی که تا الان بررسی کردیم، تمام اعضا و سازه‌ها هنگام بارگذاری در دمای ثابت بودند. حال سوال این است که اگر دما تغییر کند، چه تاثیری روی پاسخ سازه‌ها دارد؟  
در این بخش به بررسی اثر تغییر دما خواهیم پرداخت.

از فیزیک به یاد داریم که اگر دمای میله همگن  $AB$  با مقطع عرضی یکنواخت و به طول  $L$  که آزادانه روی یک سطح صاف افقی قرار دارد، به اندازه  $\Delta T$  افزایش یابد، میله به اندازه  $\delta_T$  افزایش طول خواهد داشت. این مقدار افزایش طول از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

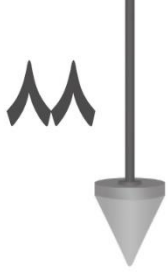


$$\delta_T = \alpha L (\Delta T)$$

$\alpha$  مشخصه‌ای از ماده به نام ضریب انبساط گرمایی (حرارتی) است و واحد آن  $1/^\circ C$  یا  $1/^\circ F$  می‌باشد. حال اگر بخواهیم کرنش متناظر با این تغییر شکل را حساب کنیم داریم:

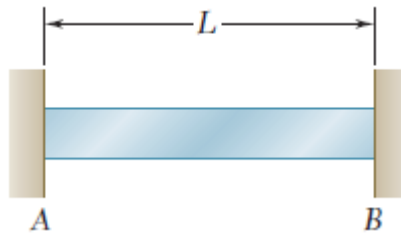
$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha (\Delta T)$$

$\varepsilon_T$  را کرنش گرمایی (حرارتی) می‌گویند.



در این حالت که بررسی کردیم دقت کنید که هیچ تنشی در ارتباط با کرنش  $\epsilon_T$  وجود ندارد زیرا میله آزادانه روی سطح قرار دارد به عبارتی بدون هیچ مانعی آزادانه تغییر شکل می‌دهد.

حال همان میله را در شرایطی فرض کنید که بین دو تکیه‌گاه ثابت به فاصله  $L$  از هم قرار دارد.



ابتدا هیچ تنش یا کرنشی وجود ندارد. اگر دمای میله را به اندازه  $\Delta T$  افزایش دهیم، میله نمی‌تواند آزادانه افزایش طول دهد زیرا قیدهایی در دو انتهای آن قرار دارند که مانع از این افزایش طول می‌شوند. در نهایت تغییر طول میله صفر است و با توجه به مقطع عرضی ثابت میله، کرنش حرارتی در هر نقطه از میله که از رابطه  $\epsilon_T = \delta_T / L$  بدست می‌آید، نیز صفر خواهد بود. اما لازم است دقت کنیم که پس از افزایش دما، تکیه‌گاه‌ها دو نیروی مساوی و مخالف  $P$  و  $P'$  را بر میله وارد می‌کنند و مانع از افزایش طول میله می‌شوند. به خاطر این نیروها، در میله تنش (بدون کرنش) بوجود می‌آید. در ادامه به محاسبه این تنش خواهیم پرداخت.

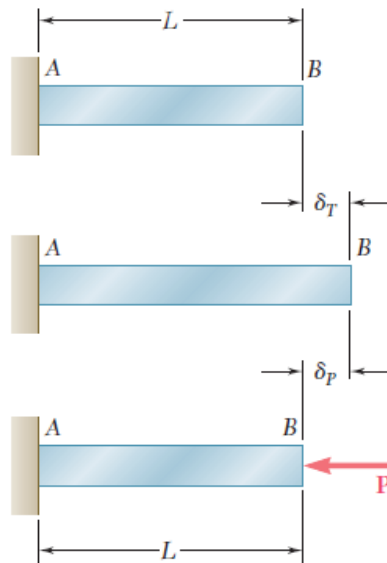


در این حالت ما با یک مساله نامعین استاتیکی سروکار داریم زیرا با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی نمی‌توان نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاهی یا نیروهای داخلی را محاسبه کرد. لذا باید دنبال رابطه‌ای براساس تغییر شکل‌ها باشیم. از هندسه و شرایط مساله در می‌یابیم که تغییر طول میله برابر صفر است و از این شرط معادله جدیدی برای حل مساله پیدا می‌کنیم.

برای حل این مساله از اصل جمع آثار قوا استفاده می‌کنیم. در این مساله ما عملاً با دو عامل خارجی سروکار داریم، یکی اثر تغییر دما و دیگری نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاهی.

حال، میله را از تکیه‌گاه  $B$  جدا می‌کنیم و اجازه می‌دهیم میله تحت تغییر دمای  $\Delta T$  آزادانه تغییر طول دهد.





در این حالت تغییر طول میله برابر است با:

$$\delta_T = \alpha L (\Delta T)$$

حال تغییر طول ناشی از اعمال بار  $P$  (عکس العمل تکیه‌گاهی در  $B$ ) را محاسبه می‌کنیم:

$$\delta_P = \frac{PL}{EA}$$

با توجه به اینکه تغییر طول کل میله برابر صفر است لذا این دو تغییر مکان باید برابر هم باشند:

(با در نظر گرفتن جهت مثبت قراردادی برای تغییر شکل)

$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha L (\Delta T) - \frac{PL}{EA} = 0$$

$$P = \alpha EA (\Delta T)$$

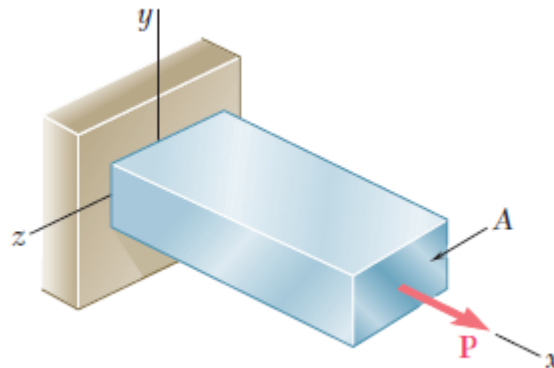
در نتیجه تنش در میله در اثر تغییر دمای  $\Delta T$  برابر است با:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \alpha E (\Delta T)$$

فقط دقت کنید که در هر سازه مقید دیگر نیز با توجه به شرایط مساله، مقدار تنش در اثر تغییر دما را می‌توان محاسبه کرد.

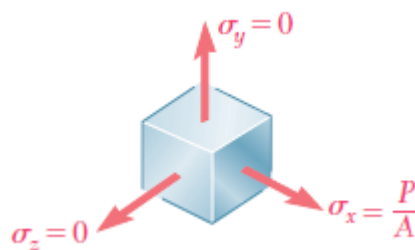


مطابق شکل زیر، اگر بار  $P$  در امتداد محور  $x$  به میله همگن به صورت محوری وارد شود، تنش و کرنش طبق قانون هوک (با فرض اینکه ماده از حد الاستیک خود فراتر نرفته است) به صورت زیر می باشد:

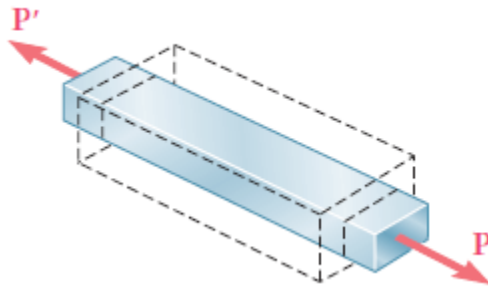


$$\sigma_x = \frac{P}{A} \quad , \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

لازم به ذکر است که تنش‌های قائم وارد بر وجوه عمود بر محورهای  $y$  و  $z$  صفر هستند یعنی  $\sigma_y = \sigma_z = 0$  ولی کرنش‌های  $\varepsilon_y$  و  $\varepsilon_z$  صفر نیستند.



در تمام مواد (به غیر از بعضی از مواد آزمایشی مانند فوم‌های پلیمری که نسبت پواسون منفی دارند)، کشیدگی حاصل از اعمال نیروی محوری  $P$  با انقباض عرضی همراه است.



اگر مواد را همگن و همسانگرد فرض کنیم، یعنی فرض کنیم خواص مکانیکی آنها مستقل از مکان و جهت است. در نتیجه، کرنش نیز در تمام جهت‌های عرضی دارای مقدار یکسان است. بنابراین برای بارگذاری مورد بررسی،  $\varepsilon_y = \varepsilon_z$  و این مقدار را کرنش جانبی می‌گویند.

یکی از ثابت‌های مهم برای یک ماده معین، نسبت پواسون ( $\nu$ ) است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

کرنش محوری/کرنش جانبی - = نسبت پواسون

یا به عبارتی:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

با استفاده از تعریف بالا، می‌توانیم مقادیر کرنش در امتدادهای  $y$  و  $z$  را بدست آوریم:

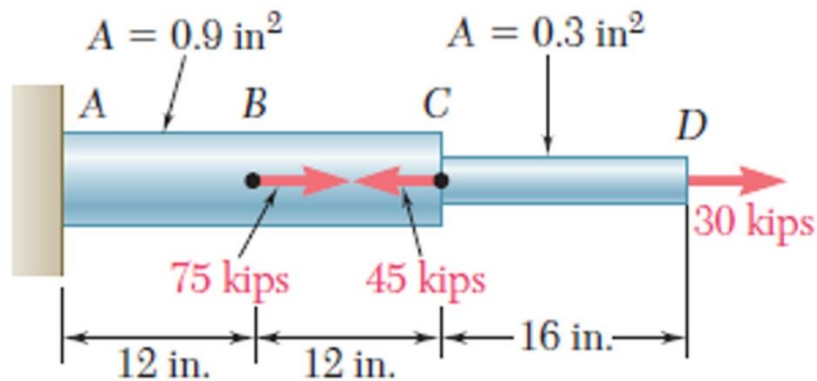
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E}$$

## مثال های حل شده سری ۲

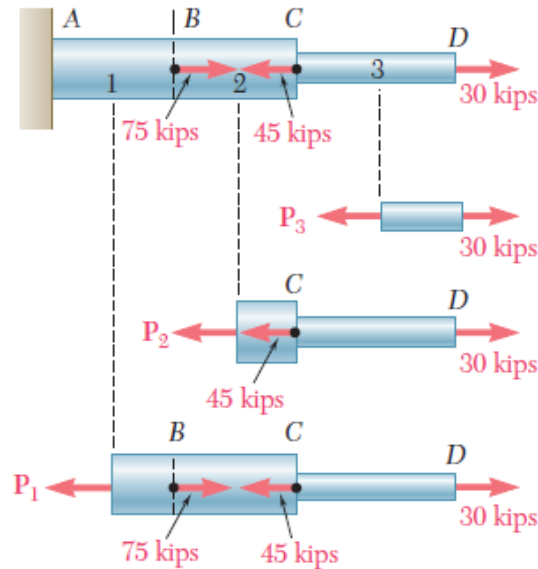
هدف: در این مثال با محاسبه تغییر شکل تحت بارگذاری محوری آشنا خواهیم شد.

تغییر شکل میله فولادی نشان داده شده در شکل را تحت بارگذاری اعمال شده تعیین کنید. ( $E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$ )

Determine the deformation of the steel rod shown in Figure under the given loads. ( $E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$ )



برای حل مساله، مطابق آنچه که در جلسات قبل یاد گرفتیم، میله را در سه قسمت مقطع زده و با ترسیم نمودار جسم آزاد قطعات جدا شده و بررسی تعادل آنها، نیروی داخلی محوری را مطابق شکل‌های زیر بدست می‌آوریم:



$$P_1 = 60 \text{ kips} = 60 \times 10^3 \text{ lb}$$

$$P_2 = -15 \text{ kips} = -15 \times 10^3 \text{ lb}$$

$$P_3 = 30 \text{ kips} = 30 \times 10^3 \text{ lb}$$

حال برای محاسبه تغییر شکل (تغییر طول) میله، مجموع تغییر شکل بخش‌های مختلف را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E} \left( \frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3} \right) \\ &= \frac{1}{29 \times 10^6} \left[ \frac{(60 \times 10^3)(12)}{0.9} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-15 \times 10^3)(12)}{0.9} + \frac{(30 \times 10^3)(16)}{0.3} \right] \\ \delta &= \frac{2.20 \times 10^6}{29 \times 10^6} = 75.9 \times 10^{-3} \text{ in.} \end{aligned}$$

این سوال چه مفهومی را در ذهن شما تداعی می‌کند؟

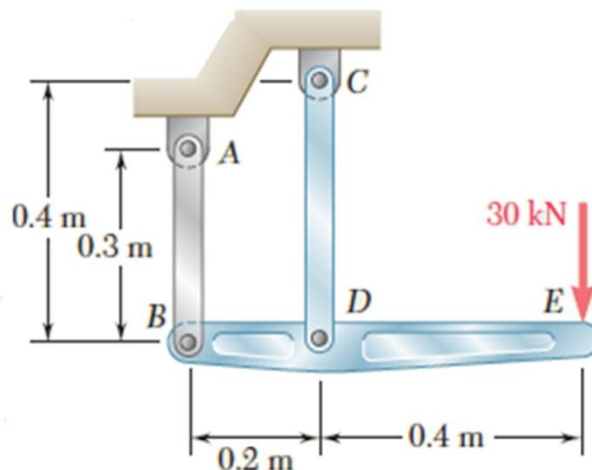
## مثال های حل شده سری ۲

۲

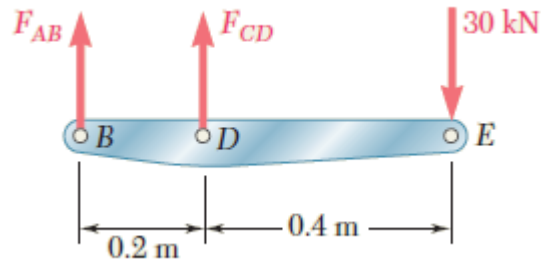
هدف: در این مثال با محاسبه تغییر مکان سازه‌های مرکب از عضو صلب و تغییر شکل پذیر آشنا خواهیم شد.

میله صلب BDE توسط دو بازوی AB و CD نگه داشته شده است. بازوی AB از آلومینیم با مدول الاستیسیته ۷۰ گیگاپاسکال و مساحت مقطع عرضی ۵۰۰ میلیمتر مربع و بازوی CD از فولاد با مدول الاستیسیته ۲۰۰ گیگاپاسکال و مساحت مقطع عرضی ۶۰۰ میلیمتر مربع است. برای نیروی ۳۰ کیلونیوتن اعمالی، انحراف (تغییر مکان) نقاط B و D و C را تعیین کنید

The rigid bar BDE is supported by two links AB and CD. Link AB is made of aluminum ( $E=70$  GPa) and has a cross-sectional area of  $500$  mm<sup>2</sup>; link CD is made of steel ( $E=200$  GPa) and has a cross-sectional area of  $600$  mm<sup>2</sup>. For the  $30$ -kN force shown, determine the deflection (a) of B, (b) of D, (c) of E.



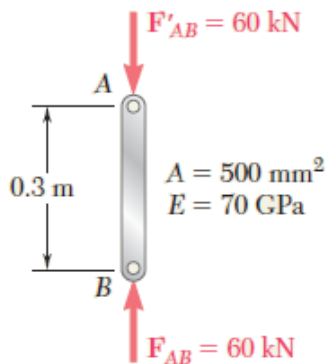
ابتدا نمودار جسم آزاد قطعه صلب را مطابق شکل زیر ترسیم می‌کنیم:



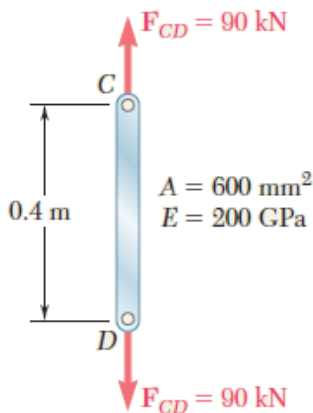
حال با نوشتن معادلات تعادل، نیروهای اعضای تغییر شکل پذیر را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 +\curvearrowright \sum M_B = 0: & \quad -(30 \text{ kN})(0.6 \text{ m}) + F_{CD}(0.2 \text{ m}) = 0 \\
 & \quad F_{CD} = +90 \text{ kN} \quad F_{CD} = 90 \text{ kN} \text{ tension} \\
 +\curvearrowright \sum M_D = 0: & \quad -(30 \text{ kN})(0.4 \text{ m}) - F_{AB}(0.2 \text{ m}) = 0 \\
 & \quad F_{AB} = -60 \text{ kN} \quad F_{AB} = 60 \text{ kN} \text{ compression}
 \end{aligned}$$

در این مرحله، می‌توانیم تغییر طول بازوها (اعضای تغییر شکل پذیر) را به صورت زیر محاسبه نماییم:

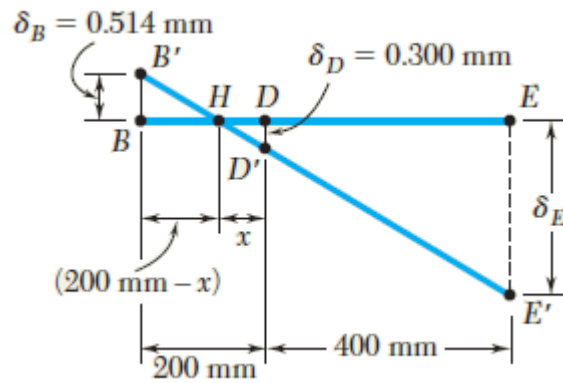


$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3 \text{ N})(0.3 \text{ m})}{(500 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(70 \times 10^9 \text{ Pa})} = -514 \times 10^{-6} \text{ m}$$



$$\begin{aligned}
 \delta_D &= \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3 \text{ N})(0.4 \text{ m})}{(600 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ Pa})} \\
 &= 300 \times 10^{-6} \text{ m}
 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن اینکه اعضای تغییر شکل پذیر به قطعه صلب متصل می‌باشد و عضو صلب بدون تغییر شکل باقی میماند، تغییر شکلی به صورت زیر برای سازه متصور هستیم. از روابط هندسی داریم:



$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \quad \frac{0.514 \text{ mm}}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(200 \text{ mm}) - x}{x} \quad x = 73.7 \text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \quad \frac{\delta_E}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(400 \text{ mm}) + (73.7 \text{ mm})}{73.7 \text{ mm}}$$

$$\delta_E = 1.928 \text{ mm} \downarrow$$



## مثال های حل شده سری ۲

۳

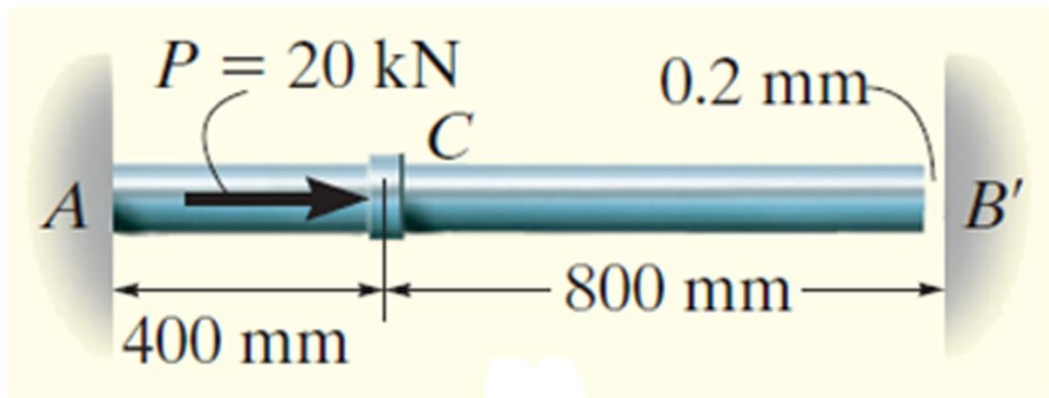
هدف: در این مثال با محاسبه تنش در مسائل نامعین الاستاتیکی تحت بارگذاری محوری آشنا خواهیم شد.

میله فولادی نشان داده شده در شکل دارای قطر ۱۰ میلیمتر می باشد. این میله در نقطه A به دیوار ثابت شده و قبل از بارگذاری فاصله برابر ۰/۲ میلیمتری در انتهای دیگر میله با دیوار وجود دارد. بعد از اعمال بارگذاری عکس العمل های تکیه گاهی در A و B' را بدست آورید. مدول الاستیسیته فولاد را برابر ۲۰۰ گیگاپاسکال در نظر بگیرید.

The A-36 steel rod shown in Figure has a diameter of 10 mm. It is fixed to the wall at A, and before it is loaded there is a gap between the wall and the rod of 0.2 mm. Determine the reactions at A and B'.

Neglect the size of the collar at C.

Take  $E_{st} = 200 \text{ GPa}$ .



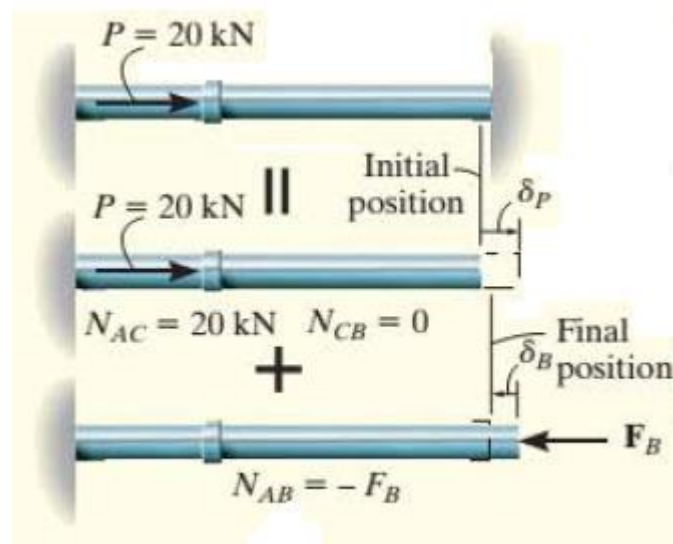
با توجه به شرایط داده شده و تغییر طول میله تحت بار اعمالی، سه حالت برای مساله قابل تصور است:

- 1- تغییر طول میله کمتر از گپ (فاصله) بین میله و دیوار باشد.
- 2- تغییر طول میله دقیقا مساوی گپ (فاصله) بین میله و دیوار باشد.
- 3- تغییر طول میله بیشتر از گپ (فاصله) بین میله و دیوار باشد.

برای مشخص شدن این مساله، ابتدا تغییر طول میله را تحت بار اعمالی محاسبه می‌کنیم:

$$\delta_P = \frac{N_{AC} L_{AC}}{AE} = \frac{[20(10^3) \text{ N}](0.4 \text{ m})}{\pi(0.005 \text{ m})^2 [200(10^9) \text{ N/m}^2]} = 0.5093(10^{-3}) \text{ m}$$

در نتیجه این تغییر طول، بیشتر از فاصله بین میله و دیوار بوده و در نتیجه ما با یک مساله نامعین استاتیکی به صورت زیر روبرو هستیم که در آن به دلیل اینکه میله امکان تغییر طول آزادانه را نداشته، از طرف دیوار به میله نیرویی وارد می‌شود. با استفاده از اصل جمع آثار و شرایط سازگاری تغییر شکل‌ها داریم:



$$0.0002 \text{ m} = \delta_P - \delta_B$$

$$\delta_B = \frac{N_{AB} L_{AB}}{AE} = \frac{F_B (1.20 \text{ m})}{\pi(0.005 \text{ m})^2 [200(10^9) \text{ N/m}^2]} = 76.3944(10^{-9})F_B$$

در نهایت داریم:

$$0.0002 \text{ m} = 0.5093(10^{-3}) \text{ m} - 76.3944(10^{-9})F_B$$

$$F_B = 4.05(10^3) \text{ N} = 4.05 \text{ kN}$$

حال با نوشتن معادله تعادل در امتداد میله، خواهیم داشت:



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad -F_A + 20 \text{ kN} - 4.05 \text{ kN} = 0 \quad F_A = 16.0 \text{ kN}$$

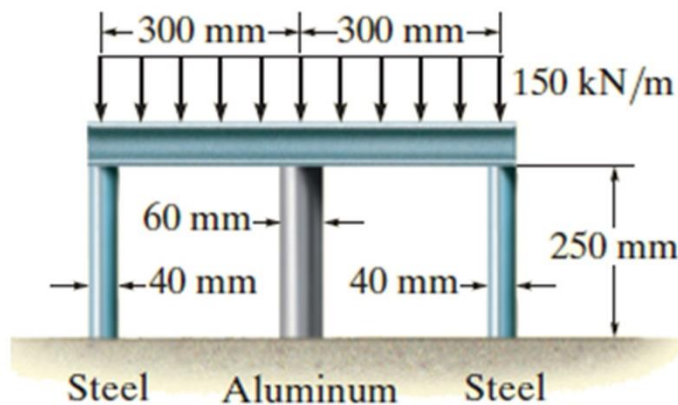
## مثال های حل شده سری ۲

۴

هدف: در این مثال با محاسبه تغییر شکل تحت اثر تغییرات دما آشنا خواهیم شد.

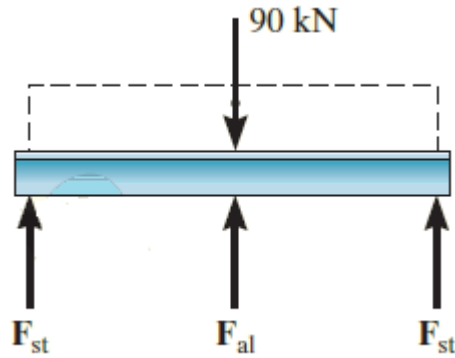
تیر صلب نشان داده شده در شکل، به سه ستون از جنس فولاد و آلومینیم ثابت شده است. طول ستون ها قبل از هر گونه بارگذاری برابر ۲۵۰ میلیمتر می باشد. نیرو در هر یک از ستون ها را تحت بارگذاری گسترده یکنواخت به شدت ۱۵۰ کیلونیوتن بر متر و تغییر دما از ۲۰ به ۸۰ درجه سلسیوس محاسبه نمایید. مدول الاستیسیته فولاد و آلومینیم را به ترتیب برابر ۲۰۰ و ۷۳/۱ گیگاپاسکال در نظر بگیرید.

The rigid beam shown in Figure is fixed to the top of the three posts made of A992 steel and 2014-T6 aluminum. The posts each have a length of 250 mm when no load is applied to the beam, and the temperature is  $T_1 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Determine the force supported by each post if the bar is subjected to a uniform distributed load of 150 kN/m and the temperature is raised to  $T_2 = 80\text{ }^{\circ}\text{C}$ .



### معادلات تعادل:

نمودار جسم آزاد تیر صلب را به صورت زیر ترسیم کرده و معادلات تعادل استاتیکی را برای آن می‌نویسیم:



از معادله تعادل لنگر نسبت به نقطه وسط تیر، نتیجه می‌گیریم که نیرو در ستون‌های فولادی با هم برابر می‌باشد. از تعادل نیروها در امتداد قائم خواهیم داشت:

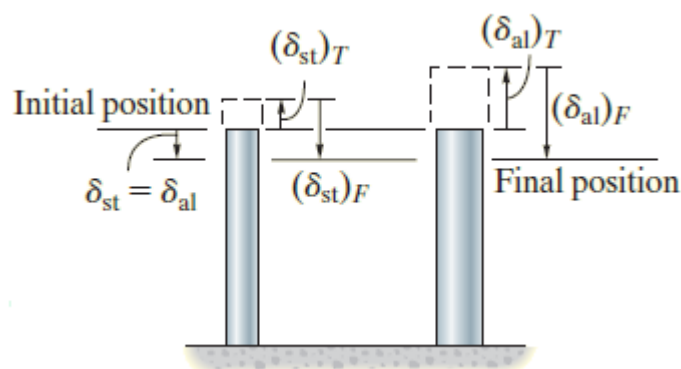
$$2F_{st} + F_{al} - 90(10^3) \text{ N} = 0$$

### معادلات سازگاری:

با توجه به بار اعمالی، هندسه و جنس مصالح، انتهای ستون‌ها دارای تغییر مکان یکسان خواهند بود. بنابراین:

$$(+\downarrow) \quad \delta_{st} = \delta_{al}$$

موقعیت نهایی انتهایی ستون‌ها برابر است با مجموع تغییر مکان ناشی از تغییرات دما و نیروی محوری با در نظر گرفتن علامت برای جهت تغییر مکان‌ها. این نکته در شکل زیر نشان داده شده است:



در نتیجه:

$$\begin{aligned} (+\downarrow) \quad \delta_{st} &= -(\delta_{st})_T + (\delta_{st})_F \\ (+\downarrow) \quad \delta_{al} &= -(\delta_{al})_T + (\delta_{al})_F \end{aligned}$$

نیرو-تغییر مکان:

با جایگذاری روابط داریم:

$$\begin{aligned} & -[12(10^{-6})/^{\circ}\text{C}](80^{\circ}\text{C} - 20^{\circ}\text{C})(0.250 \text{ m}) + \frac{F_{st} (0.250 \text{ m})}{\pi(0.020 \text{ m})^2 [200(10^9) \text{ N/m}^2]} \\ & = -[23(10^{-6})/^{\circ}\text{C}](80^{\circ}\text{C} - 20^{\circ}\text{C})(0.250 \text{ m}) + \frac{F_{al} (0.250 \text{ m})}{\pi(0.030 \text{ m})^2 [73.1(10^9) \text{ N/m}^2]} \\ & F_{st} = 1.216F_{al} - 165.9(10^3) \end{aligned}$$

از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم: (به واحدها در روابط مورد استفاده حتما دقت کنید)

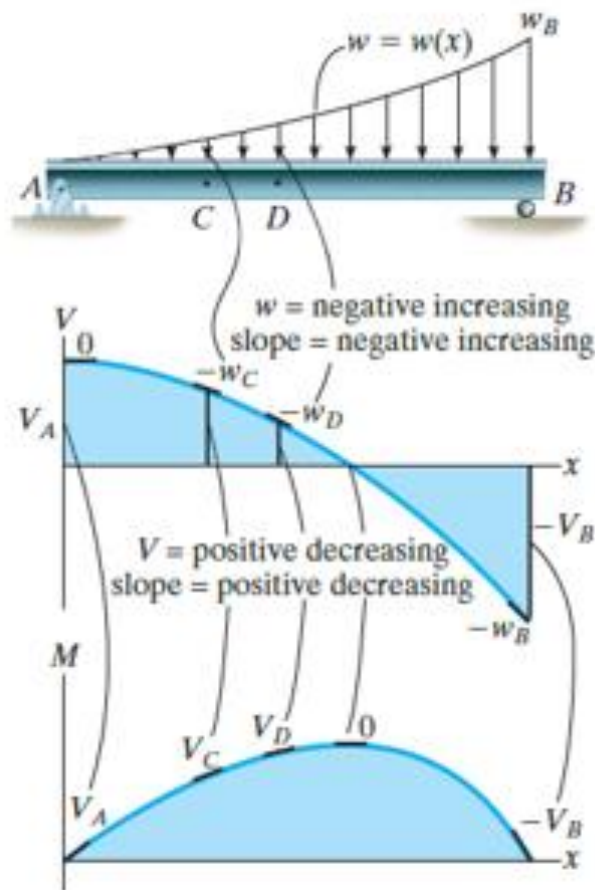
$$F_{st} = -16.4 \text{ kN} \quad F_{al} = 123 \text{ kN}$$

**علامت بدست آمده برای این نیروها بیانگر چه واقعیت فیزیکی در مورد مساله می باشد؟**

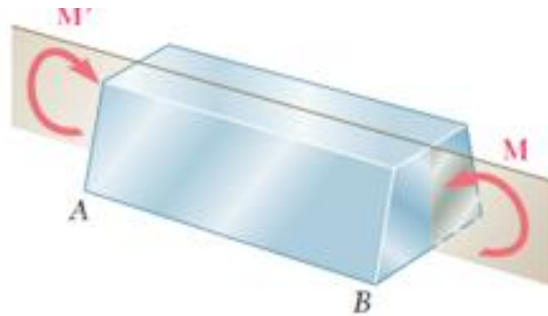
براساس آنچه از استاتیک یاد گرفتیم، نتیجه می گیریم که جهت نیرو برای فولاد، خلاف جهتی است که در شکل بالا در نظر گرفته بودیم. به عبارتی، ستون های فولادی تحت کشش و ستون آلومینیم تحت فشار می باشد.



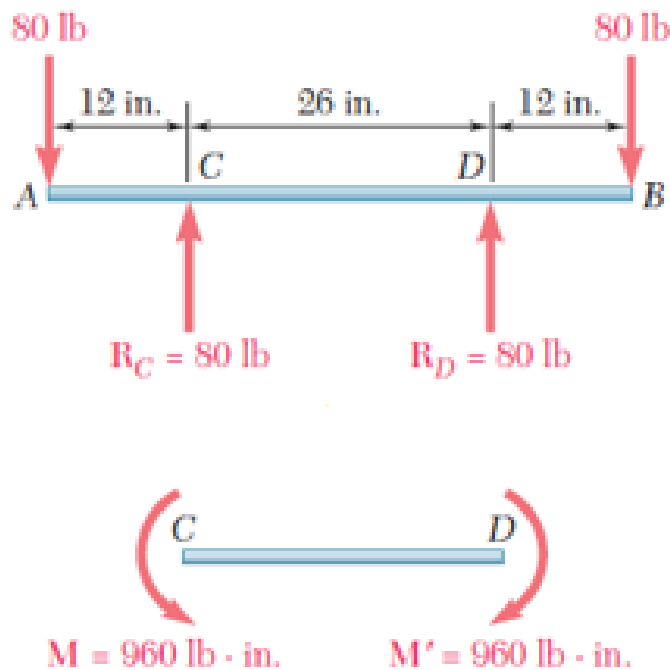
در بخش‌های قبلی به بررسی تنش و کرنش تحت نیروی داخلی محوری پرداختیم. در این بخش تنش و کرنش تحت خمش را بررسی خواهیم کرد. قبل از شروع بحث به مرور مفهوم لنگر خمشی و ارتباط آن با بارگذاری و نیروی برش در قالب مثال زیر از استاتیک می‌پردازیم.



در ادامه، عضوهای منشوری را تحت کوپل‌های مساوی و مخالف  $M$  و  $M'$  که در صفحه طولی یکسان عمل می‌کنند، تحلیل می‌کنیم. می‌گوییم این عضوها در خمش خالص هستند. فرض می‌کنیم عضو دارای صفحه تقارن است و کوپل‌ها در آن صفحه عمل می‌کنند.

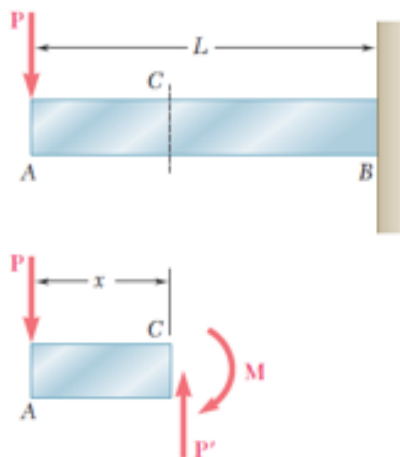
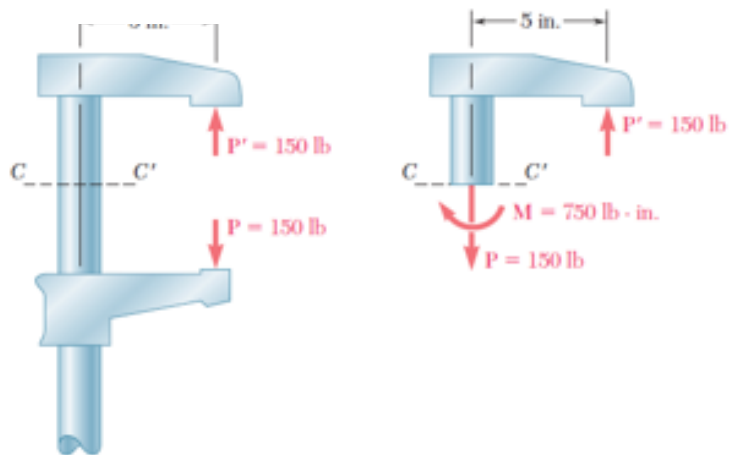


نمونه‌ای از خمش خالص را در مسابقات ورزشی وزنه برداری شاهد هستیم. خمش میله وزنه برداری در بالای سر وزنه بردار که شکل شماتیک آن در زیر ترسیم شده است، نمونه‌ای از خمش خالص می‌باشد.



دقت کنید که از نتایج حاصل از خمش خالص برای تحلیل سایر بارگذاری‌ها، مانند بارگذاری محوری خارج از مرکز و بارگذاری عرضی و تحلیل تیرها (یکی از عناصر اصلی سازه‌ها) می‌توان استفاده کرد که در ادامه نمونه‌هایی از آنها آورده شده است.

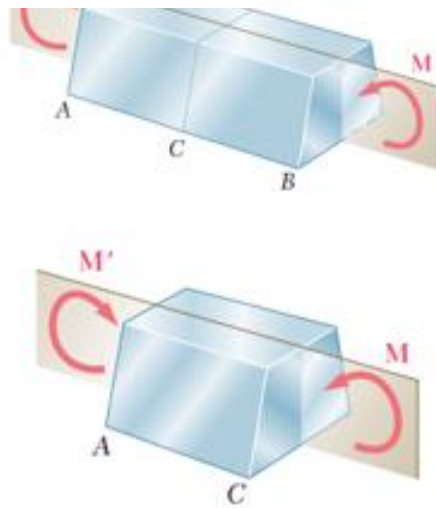




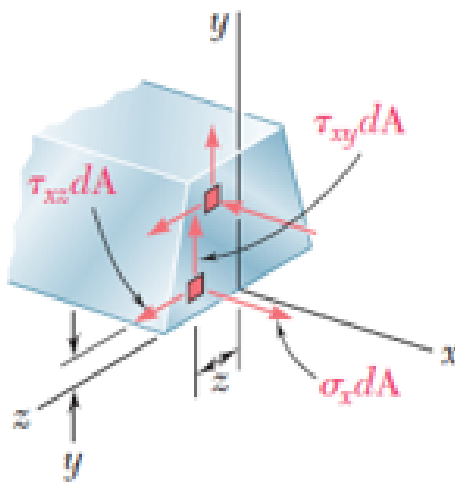
## ۴-۲ عضو متقارن در خمش



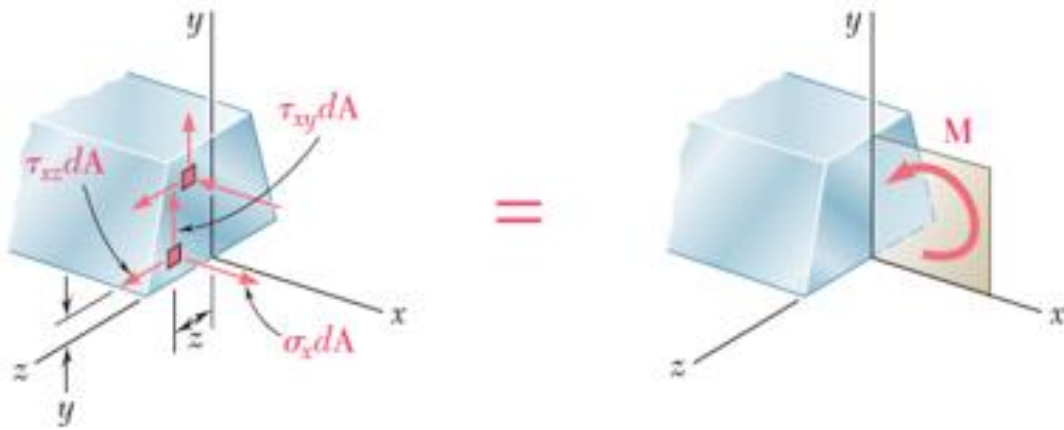
عضو منشوری  $AB$  را در نظر بگیرید که دارای صفحه تقارن است و تحت کوپل‌های مساوی و متضاد که در آن صفحه اثر می‌کنند، قرار دارد. این عضو را که تحت خمش خالص قرار دارد در نقطه اختیاری  $C$  مقطع می‌زنیم و تعادل آن را بررسی می‌کنیم. با بررسی تعادل به این نتیجه می‌رسیم که نیروهای داخلی در هر یک از مقاطع عرضی عضو متقارنی که تحت خمش خالص است با یک کوپل معادل هستند که همان لنگر خمشی مقطع می‌باشد. از استاتیک هم به یاد داریم که طبق قرارداد، اگر این لنگر تمایل به خم کردن عضو به صورت کاسه (تقعر به طرف بالا) داشته باشد، دارای علامت مثبت می‌باشد و در غیر اینصورت دارای علامت منفی است.



به منظور بررسی و بدست آوردن روابط مربوط به تنش و کرنش ناشی از خمش، قراردادهای شکل زیر برای تنش‌ها در حالت کلی در یک مقطع را که در بخش‌های قبل یاد گرفتیم، مرور خواهیم کرد.



حال اگر در نظر بگیریم که تنش‌های بالا معادل با لنگر خمشی در خمش خالص باشد، روابط زیر را می‌توانیم از تعادل استاتیکی بنویسیم:



- x نیرو در امتداد
- y لنگر نسبت به محور
- z لنگر نسبت به محور

$$\int \sigma_x dA = 0$$

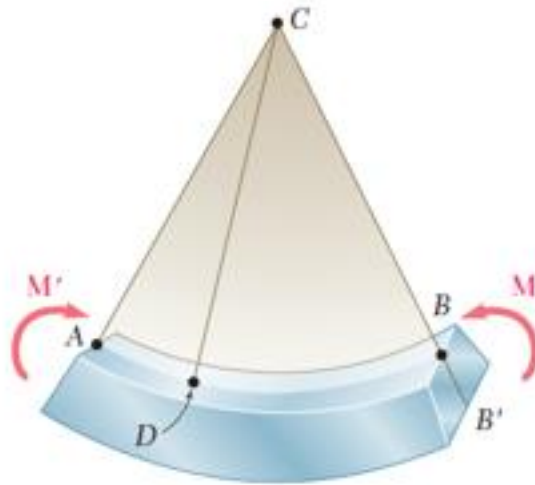
$$\int z \sigma_x dA = 0$$

$$\int (-y \sigma_x dA) = M$$

دقت کنید سه معادله دیگر تعادل نیز می‌توان برای مولفه نیرو در امتدادهای  $y$  و  $z$  و لنگر نسبت به محور  $x$  نوشت ولی باید دقت کنید که این سه معادله جدید فقط شامل مولفه‌های تنش برشی هستند که در این حالت از بارگذاری این مولفه‌های تنش برشی برابر صفر هستند.

همانطور که در بخش‌های قبلی یاد گرفتیم، توزیع واقعی تنش در یک مقطع عرضی، یک مساله نامعین استاتیکی است و با استفاده همزمان از هندسه تغییر شکل عضو حل می‌شود که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

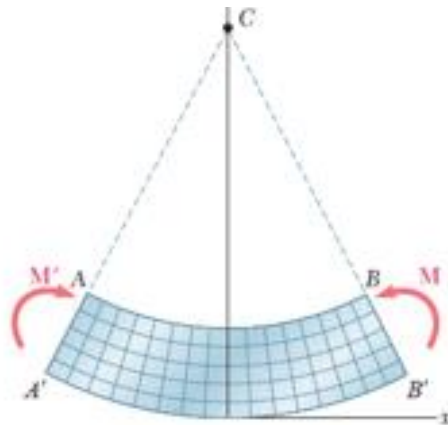
عضو مورد بررسی تحت تاثیر کوپل‌ها خمیده می‌شود، اما نسبت به صفحه تقارن به صورت متقارن باقی می‌ماند.



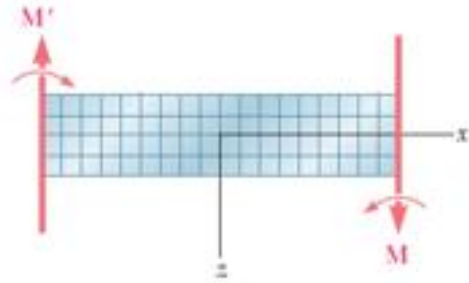
به علاوه، چون لنگر خمشی  $M$  در تمام مقاطع عرضی دارای مقدار یکسانی است، عضو به صورت یکنواخت خمیده می‌شود، لذا، خط  $AB$  که فصل مشترک وجه بالایی عضو با صفحه تقارن است دارای انحنای ثابت است. به عبارت دیگر، خط  $AB$  که ابتدا به صورت مستقیم بوده، به صورت دایره‌ای به مرکز  $C$  در می‌آید، همین طور خط  $A'B'$  (که در شکل نشان داده نشده است و فصل مشترک وجه پایینی عضو با صفحه تقارن می‌باشد). دقت کنید در این حالت که لنگر خمشی مثبت می‌باشد، خط  $AB$  کوتاه‌تر و خط  $A'B'$  بلندتر می‌شود.

نکته مهم دیگری که باید به آن توجه کنیم این است که با فرضیات انجام شده، مقاطع عرضی عمود بر محور عضو به صورت صفحه‌ای باقی می‌مانند و صفحه آنها از نقطه  $C$  می‌گذرد.

نتایج آزمایش‌ها و نیز نظریه‌های الاستیسیته (که فراتر از این کلاس است و در سال‌های آتی ادامه مسیر آکادمیک خواهید دید) برای عضوهای باریکی که تغییرشکل کوچک دارند تایید می‌کند که فقط مولفه‌های قائم  $\sigma_x$  بر هر یک اجزای کوچک مکعبی اثر می‌کند. لذا در هر نقطه از عضو باریکی که در خمش خالص است، حالت تنش تک محوری برقرار است. برای لنگر خمشی مثبت، همانطور که در شکل زیر مشاهده می‌کنید، خطوط  $AB$  و  $A'B'$  به ترتیب، افزایش و کاهش طول می‌دهند لذا کرنش  $\epsilon_x$  و تنش  $\sigma_x$  در قسمت بالایی عضو منفی اند (فشاری اند) و در قسمت پایین عضو مثبت اند (کششی اند).



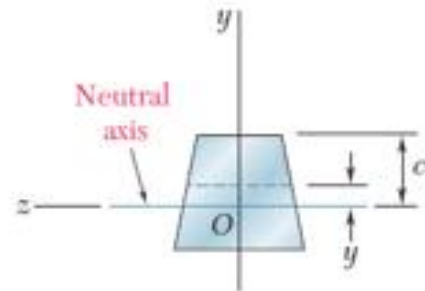
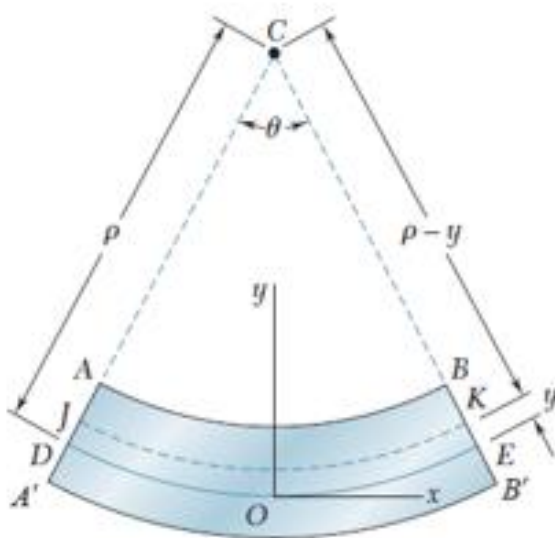
مقطع طولی و عمودی (صفحه تقارن)



مقطع طولی و افقی

با توجه به نکاتی که تا الان مطرح کردیم و شکل بالا، نتیجه می شود که باید به سطح موازات وجوه بالایی و پایینی عضو وجود داشته باشد که در آن کرنش  $\epsilon_x$  و تنش  $\sigma_x$  صفرند. این را **سطح خنثی** می گویند. سطح خنثی صفحه تقارن را در امتداد قوس دایره ای  $DE$  و مقطع عرضی را در امتداد یک خط مستقیم به نام **محور خنثی** قطع می کند.

از این به بعد مبدا مختصات را روی سطح خنثی می گیریم و فاصله هر نقطه را تا سطح خنثی با  $y$  نشان می دهیم.



اگر شعاع قوس  $DE$  را با  $\rho$  و زاویه مرکزی متناظر با  $DE$  تغییر شکل نداده برابر است، می نویسیم:

$$L = \rho\theta$$

چون قوس  $JK$  در فاصله  $y$  بالای سطح خنثی قرار دارد، طول  $L'$  آن چنین است:

$$L' = (\rho - y)\theta$$

چون طول اولیه قوس  $JK$  مساوی  $L$  است، تغییر شکل  $JK$  عبارت است از:

$$\delta = L' - L = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

لذا، کرنش طولی اجزای قوس  $JK$  برابر است با:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$

چون مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای می‌مانند، در تمام صفحاتی که به موازات صفحه تقارن‌اند، تغییر شکل‌های همسان روی می‌دهد. لذا مقدار کرنش در رابطه بالا، همه جا صحت دارد و نتیجه می‌شود کرنش طولی  $\varepsilon_x$  بر حسب فاصله  $y$  از سطح خنثی به صورت خطی تغییر می‌کند.

کرنش  $\varepsilon_x$  در  $y$  ماکزیمم به بیشترین مقدار خود می‌رسد. اگر ماکزیمم فاصله از سطح خنثی را  $c$  (که متناظر با سطح بالایی یا پایینی عضو است) با  $c$  و ماکزیمم قدرمطلق کرنش را با  $\varepsilon_m$  نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho}$$

یا به عبارتی

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{c} \varepsilon_m$$

لازم به ذکر است، هنوز نمی‌توان کرنش یا تنش را در نقطه‌ی معینی از عضو محاسبه کرد، زیرا مکان سطح خشی را در عضو مشخص نکرده‌ایم. در ادامه قصد داریم این مکان را مشخص کنیم.

فرض می‌کنیم که لنگر خمشی  $M$  طوری است که تنش‌های قائم در عضو کمتر از استقامت تسلیم  $\sigma_y$  است، یعنی، تنش در عضو کمتر از حد تناسب و نیز کمتر از حد الاستیک است. هیچ تغییر شکل دائمی وجود ندارد و قانون هوک برای تنش تک محوری به کار می‌رود. اگر ماده را همگن فرض کنیم و مدول الاستیسیته آن را با  $E$  نشان دهیم، در جهت طولی  $x$  داریم:

$$\sigma_x = E\epsilon_x$$

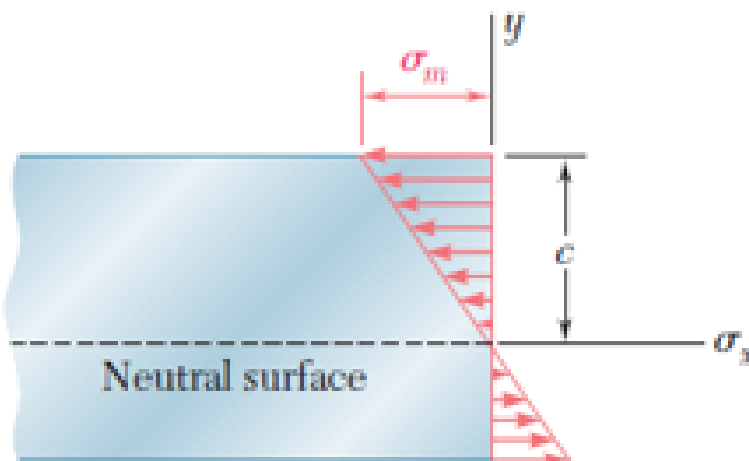
با جایگذاری روابط برای کرنش داریم:

$$E\epsilon_x = -\frac{y}{c}(E\epsilon_m)$$

یا به عبارتی:

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m$$

که در آن  $\sigma_m$  ماکزیمم مقدار مطلق تنش را نشان می‌دهد. یعنی در ناحیه الاستیک، تنش قائم بر حسب فاصله از سطح خشی به صورت خطی تغییر می‌کند. (مطابق شکل زیر)



حال روابط تعادلی که اول این بخش نوشتیم را بررسی می‌کنیم:

$$\int \sigma_x dA = 0$$

$$\int \sigma_x dA = \int \left( -\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA = -\frac{\sigma_m}{c} \int y dA = 0$$

از رابطه فوق، نتیجه می‌گیریم:

$$\int y dA = 0$$

### رابطه بالا شما را یاد چه چیزی می‌اندازد؟

از استاتیک به یاد داریم که این معادله نشان می‌دهد که ممان اول مقطع عرضی نسبت به محور خنثی آن صفر است. به عبارت دیگر، برای عضوی که در خمش خالص است، تا وقتی تنش در ناحیه الاستیک است، محور خنثی از مرکز سطح مقطع می‌گذرد.

حال معادله دیگر تعادل را بررسی می‌کنیم:

$$\int (-y \sigma_x dA) = M$$

$$\int (-y) \left( -\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA = M$$

یا به عبارتی:

$$\frac{\sigma_m}{c} \int y^2 dA = M$$

### رابطه بالا شما را یاد چه چیزی می‌اندازد؟



اما از کمی قبل تر می دانیم که در حالت خمش، محور خنثی از مرکز سطح مقطع عرضی می گذرد. در نتیجه،  $I$ ، ممان اینرسی (ممان دوم) مقطع عرضی نسبت به محور خنثی می باشد. در نتیجه:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I}$$

یا در حالت کلی داریم:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

فرمول بالا، را فرمول خمش الاستیک و تنش قائم  $\sigma_x$  ناشی از خمش عضو را تنش خمشی می گویند.

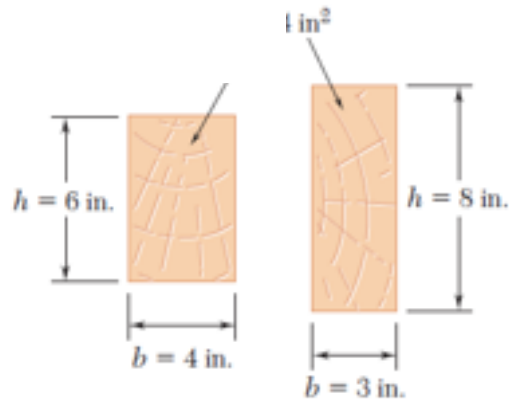
به نسبت  $\frac{I}{c}$  که در روابط بالا ظاهر شد، و فقط به شکل هندسی مقطع عرضی بستگی دارد، اساس (مدول) مقطع در حالت الاستیک می گویند و با  $S$  نشان می دهند. لذا:

$$\sigma_m = \frac{M}{S}$$

چون تنش ماکزیمم  $\sigma_m$  با مدول الاستیک مقطع  $S$  به طور معکوس متناسب است، واضح است که تیرها را باید تا حد امکان با مقدار  $S$  بزرگ طراحی کرد. مثلاً برای یک تیر با مقطع مستطیلی به عرض  $b$  و ارتفاع  $h$  داریم:

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah$$

که در آن،  $A$  مساحت مقطع عرضی تیر است. طبق این رابطه از میان دو تیر با مساحت مقطع عرضی یکسان، تیر با عمق بزرگتر دارای اساس (مدول) مقطع بزرگتری است و مقاومت بیشتری در برابر خمش دارد.



تغییر شکل عضو بر اثر لنگر خمشی  $M$  با انحنای سطح خشی اندازه گیری می شود. این انحنا با معکوس شعاع انحنا،  $1/\rho$  تعریف می شود. در ناحیه الاستیک روابط زیر را داریم:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec} \frac{Mc}{I}$$

و در نهایت داریم:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

## مثال های حل شده سری ۳

هدف: در این مثال با محاسبه تنش ناشی از خمش آشنا خواهیم شد.

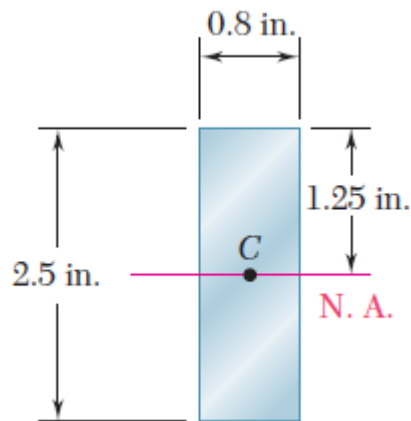
میله فولادی، با مقطع عرضی مستطیلی به ابعاد  $0.8 \text{ in} * 2.5 \text{ in}$  تحت دو کوپل مساوی و متضاد قرار دارد. این کوپل ها در صفحه تقارن عمودی میله اثر می کنند. مقدار لنگر خمشی  $M$  را که باعث تسلیم می شود را بیابید. فرض کنید  $\sigma_Y = 36 \text{ ksi}$

A steel bar of  $0.8 * 2.5\text{-in.}$  rectangular cross section is subjected to two equal and opposite couples acting in the vertical plane of symmetry of the bar. Determine the value of the bending moment  $M$  that causes the bar to yield.

Assume  $\sigma_Y = 36 \text{ ksi}$



ابتدا محور خنثی مقطع را بدست می آوریم. با توجه به اینکه می گذرد، داریم:



ممان اینرسی مقطع عرضی مستطیلی نسبت به محور خنثی به صورت زیر بدست می آید:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(0.8 \text{ in.})(2.5 \text{ in.})^3 = 1.042 \text{ in}^4$$

حال با استفاده از رابطه تنش در خمش خالص، مقدار لنگر خمشی لازم برای تسلیم به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$M = \frac{I}{c}\sigma_m = \frac{1.042 \text{ in}^4}{1.25 \text{ in.}}(36 \text{ ksi})$$

$$M = 30 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$

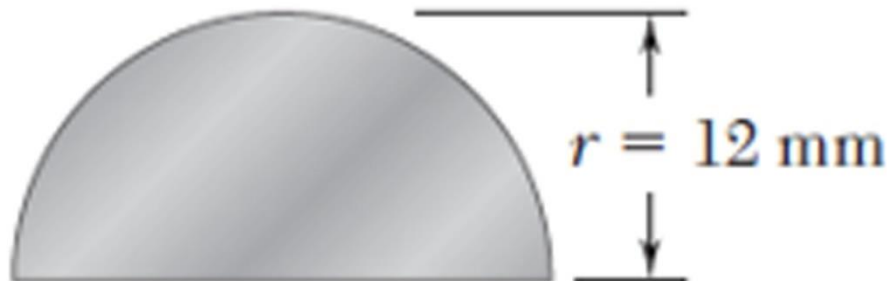
## مثال های حل شده سری ۳

۲

در این مثال با رابطه بین تنش و کرنش تحت لنگر خمشی آشنا خواهیم شد.

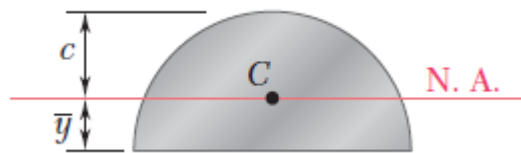
میله آلومینیومی با مقطع عرضی نیم دایره‌ای به شعاع ۱۲ میلی‌متر به صورت قوس دایره‌ای با شعاع متوسط ۲۵۰ سانتی‌متر خم شده است. اگر وجه تخت میله به طرف مرکز انحنا قوس خمیده باشد، ماکزیمم تنش کششی و فشاری را در میله بیابید.  $E = 70\text{GPa}$

An aluminum rod with a semicircular cross section of radius  $r = 12\text{ mm}$  is bent into the shape of a circular arc of mean radius  $\rho = 2.5\text{ m}$ . Knowing that the flat face of the rod is turned toward the center of curvature of the arc, determine the maximum tensile and compressive stress in the rod. Use  $E = 70\text{ GPa}$ .



این مساله را می توان از دو روش حل کرد. در روش اول با استفاده از روابطی که در کلاس درس مورد بحث قرار گرفت، با استفاده از شعاع انحنای، لنگر متناظر را بدست آورده و بعد مقادیر تنش ها را به راحتی محاسبه کرد. در روش دیگر، می توان از روابط بین کرنش ها برای محاسبه تنش ها استفاده کرد. برای تسلط به روابط مربوط به کرنش در این مثال از روش دوم استفاده می کنیم.

با استفاده از جداول مربوط به مرکز سطح (استاتیک)، مختصات مرکزوار (مرکز سطح) مقطع عرضی نیم دایره را می یابیم:



$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(12 \text{ mm})}{3\pi} = 5.093 \text{ mm}$$

یادآوری می کنم که محور خنثی از مرکزوار مقطع عرضی (نقطه C) می گذرد. فاصله دورترین نقطه مقطع عرضی تا محور خنثی به صورت زیر می باشد:

$$c = r - \bar{y} = 12 \text{ mm} - 5.093 \text{ mm} = 6.907 \text{ mm}$$

حال کرنش حداکثر نرمال را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} = \frac{6.907 \times 10^{-3} \text{ m}}{2.5 \text{ m}} = 2.763 \times 10^{-3}$$

و با استفاده از قانون هوک، تنش حداکثر به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\sigma_m = E\epsilon_m = (70 \times 10^9 \text{ Pa})(2.763 \times 10^{-3}) = 193.4 \text{ MPa}$$

دقت کنید که چون این طرف میله به طرف خارج از مرکز انحنای خمیده می شود، تنش محاسبه شده از نوع کششی می باشد و ماکزیمم تنش فشاری روی وجه تخت میله به وجود می آید. باتوجه به اینکه تنش با فاصله از محور خنثی متناسب است، داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{comp}} &= -\frac{\bar{y}}{c}\sigma_m = -\frac{5.093 \text{ mm}}{6.907 \text{ mm}}(193.4 \text{ MPa}) \\ &= -142.6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

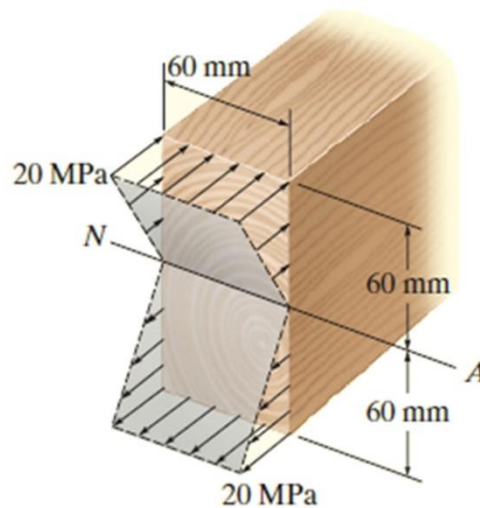
### مثال های حل شده سری ۳

۳

هدف: در این مثال با محاسبه نیرو و لنگر خمشی ناشی از توزیع تنش نرمال در یک مقطع آشنا خواهیم شد.

توزیع تنش در مقطع مستطیلی تیری به صورت شکل مقابل می باشد. لنگر خمشی داخلی  $M$  را در مقطع تحت توزیع تنش نشان داده شده محاسبه نمایید.

A beam has a rectangular cross section and is subjected to the stress distribution shown in figure. Determine the internal moment  $M$  at the section caused by the stress distribution.



این مساله را از دو راه حل می توان حل کرد. در روش اول از

روش دوم نیروی ناشی از توزیع تنش را محاسبه و با استفاده از اصول استاتیک مقدار لنگر خمشی را محاسبه می نماییم.

روش اول:

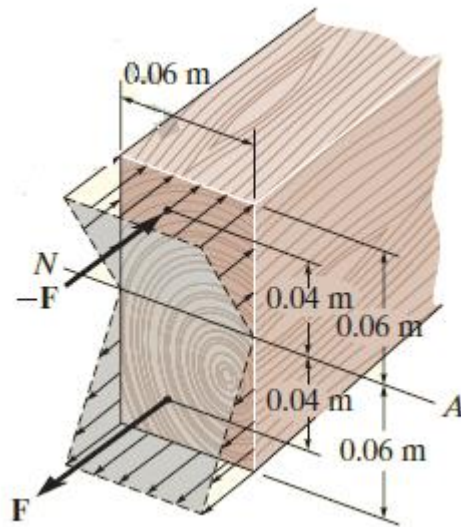
$$I = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} (0.06 \text{ m})(0.12 \text{ m})^3 = 8.64(10^{-6}) \text{ m}^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I}$$

$$M = \frac{20(10^6) \times 8.64(10^{-6})}{0.06} = 2.88(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} = 2.88 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

روش دوم:

با توجه به توزیع تنش و با استفاده از مفاهیم استاتیک، نیروی برآیند ناشی از این توزیع تنش را مطابق شکل زیر بدست می آوریم. به یاد داریم که محل اثر نیروی برآیند در مرکزوار توزیع تنش می باشد.



$$F = \frac{1}{2} (0.06 \text{ m}) [20(10^6) \text{ N/m}^2] (0.06 \text{ m}) = 36.0(10^3) \text{ N} = 36.0 \text{ kN}$$

$$M = (36.0 \text{ kN}) (0.08 \text{ m}) = 2.88 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



## مثال های حل شده سری ۳

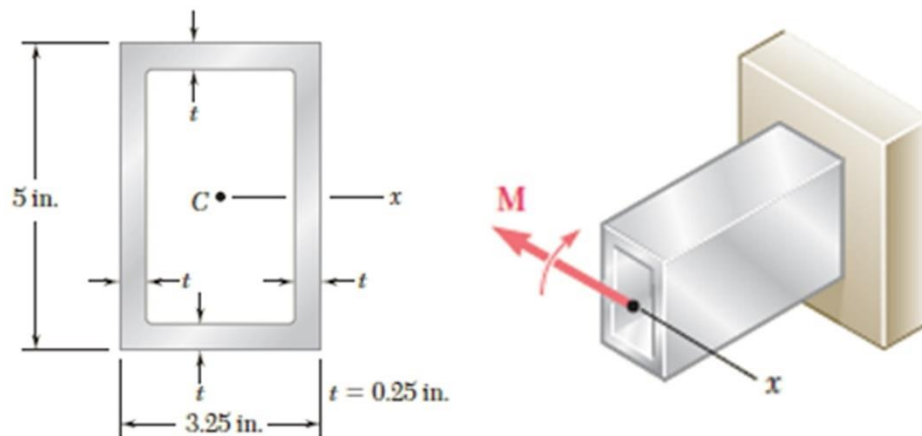
۴

هدف: در این مثال با محاسبه تنش، کرنش، شعاع انحنای و طراحی تحت خمش آشنا خواهیم شد.

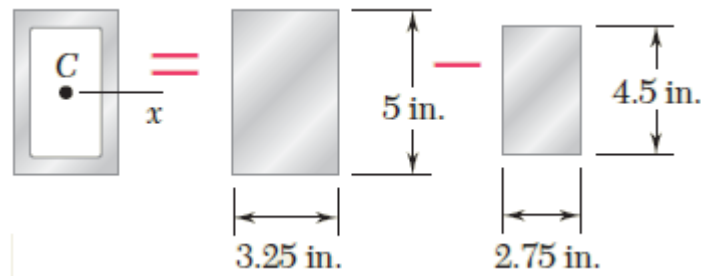
لوله مستطیلی نشان داده شده از آلیاژ آلومینیوم ساخته شده است. با صرف نظر از تاثیر فیلت (ماهیچه، کرده ها) مطلوب است: (الف) لنگر خمشی  $M$  برای ضریب اطمینان 3 (ب) شعاع انحنای لوله

$$E = 10.6 \times 10^6 \text{ psi} \quad \sigma_T = 40 \text{ ksi}, \sigma_U = 60 \text{ ksi}$$

A beam has a rectangular cross section and is subjected to the stress distribution shown in figure. Determine the internal moment  $M$  at the section caused by the stress distribution.



ابتدا محل محور خنثی و ممان اینرسی حول محور خنثی را د



$$I = \frac{1}{12}(3.25)(5)^3 - \frac{1}{12}(2.75)(4.5)^3 \quad I = 12.97 \text{ in}^4$$

با توجه به مقادیر تنش نهایی و ضریب اطمینان برابر 3، مقدار تنش مجاز به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

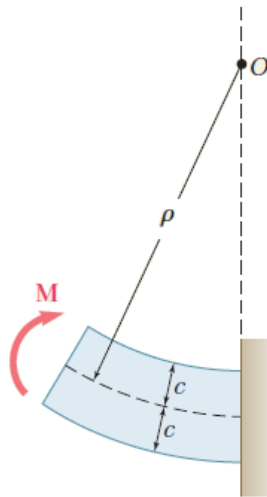
$$\sigma_{\text{all}} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{60 \text{ ksi}}{3.00} = 20 \text{ ksi}$$

نکته مهم که لازم است دقت کنید، مقدار تنش مجاز کمتر از تنش تسلیم می‌باشد به عبارتی  $\sigma_{\text{all}} < \sigma_Y$  و لذا لوله در ناحیه الاستیک قرار دارد و از روابط مربوط به خمش خالص در محدوده الاستیک می‌توان استفاده کرد. لذا با محاسبه دورترین فاصله مقطع عرضی از تار خنثی و روابط خمش خالص، مقدار لنگر خمشی را به صورت زیر محاسبه می‌نماییم.

$$c = \frac{1}{2}(5 \text{ in.}) = 2.5 \text{ in.}$$

$$\sigma_{\text{all}} = \frac{Mc}{I} \quad M = \frac{I}{c}\sigma_{\text{all}} = \frac{12.97 \text{ in}^4}{2.5 \text{ in.}}(20 \text{ ksi}) \quad M = 103.8 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$

در این مرحله با استفاده از روابط مربوط به شع



$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{103.8 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{(10.6 \times 10^6 \text{ psi})(12.97 \text{ in}^4)} = 0.755 \times 10^{-3} \text{ in}^{-1}$$

$$\rho = 1325 \text{ in.} \qquad \rho = 110.4 \text{ ft}$$

شعاع انحنا را می‌توانیم از روش دیگری نیز به صورت زیر محاسبه نماییم:

$$\epsilon_m = \frac{\sigma_{\text{all}}}{E} = \frac{20 \text{ ksi}}{10.6 \times 10^6 \text{ psi}} = 1.887 \times 10^{-3} \text{ in./in.}$$

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \qquad \rho = \frac{c}{\epsilon_m} = \frac{2.5 \text{ in.}}{1.887 \times 10^{-3} \text{ in./in.}}$$

$$\rho = 1325 \text{ in.} \qquad \rho = 110.4 \text{ ft}$$

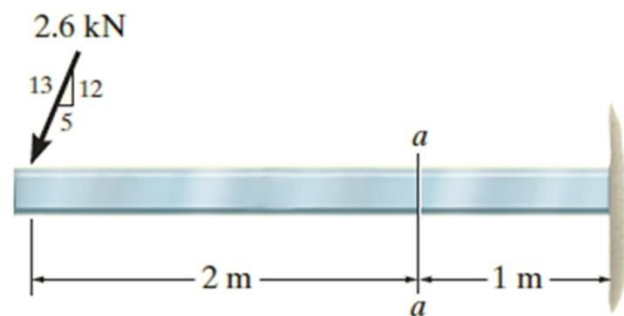
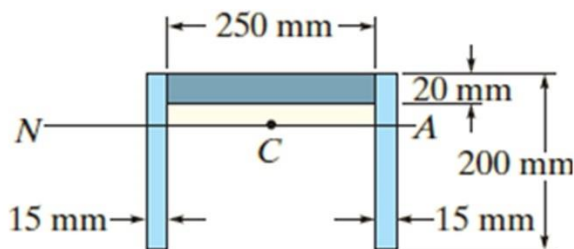
## مثال های حل شده سری ۳

۵

هدف: در این مثال با محاسبه تنش ناشی از خمش در مقطعی از طول تیر تحت بارگذاری دلخواه آشنا خواهیم شد.

تیری با سطح مقطع نشان داده شده، تحت بارگذاری به صورت شکل می باشد. حداکثر تنش ناشی از خمش در مقطع a-a را بدست آورید.

The beam shown in figure has a cross-sectional area in the shape of a channel. Determine the maximum bending stress that occurs in the beam at section a-a.

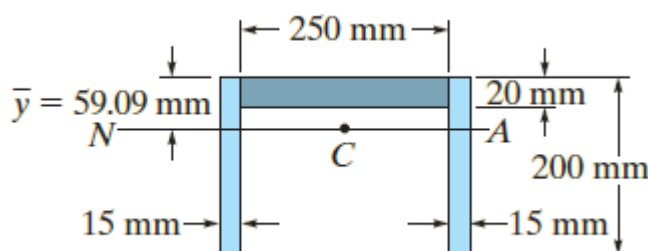


در این مساله، مقدار لنگر خمشی در مقطع مورد بررسی از اص

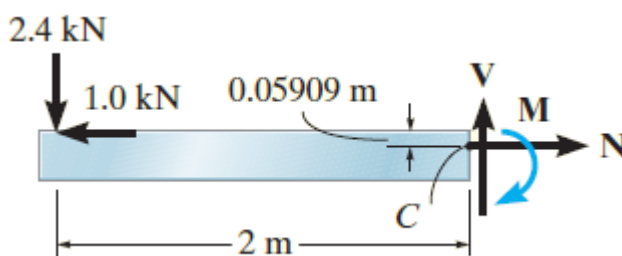
یادگرفته شده در استاتیک، محل محور خنثی مقطع عرضی که همان مرکز سطح مقطع مرکب نشان داده شده می باشد را بدست می آوریم. بالای مقطع را به عنوان مبدا برای محاسبه محل مرکزوار در نظر می گیریم:

$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}A}{\sum A} = \frac{2[0.100 \text{ m}](0.200 \text{ m})(0.015 \text{ m}) + [0.010 \text{ m}](0.02 \text{ m})(0.250 \text{ m})}{2(0.200 \text{ m})(0.015 \text{ m}) + 0.020 \text{ m}(0.250 \text{ m})}$$

$$= 0.05909 \text{ m} = 59.09 \text{ mm}$$



در مقطع مورد نظر، مقطعی زده و با بررسی تعادل حول محور خنثی، مقدار لنگر خمشی را بدست می آوریم. از جلسات قبل به یاد داریم که نیروی محوری در مقطع مورد نظر از مرکز سطح مقطع عرضی می گذرد.



$$\downarrow + \sum M_{NA} = 0$$

$$2.4 \text{ kN} (2 \text{ m}) + 1.0 \text{ kN} (0.05909 \text{ m}) - M = 0$$

$$M = 4.859 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

حال با استفاده از قضیه محورهای موازی، مقدار ممان اینرسی

$$I = \left[ \frac{1}{12}(0.250 \text{ m})(0.020 \text{ m})^3 + (0.250 \text{ m})(0.020 \text{ m})(0.05909 \text{ m} - 0.010 \text{ m})^2 \right] \\ + 2 \left[ \frac{1}{12}(0.015 \text{ m})(0.200 \text{ m})^3 + (0.015 \text{ m})(0.200 \text{ m})(0.100 \text{ m} - 0.05909 \text{ m})^2 \right] \\ = 42.26(10^{-6}) \text{ m}^4$$

حال به راحتی تنش حداکثر ناشی از خمش را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$c = 0.200 \text{ m} - 0.05909 \text{ m} = 0.1409 \text{ m}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{4.859(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.1409 \text{ m})}{42.26(10^{-6}) \text{ m}^4} = 16.2 \text{ MPa (C)}$$

دقت کنید طبق توضیحات سر کلاس، تنش کل در مقطع عرضی مورد بحث ناشی از نیروی محوری و برشی و لنگر خمشی می‌باشد که برای محاسبه آن از اصل جمع آثار استفاده می‌شود..



مقاومت خمشی یا لنگر مجاز یک مقطع، حداکثر لنگری است که می‌توان به مقطع وارد کرد بدون اینکه تنش‌های نرمال ناشی از خمش بیشتر از مقدار مجاز شوند. در یک مقطع متقارن حول محور خمش با مدول مقطع  $S$  و تنش مجاز  $\sigma_{all}$  مقدار لنگر مجاز عبارت است از:

$$\sigma_{max} = \sigma_{all} = \frac{M}{S} \Rightarrow M_{max} = \sigma_{all} S$$

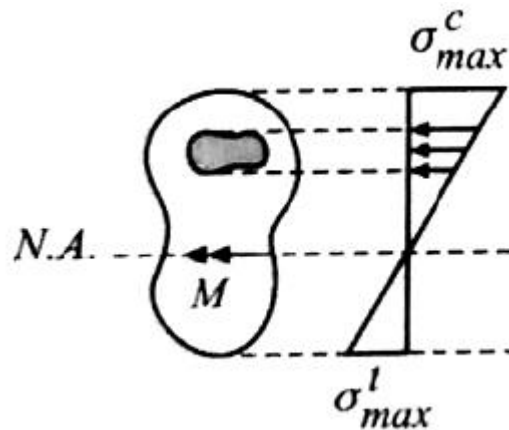
بنابراین مقاومت خمشی یک مقطع، به جنس مقطع و ابعاد آن بستگی دارد.

اگر یادتان باشد در جلسات قبلی بحث کردیم که در برخی مقاطع و مصالح ما شاهد رفتار متفاوت در کشش و فشار هستیم. در این گونه موارد که به صورت کلی شامل یک مقطع نامتقارن و دارای رفتار متفاوت در کشش و فشار، در صورتی که اساس مقطع فشاری  $S_c$  و اساس مقطع کششی  $S_t$  بوده و تنش مجاز فشاری برابر  $\sigma_{all}^c$  و تنش مجاز کششی برابر  $\sigma_{all}^t$  باشد، مقدار مقاومت خمشی مقطع یا لنگر مجاز مقطع به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{cases} \sigma_{all}^c = \frac{M_1}{S_c} \Rightarrow M_1 = \sigma_{all}^c S_c \\ \sigma_{all}^t = \frac{M_2}{S_t} \Rightarrow M_2 = \sigma_{all}^t S_t \end{cases} \Rightarrow M_{max} = \min \{M_1, M_2\}$$



از جلسه قبل به یاد داریم که لنگر خمشی باعث ایجاد تنش نرمال در یک مقطع شده که این تنش‌های نرمال معادل نیروی محوری در آن مقطع می‌باشند. در ادامه می‌خواهیم نیروی محوری حاصل از لنگر خمشی وارد بر بخشی از مقطع را محاسبه نماییم. مقطع زیر را در نظر بگیرید. این مقطع تحت اثر لنگر خمشی  $M$  قرار دارد و این لنگر تنش‌های نرمال فشاری را بر قسمت هاشور خورده وارد می‌کند. برآیند این تنش‌ها معادل یک نیروی محوری می‌باشد که مقدار این نیرو برای المانی با مساحت  $dA$  و همچنین برای کل سطح هاشورخورده با مساحت  $A$  برابر است با:



$$dF = \sigma \times dA \quad \Rightarrow \quad F = \int_A \sigma dA$$

با قرار دادن اندازه تنش در رابطه فوق، اندازه نیرو به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} |\sigma| = \frac{My}{I} \\ F = \int_A \sigma dA \end{cases} \Rightarrow F = \frac{M}{I} \int_A y dA \Rightarrow F = \frac{MQ}{I}$$

دقت کنید که  $Q$  در رابطه فوق لنگر اول سطح هاشورخورده نسبت به محور خنثی می‌باشد.

۴-۵

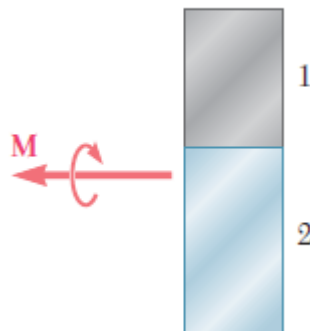
### خمش در مقاطع مرکب یکپارچه و روش مقطع معادل



اعضایی که تا اینجا تحت خمش بررسی کردیم از یک ماده همگن با مدول الاستیسیته معلوم ساخته شده بودند. در ادامه به محاسبه تنش ناشی از خمش خالص در اعضای که از دو یا چند ماده با مدول‌های الاستیسیته مختلف ساخته شده باشند، آشنا خواهیم شد.

فرض کنید میله‌ای از دو قسمت با مواد مختلف ساخته شده باشد که مقطع عرضی این دو قسمت به صورت شکل زیر به هم متصل شده باشند. این میله تحت خمش خالص همانند میله تک ماده، تغییر شکل می‌دهد.





همچنین با توجه به اینکه رابطه کرنش و شعاع انحنا بدون در نظر گرفتن هیچ فرضی در خصوص رابطه تنش-کرنش ماده یا مواد بدست آمد، لذا رابطه کرنش قائم بر حسب فاصله از محور خنثی مقطع به صورت خطی تغییر کرده و داریم:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$

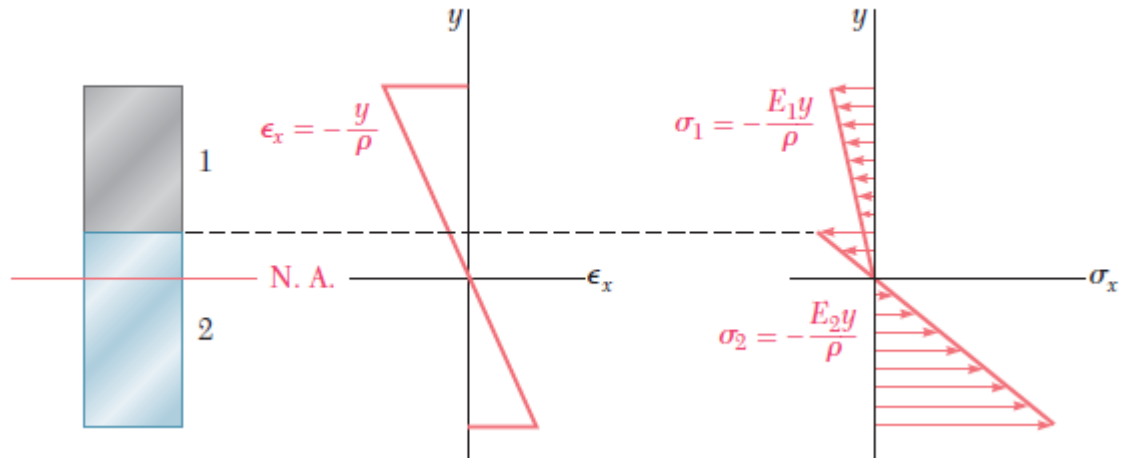
نکته مهمی که باید توجه کنیم این است که دیگر نمی توان فرض کرد محور خنثی از مرکز سطح مقطع مرکب می گذرد و باید محل محور خنثی را در چنین مقاطعی تعیین کنیم که در ادامه به این مساله پرداخته خواهد شد.

همچنین با توجه به اینکه مدول الاستیسیته دو ماده با هم تفاوت دارند، لذا تنش قائم در هر ماده نیز یکسان نبوده و به صورت زیر می باشد:

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_x = -\frac{E_1 y}{\rho}$$

$$\sigma_2 = E_2 \epsilon_x = -\frac{E_2 y}{\rho}$$

با توجه به روابط بالا، نتیجه می گیریم که منحنی توزیع تنش از دو پاره خط راست به صورت شکل زیر تشکیل می شود.



نیروی  $dF_1$  وارد بر جز مساحت  $dA$  قسمت بالایی مقطع عرضی (در ماده 1) به صورت زیر می باشد:

$$dF_1 = \sigma_1 dA = -\frac{E_1 y}{\rho} dA$$

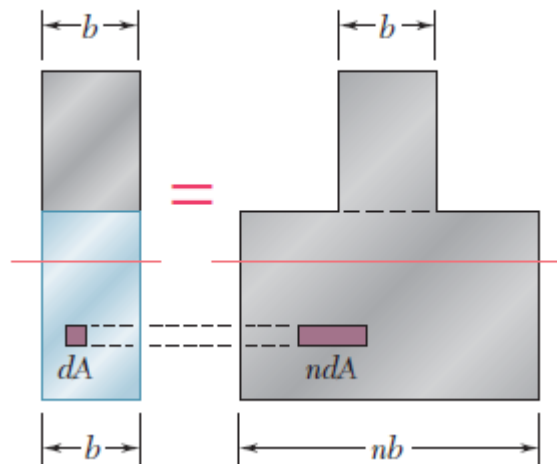
همچنین نیروی  $dF_2$  وارد بر جز مساحت  $dA$  قسمت پایینی مقطع عرضی (در ماده 2) به صورت زیر می باشد:

$$dF_2 = \sigma_2 dA = -\frac{E_2 y}{\rho} dA$$

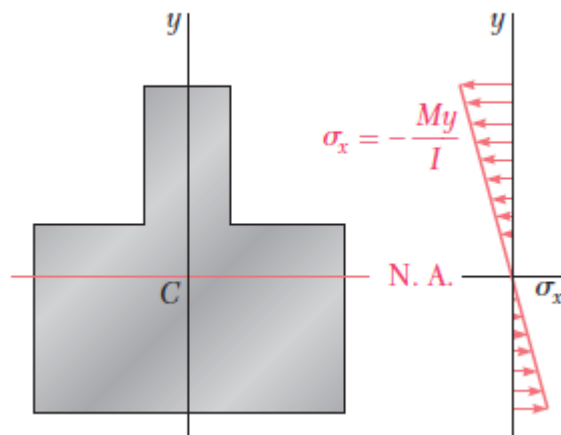
اگر نسبت مدول الاستیسیته دو ماده به صورت  $n = \frac{E_2}{E_1}$  باشد، داریم:

$$dF_2 = -\frac{(nE_1)y}{\rho} dA = -\frac{E_1 y}{\rho} (n dA)$$

نکته جالبی که از مقایسه نیروهای وارد بر دو ماده بدست می آید، این است که نیروی وارد بر یک جزء با مساحت  $n dA$  از ماده اول برابر با  $dF_2$  است. به عبارت دیگر، اگر هر دو قسمت میله از ماده اول ساخته شده باشند، با ضرب کردن عرض اجزای قسمت پایینی در  $n$ ، مقاومت میله در برابر خمش تغییر نمی کند. دقت کنید که این تغییر ابعاد (عریض شدگی یا باریک شدگی که بستگی به مقدار  $n$  دارد) در جهت موازی با محور خشی مقطع روی می دهد زیرا فاصله  $y$  هر جزء از محور خشی باید ثابت بماند. مقطع عرضی جدیدی که به این طریق حاصل می شود را مقطع تبدیل یافته یا مقطع معادل می گویند که در شکل زیر مشاهده می کنید.



به عبارتی مقطع تبدیل یافته هم ارز است با مقطع عرضی عضو در صورتی که عضو از یک ماده همگن با مدول الاستیسیته  $E_1$  ساخته شده است. لذا برای تعیین محور خنثی مقطع و تنش قائم در نقاط مختلف مقطع از روابط مربوط به عضو تک ماده می توان استفاده کرد. به عبارتی محور خنثی از مرکز سطح مقطع تبدیل یافته می گذرد (به صورت شکل زیر):



و تنش نرمال در هر نقطه از مقطع تبدیل یافته را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

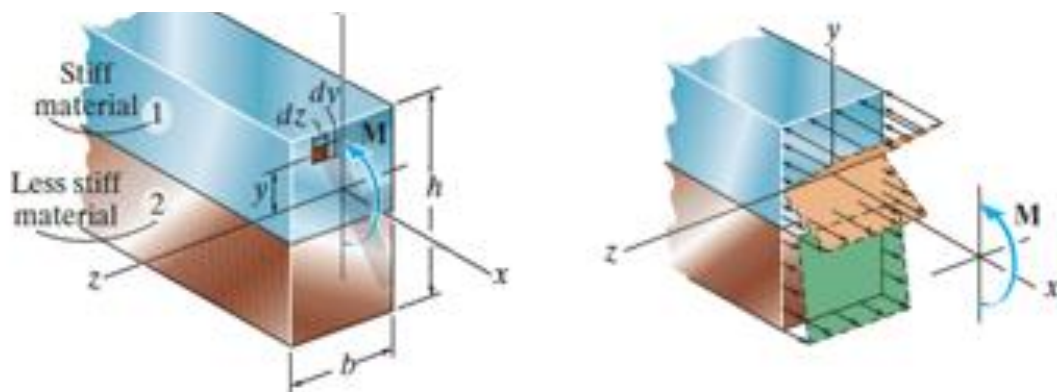
$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

که  $y$  فاصله از محور خشی و  $I$  ممان اینرسی مقطع تبدیل یافته نسبت به محور عبوری از مرکز سطح آن می باشد. نکته خیلی مهمی که باید دقت کنید این است که برای تعیین تنش در هر نقطه از ماده 1 ( $\sigma_1$ ) کافی است تنش  $\sigma_x$  را در نقطه متناظر مقطع تبدیل یافته محاسبه کنیم. ولی برای تعیین تنش در هر نقطه از ماده 2 ( $\sigma_2$ )، باید تنش  $\sigma_x$  محاسبه شده در نقطه متناظر مقطع تبدیل یافته را در  $n$  ضرب کنیم.

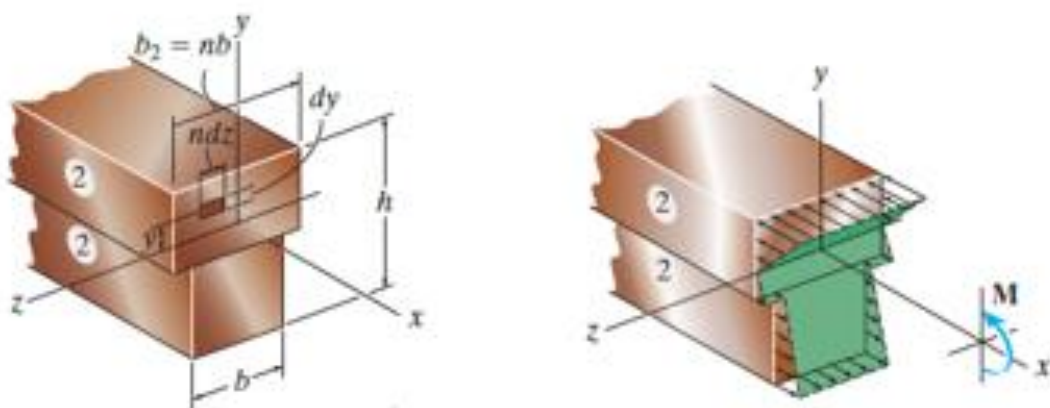
همچنین تغییر شکل یک عضو مرکب تحت خمش خالص را می توانیم با استفاده از مقطع تبدیل یافته تعیین کنیم. می دانیم مقطع تبدیل یافته نشان دهنده مقطع عرضی عضو ساخته شده از ماده همگنی با مدول  $E_1$  است که تغییر شکل آن مانند تغییر شکل میله مرکب است. لذا شعاع انحنای عضو مرکب را به صورت زیر می توان تعیین کرد:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I}$$

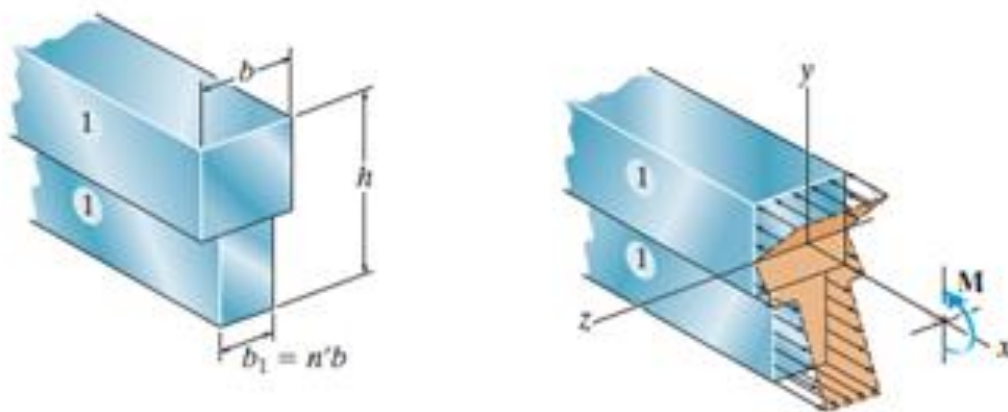
که در آن  $I$  ممان اینرسی مقطع تبدیل یافته نسبت به محور خشی خود می باشد.



مقطع مرکب



$$n = \frac{E_1}{E_2} \quad \text{تبدیل مقطع مرکب به مقطع معادل از جنس ماده 2}$$

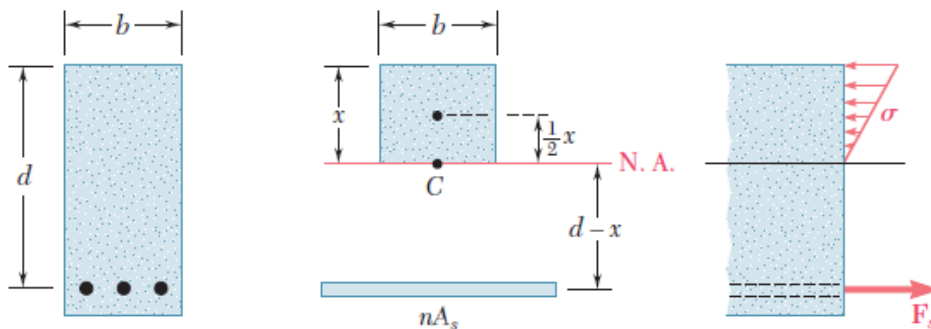


$$n' = \frac{1}{n} = \frac{E_2}{E_1} \quad \text{تبدیل مقطع مرکب به مقطع معادل از جنس ماده 1}$$



تیرهای بتن مسلح (بتنی تقویت شده)، یکی از نمونه‌های مهم از عضوهای ساختمانی است که از دو ماده مختلف تشکیل شده‌اند. این تیرها وقتی برای لنگرهای خمشی مثبت طراحی می‌شوند، با میله‌ها (آرماتورها) فولادی که به فاصله کمی بالای وجه پایینی تیر قرار می‌گیرند تقویت می‌شوند. (برای لنگر منفی برعکس) چون بتن در کشش خیلی ضعیف است، در زیر سطح خنثی ترک برمی‌دارد و آرماتورها تمام بار کششی را تحمل می‌کنند در حالی که قسمت بالایی تیر بتنی بار فشاری را تحمل می‌کند.

برای تعیین مقطع تبدیل یافته یک تیر بتنی تقویت شده (بتن مسلح)، کل سطح مقطع عرضی  $A_s$  آرماتورهای فولادی را با  $nA_s$  جایگزین می‌کنیم.  $n$  برابر است با نسبت مدول الاستیسیته فولاد به بتن  $n = \frac{E_s}{E_c}$ . چون بتن در تیر فقط تحت فشار به خوبی عمل می‌کند، فقط قسمتی از مقطع عرضی را که در بالای محور خنثی قرار دارد باید در مقطع تبدیل یافته در نظر گرفت به عبارتی ناحیه زیر تار خنثی (ناحیه کششی) بدون بتن فرض می‌شود.



برای بدست آوردن محل تار خنثی، عمق ناحیه فشاری را  $x$  در نظر گرفته و مرکز سطح مقطع همگن شده (تبدیل یافته)، را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$(bx) \frac{x}{2} - nA_s (d - x) = 0$$

یا:

$$\frac{1}{2}bx^2 + nA_s x - nA_s d = 0$$



مقاطعی که از روی هم گذاشتن چند قطعه بدون اتصال به یکدیگر ساخته می‌شوند، غیر یکپارچه نامیده می‌شوند (برخلاف مقاطع مرکب یکپارچه که در بخش قبلی مورد بررسی قرار گرفت). در این مقاطع هر قسمت به صورت مجزا عمل کرده و محور خنثی برای هر قسمت مجزا، از مرکز سطح همان قسمت می‌گذرد. به عبارتی در مقطع محور خنثی واحد وجود ندارد. برای محاسبه تنش در این مقاطع به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا لنگر خمشی تحمل شده توسط هر قسمت را به دست می‌آوریم. سهم هر قسمت از لنگر خمشی با تقریب مناسبی از رابطه زیر بدست می‌آید:

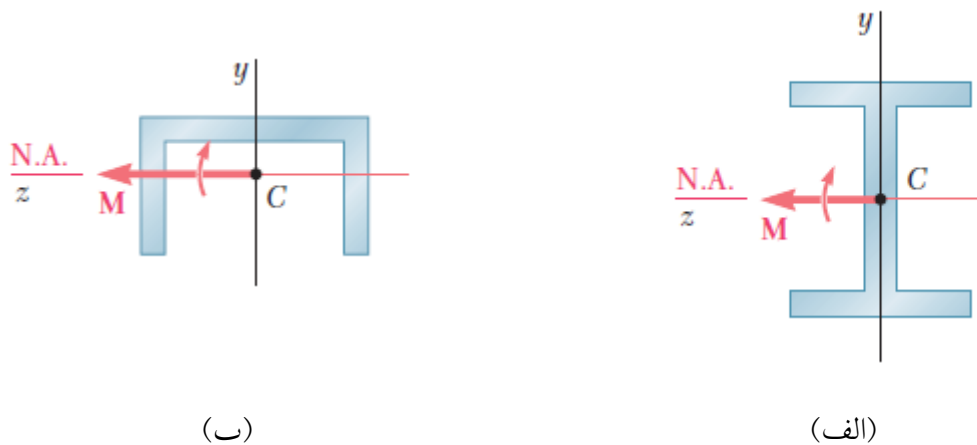
$$M_i = \frac{E_i I_i}{\sum E_i I_i} M$$

دقت کنید که در این رابطه  $I_i$  ممان اینرسی قسمت  $i$  ام نسبت به محور خنثای خودش می‌باشد.

ب) با به دست آوردن سهم لنگر برای هر قسمت، تنش خمشی برای هر قسمت مستقلاً محاسبه می‌شود.



در بخش‌های قبلی فقط خمش خالص عضوهایی را بررسی کردیم که حداقل یک صفحه تقارن داشتند و تحت کویل‌هایی که در آن صفحه اثر می‌کنند قرار می‌گیرند که نمونه آن در شکل‌های زیر نشان داده شده است.



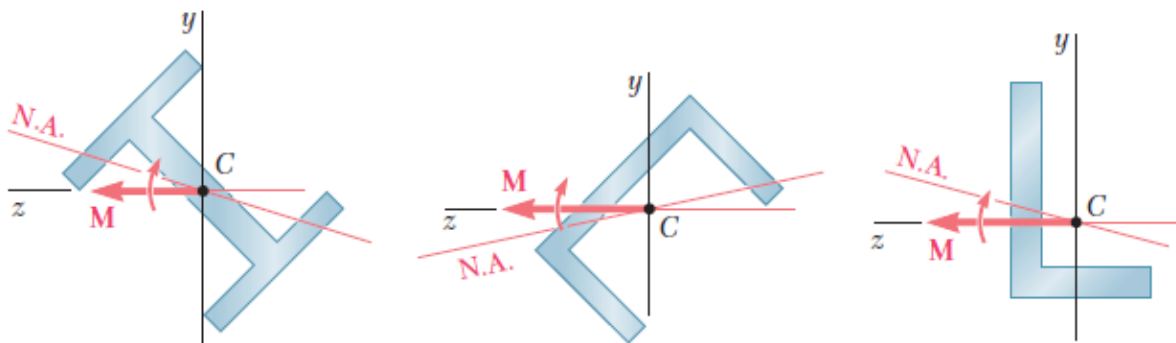
(ب)

(الف)

مقطع عرضی (الف) عضوی با دو صفحه تقارن عمودی و افقی را نشان می‌دهد در حالی که مقطع عرضی (ب) عضوی را نشان می‌دهد که فقط یک صفحه تقارن عمودی دارد. (فرض صفحه تقارن عمودی الزامی بود)

در هر دو شکل بالا، کوپل وارد بر مقطع عرضی در صفحه تقارن عمودی عضو اثر می‌کند و با بردار کوپل افقی  $M$  نشان داده می‌شود. همچنین، محور خنثی مقطع عرضی بر محور کوپل منطبق است.

در ادامه، حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که در آن کوپل‌های خمشی در صفحه تقارن عضو اثر نمی‌کنند، یا اینکه عضو صفحه تقارن ندارد (مانند شکل‌های زیر). در این موارد، نمی‌توان فرض کرد که عضو در صفحه کوپل خم می‌شود. در شکل‌های زیر کوپل وارد بر مقطع در یک صفحه عمودی اثر می‌کند (بردار کوپل افقی  $M$ ). دقت کنید چون صفحه عمودی در شکل‌های زیر صفحه تقارن نیست نمی‌توان گفت عضو در آن صفحه خم می‌شود، یا محور خنثی مقطع بر محور کوپل منطبق است.



برای اینکه از روابط بدست آمده در بخش‌های قبلی (خمش متقارن) برای خمش نامتقارن استفاده نماییم لازم است شرایطی که در آن محور خنثی مقطع عرضی، که هر شکلی می‌تواند داشته باشد، بر محور کوپل  $M$  موثر بر آن مقطع منطبق باشد، بیابیم.

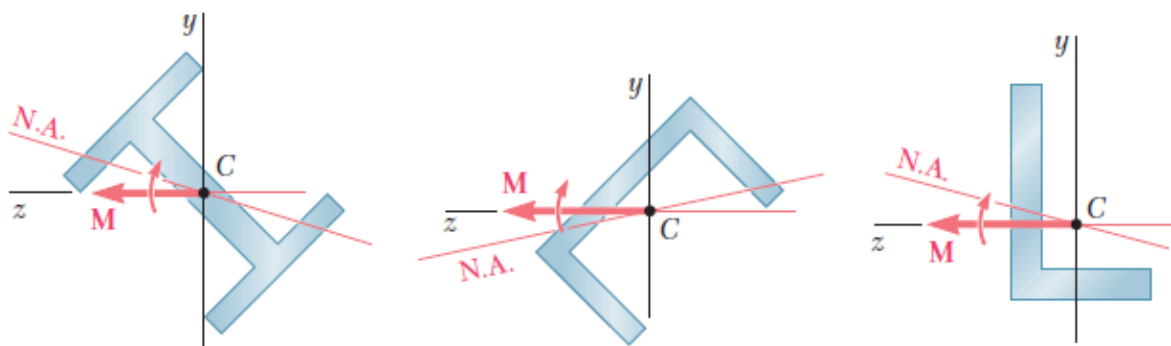
با بررسی تعادل در این حالت، نتیجه می‌شود محور خنثی مقطع عرضی بر محور کوپل  $M$  موثر بر آن مقطع منطبق خواهد بود اگر و فقط اگر بردار کوپل  $M$  در امتداد یکی از محورهای اصلی گذرا از مرکز سطح مقطع عرضی باشد.

دقت کنید در شکل‌های زیر، هیچ یک از محورهای مختصات، محور تقارن یا محور اصلی مقاطع نشان داده شده نیست. لذا، بردار کوپل  $M$  در امتداد محور اصلی نیست و محور خنثی بر محور کوپل منطبق نیست.

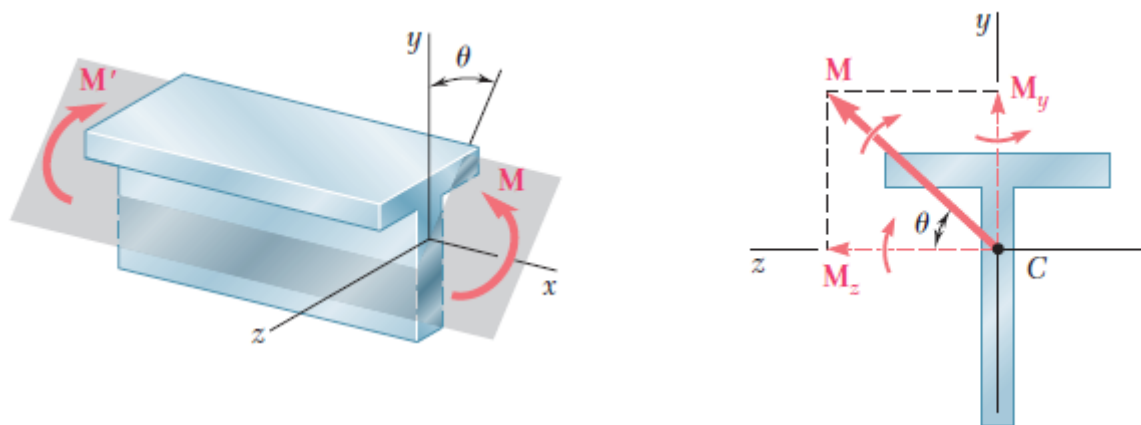


از استاتیک به یاد داریم که هر مقطعی حتی اگر نامتقارن باشد، دارای محورهای اصلی می‌باشد که از طریق دایره موهر می‌توان تعیین نمود.

لذا به صورت کلی در خصوص شکل‌های زیر می‌توان محورهای اصلی را پیدا و با تجزیه بردار کوپل در امتداد این محورها، از روابط قبلی بدست آمده برای خمش و اصل جمع آثار برای محاسبه تنش‌ها استفاده کرد. در ادامه مفصل در این خصوص صحبت خواهیم کرد.



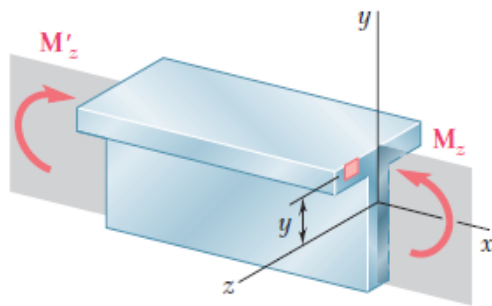
عضو مطابق شکل زیر، تحت کوپل‌های خمشی  $M$  و  $M'$  قرار دارد و کوپل‌ها در صفحه‌ای که با صفحه قائم زاویه  $\theta$  دارد، اثر می‌کند. بردار کوپل  $M$  با محور افقی  $z$  زاویه  $\theta$  دارد. این بردار را در امتداد محورهای  $y$  و  $z$  تجزیه می‌کنیم:



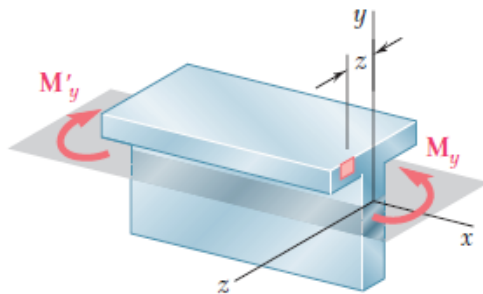
$$M_z = M \cos \theta$$

$$M_y = M \sin \theta$$

چون محورهای  $y$  و  $z$  محورهای اصلی مرکزی مقطع عرضی هستند (چرا؟) برای محاسبه تنش‌های ناشی از لنگرهای  $M_y$  و  $M_z$  می‌توان از روابط خمش متقارن استفاده کرد. لذا برای هر کدام به صورت زیر داریم:



$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}$$



$$\sigma_x = +\frac{M_y z}{I_y}$$

(در روابط بالا به علامت رابطه و ممان اینرسی هر رابطه نسبت به محور مربوطه خیلی دقت شود).

توزیع تنش‌های ناشی از کوپل  $M$  با استفاده از اصل جمع آثار به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

دقت کنید از رابطه فوق فقط زمانی می‌توان استفاده کرد که شرایط استفاده از اصل جمع آثار برقرار باشد. به عبارت دیگر، اگر تنش‌های ترکیبی از حد تناسب ماده فراتر روند، یا اگر تغییر شکل‌های ناشی از یکی از کوپل‌ها بر توزیع تنش‌های ناشی از کوپل‌های دیگر خیلی تاثیر بگذارند، از رابطه فوق نمی‌توان استفاده کرد. از جلسات قبل به یاد داریم که تنش قائم در تمام نقاط محور خنثی برابر صفر می‌باشد، لذا برای تعیین محور خنثی در این حالت از رابطه  $\sigma_x = 0$  استفاده می‌کنیم:

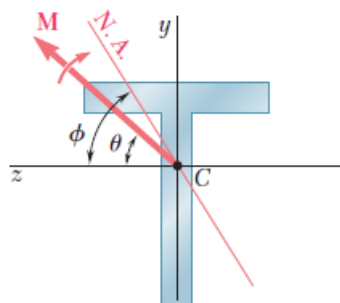
$$-\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0$$

که پس از ساده سازی به صورت زیر در می‌آید:

$$y = \left( \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \right) z$$

معادله حاصل، یک خط مستقیم با شیب  $m = \left( \frac{I_z}{I_y} \right) \tan \theta$  را نشان می‌دهد. زاویه  $\phi$  که محور خنثی با محور  $z$  دارد از رابطه زیر بدست می‌آید و در شکل نشان داده شده است.

$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$$



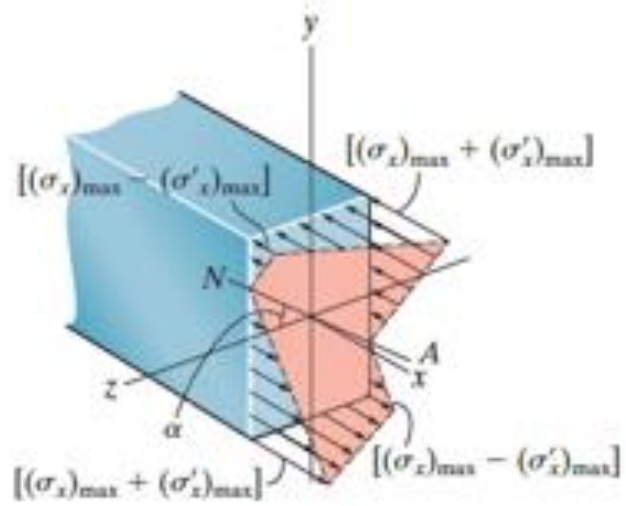
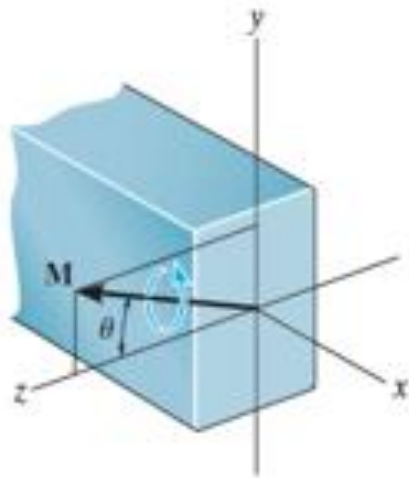
به عنوان آخرین نکته در این بخش، چون  $I_y$  و  $I_z$  هر دو مثبت‌اند،  $\theta$  و  $\phi$  علامت یکسان دارند. با توجه به مقادیر  $I_z$  و  $I_y$  حالت های زیر را داریم:

$$I_z > I_y \Rightarrow \phi > \theta$$

$$I_z < I_y \Rightarrow \phi < \theta$$

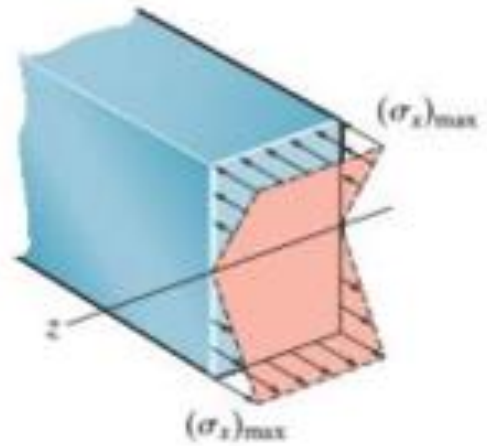
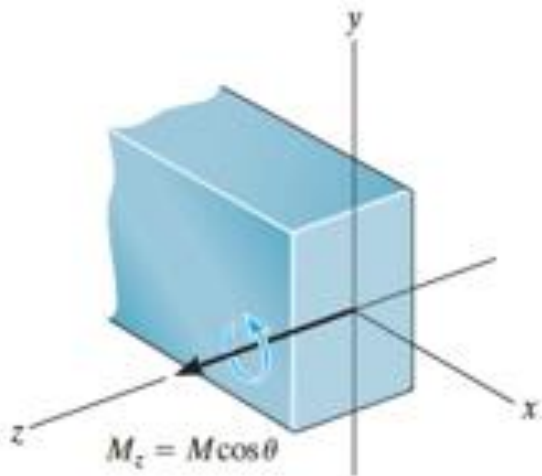
لذا، محور خنثی همواره بین بردار کوپل  $M$  و محور اصلی متناظر با ممان اینرسی مینیمم قرار دارد.

برای جمع بندی بحث این بخش به شکل توزیع تنش در این حالت که به صورت سه بعدی ترسیم شده است دقت کنید.



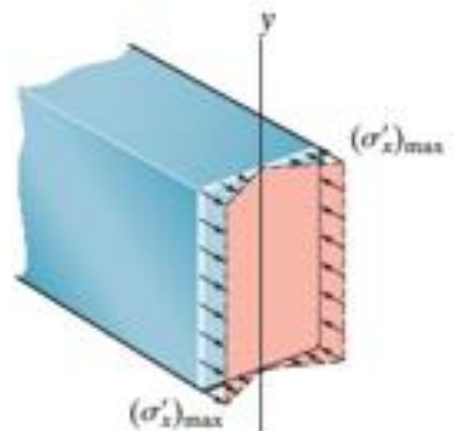
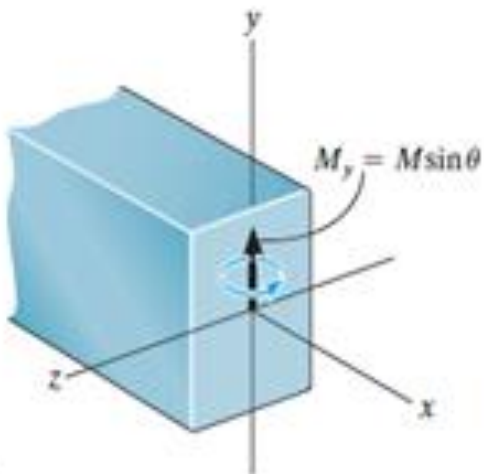
=

=



+

+

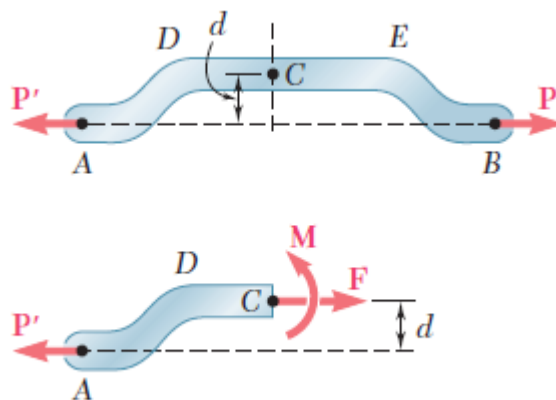


## بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن



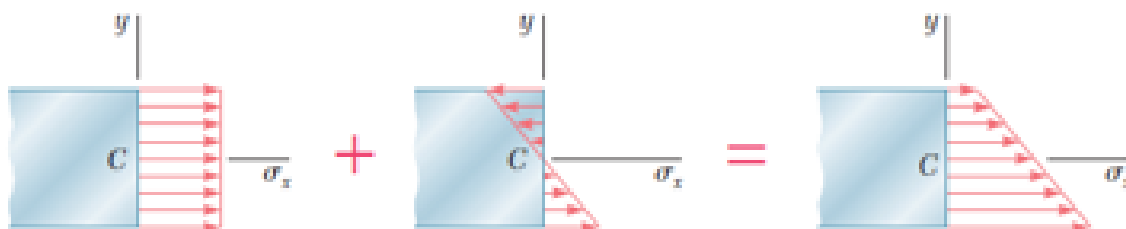
در جلسه مربوط به نیروی محوری دیدیم که توزیع تنش را در مقطع عرضی عضوی که تحت بارگذاری محوری است می‌توان یکنواخت فرض کرد به شرطی که خط اثر بارهای محوری اعمالی از مرکز سطح مقطع عرضی بگذرد (بارگذاری مرکزی). اگر خط اثر بارها از مرکز سطح مقطع نگذرد (بارگذاری خارج از مرکز) توزیع تنش به چه صورت خواهد بود؟

عضوی مطابق شکل زیر را که دارای صفحه تقارن بوده در نظر بگیرید که بار در صفحه تقارن عضو وارد می‌شود ولی از مرکز سطح عضو عبور نمی‌کند (بارگذاری خارج از مرکز). نیروهای داخلی را با استفاده از اصول استاتیک در مقطعی از عضو به صورت شکل زیر بدست می‌آوریم:



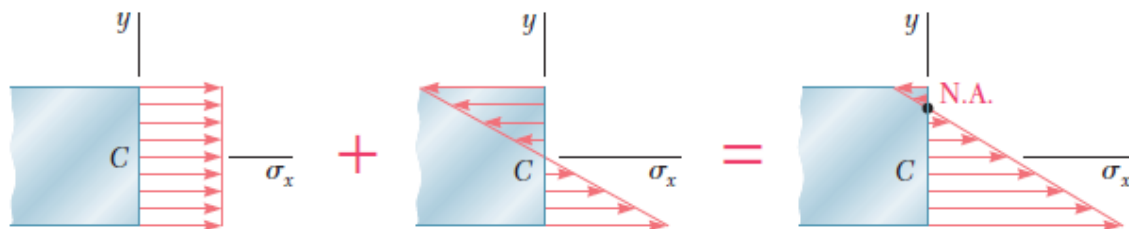
با استفاده از اصل جمع آثار، از ترکیب توزیع تنش یکنواخت ناشی از نیروی محوری مرکزی و توزیع تنش خطی ناشی از خمش متقارن، توزیع تنش در بارگذاری محوری خارج از مرکز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{\text{centric}} + (\sigma_x)_{\text{bending}}$$



$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$

برحسب شکل هندسی مقطع عرضی و نوع و خروج از مرکز بار محوری، تنش‌های مرکب با تنش محوری می‌تواند هم علامت یا غیر هم علامت باشد. در حالتی شبیه شکل زیر، خطی در مقطع وجود دارد که در امتداد آن تنش نرمال صفر است ( $\sigma_x = 0$ ) که این خط را محور خنثی مقطع می‌گوییم که لازم به ذکر است در این حالت محور خنثی بر مرکز سطح مقطع منطبق نیست.



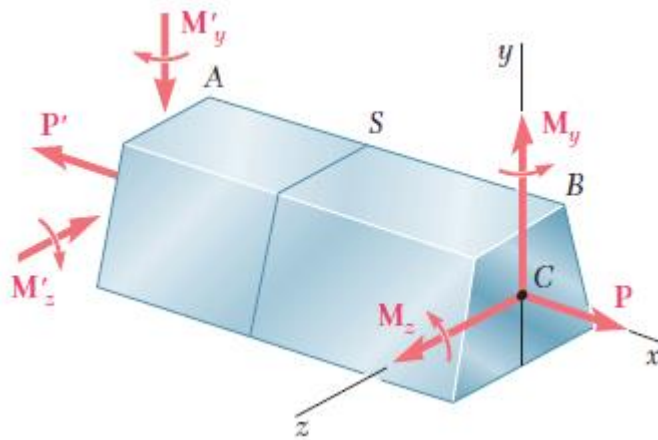
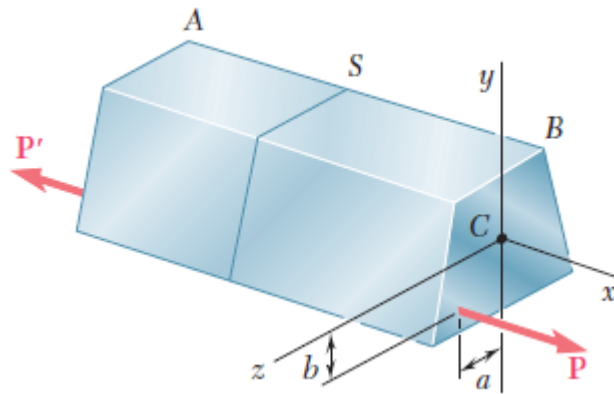
دقت کنید نتایج ارائه شده تا وقتی صحت دارند که اصل جمع آثار و اصل سنت و نانت به کار روند. به عبارتی، تنش‌های موجود از حد تناسب ماده فراتر نروند، تغییر شکل ناشی از خمش بر فاصله  $d$  (فاصله خط اثر بارهای اعمالی تا مرکز سطح مقطع) خیلی تاثیر نگذارد و مقطع عرضی که در آن تنش محاسبه می‌شود خیلی نزدیک به محل اعمال بارها (نیروهای) خارجی نباشند.

۴-۱۰

### حالت کلی بارگذاری محوری خارج از مرکز

در بخش قبلی تنش‌های حاصل از بار محوری خارج از مرکز را که در صفحه تقارن عضو بر آن اثر می‌کرد، تحلیل کردیم. در این بخش حالت کلی تر را که در آن بار محوری در صفحه تقارن اعمال نمی‌شود، بررسی خواهیم کرد.

عضو مستقیم  $AB$  را که تحت نیروهای محوری خارج از مرکز قرار دارد در نظر بگیرید. با استفاده از اصول استاتیک و انتقال نیروها، نیروی خارج از مرکز را به مرکز سطح مقطع منتقل کرده و به تناسب آن لنگرهای خمشی در امتداد محورهای مربوطه ایجاد خواهد شد. این سیستم بارگذاری معادل بار محوری خارج از مرکز می‌باشد که در شکل‌های زیر نشان داده شده است.



تا زمانی که شرایط استفاده از اصل سنت و نانت و اصل جمع آثار برقرار باشد، طبق آنچه تا الان آموختیم تنش ناشی از بارگذاری محوری خارج از مرکز که با سیستم نیروی محوری مرکزی و دو کویپل جایگزین شد، از رابطه زیر بدست می آید:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

محور خنثی مقطع نیز با استفاده از رابطه  $\sigma_x = 0$  به صورت زیر بدست می آید:

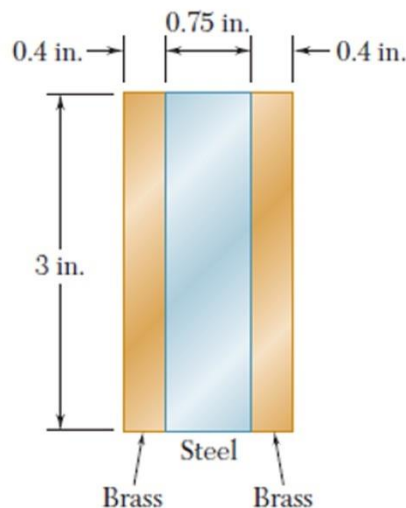
$$\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = \frac{P}{A}$$

## مثال های حل شده سری ۴

هدف: در این مثال با محاسبه تنش ناشی از خمش خالص در مقاطع مرکب آشنا خواهیم شد.

با اتصال قطعات فولادی و برنجی، میله ای با مقطع عرضی نشان داده شده ساخته شده است. اگر میله تحت لنگر خمشی به مقدار  $M = 40 \text{ kip.in.}$  در خمش خالص قرار گیرد، ماکزیمم تنش را در فولاد و برنج بیابید.  $E_s = 29 \times 10^6 \text{ psi}$  و  $E_b = 15 \times 10^6 \text{ psi}$

A bar obtained by bonding together pieces of steel ( $E_s = 29 \times 10^6 \text{ psi}$ ) and brass ( $E_b = 15 \times 10^6 \text{ psi}$ ) has the cross section shown in figure. Determine the maximum stress in the steel and in the brass when the bar is in pure bending with a bending moment  $M = 40 \text{ kip. in.}$



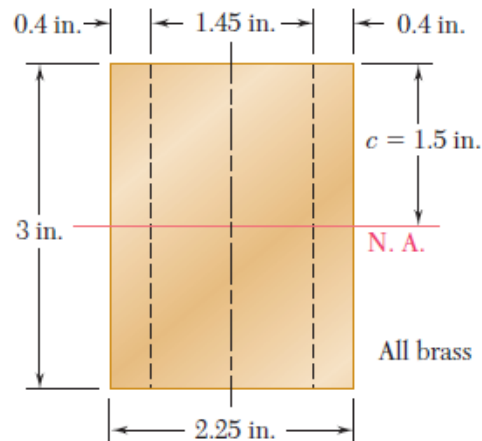


م مرکب را به یک مقطع از جنس برنج تبدیل می‌کنیم، به عبارتی فولاد را با برنج معادل جایگزین می‌کنیم:

$$n = \frac{E_s}{E_b} = \frac{29 \times 10^6 \text{ psi}}{15 \times 10^6 \text{ psi}} = 1.933$$

ممت فولادی اولیه با برنجی به عرض زیر جایگزین خواهد شد و مقطع معادل (تبدیل یافته) به صورت شکل زیر می‌باشد:

$$(0.75 \text{ in.})(1.933) = 1.45 \text{ in.}$$



ممان اینرسی مقطع تبدیل یافته به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(2.25 \text{ in.})(3 \text{ in.})^3 = 5.063 \text{ in}^4$$

حال حداکثر تنش در مقطع تبدیل یافته را با استفاده از رابطه معروف تنش خمشی برای مقطع همگن محاسبه می‌نماییم:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(40 \text{ kip} \cdot \text{in.})(1.5 \text{ in.})}{5.063 \text{ in}^4} = 11.85 \text{ ksi}$$

همانطور که سر کلاس بحث کردیم، تنش در بخش فولادی در مقطع اصلی بیشتر از تنش در نقطه متناظر آن در مقطع تبدیل یافته می‌باشد. به عبارتی تنش در فولاد در مقطع اصلی،  $n$  برابر تنش در نقطه متناظر مقطع تبدیل یافته می‌باشد.

$$(\sigma_{\text{brass}})_{\text{max}} = 11.85 \text{ ksi}$$

$$(\sigma_{\text{steel}})_{\text{max}} = (1.933)(11.85 \text{ ksi}) = 22.9 \text{ ksi}$$

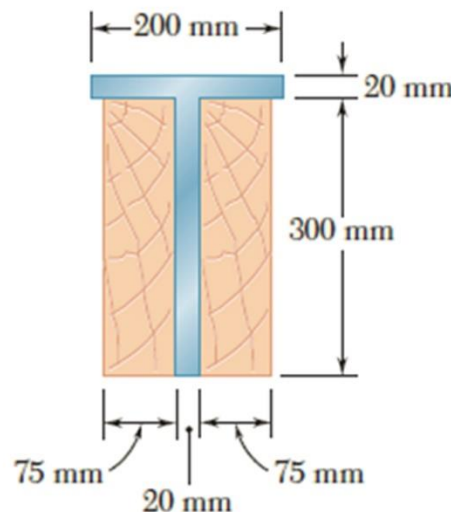
## مثال های حل شده سری ۴

۲

هدف: در این مثال با محاسبه تنش ناشی از خمش خالص در مقاطع مرکب آشنا خواهیم شد.

دو ورق فولادی به هم جوش شده و یک تیر  $T$  شکل را تشکیل داده‌اند. این تیر به دو الوار چوبی (بلوط) پیچ و مهره شده است. مدول الاستیسیته برای چوب  $12/5$  گیگاپاسکال و برای فولاد  $200$  گیگاپاسکال است. اگر لنگر خمشی  $50$  کیلونیوتن - متر بر این تیر مرکب وارد شود، مطلوب است: (الف) تنش ماکزیمم در چوب، (ب) تنش در فولاد در امتداد لبه بالایی.

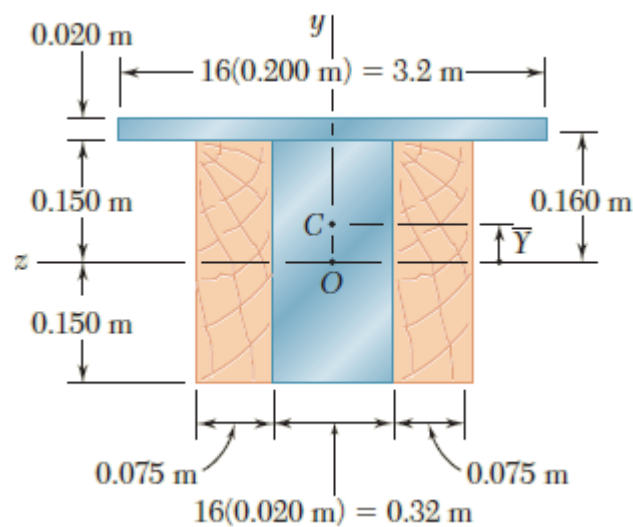
Two steel plates have been welded together to form a beam in the shape of a T that has been strengthened by securely bolting to it the two oak timbers shown. The modulus of elasticity is  $12.5 \text{ GPa}$  for the wood and  $200 \text{ GPa}$  for the steel. Knowing that a bending moment  $M = 50 \text{ kN}$ ,  $M$  is applied to the composite beam, determine (a) the maximum stress in the wood, (b) the stress in the steel along the top edge.



ابتدا مقطع تبدیل یافته را با فرض تبدیل فولاد به چوب تعیین می کنیم:

$$n = \frac{E_s}{E_w} = \frac{200 \text{ GPa}}{12.5 \text{ GPa}} = 16$$

لازم است ابعاد افقی (عرض) قسمت فولادی مقطع را 16 برابر کرده تا مقطع تبدیل یافته از جنس چوب بدست آید که در شکل زیر مشاهده می شود.

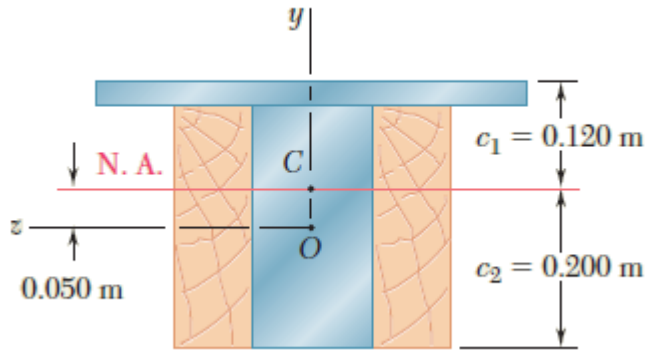


محور خشتی از مرکز سطح مقطع تبدیل یافته می گذرد. مرکز سطح مقطع تبدیل یافته به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{(0.160 \text{ m})(3.2 \text{ m} \times 0.020 \text{ m}) + 0}{3.2 \text{ m} \times 0.020 \text{ m} + 0.470 \text{ m} \times 0.300 \text{ m}} = 0.050 \text{ m}$$

با توجه به شکل زیر و محل مرکز سطح، ممان اینرسی مقطع تبدیل یافته حول محور خشتی با استفاده از آنچه در استاتیک (قضیه محورهای موازی) یاد گرفتیم، به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$I = \frac{1}{12}(0.470)(0.300)^3 + (0.470 \times 0.300)(0.050)^2 \\ + \frac{1}{12}(3.2)(0.020)^3 + (3.2 \times 0.020)(0.160 - 0.050)^2 \\ I = 2.19 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$



برای محاسبه تنش ماکزیمم در چوب، دورترین فاصله چوب از محور خنثی در امتداد لبه چوب (پایین) قرار دارد، لذا:

$$\sigma_w = \frac{Mc_2}{I} = \frac{(50 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(0.200 \text{ m})}{2.19 \times 10^{-3} \text{ m}^4} \quad \sigma_w = 4.57 \text{ MPa}$$

برای محاسبه ماکزیمم تنش در فولاد، تنش معادل در چوب را در امتداد لبه بالایی (دورترین فاصله فولاد از محور خنثی)، محاسبه کرده و آن را در  $n$  ضرب کرده تا تنش در فولاد به دست آید:

$$\sigma_s = n \frac{Mc_1}{I} = (16) \frac{(50 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(0.120 \text{ m})}{2.19 \times 10^{-3} \text{ m}^4} \quad \sigma_s = 43.8 \text{ MPa}$$

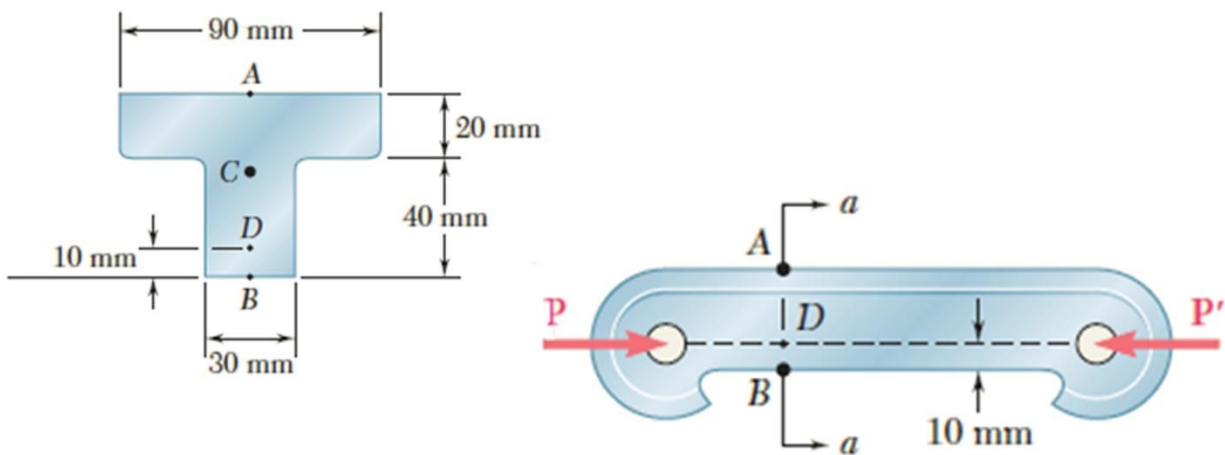
## مثال های حل شده سری ۴

۳

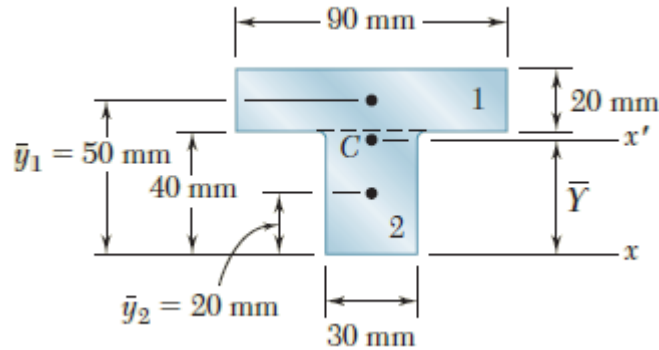
هدف: در این مثال با محاسبه تنش ناشی از نیروی محوری خارج از مرکز در یک مقطع آشنا خواهیم شد.

اگر حلقه چدنی نشان داده شده دارای تنش مجاز 30 مگاپاسکال در کشش و 120 مگاپاسکال در فشار باشند، ماکزیمم نیروی  $P$  را که می توان بر حلقه وارد کرد بیابید. مقطع عرضی  $a-a$  در شکل نشان داده شده است.

Knowing that for the cast iron link shown the allowable stresses are 30 MPa in tension and 120 MPa in compression, determine the largest force  $P$  which can be applied to the link.

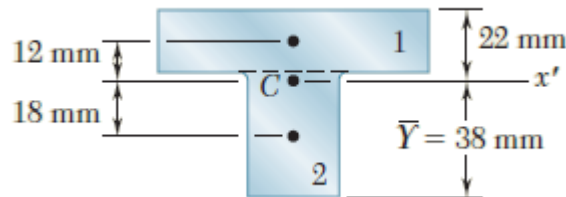


با استفاده از اصول استاتیک، مشخصات هندسی مقطع را محاسبه می‌گردد:



	Area, mm <sup>2</sup>	$\bar{y}$ , mm	$\bar{y}A$ , mm <sup>3</sup>	
1	$(20)(90) = 1800$	50	$90 \times 10^3$	$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A$ $\bar{Y}(3000) = 114 \times 10^6$ $\bar{Y} = 38 \text{ mm}$
2	$(40)(30) = 1200$	20	$24 \times 10^3$	
	$\Sigma A = 3000$		$\Sigma \bar{y}A = 114 \times 10^3$	

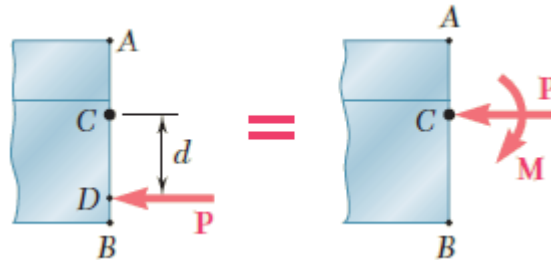
حال با تعیین مرکز سطح مقطع، ممان اینرسی مقطع را حول محوری که از مرکز سطح مقطع می‌گذرد، به صورت زیر محاسبه می‌نماییم:



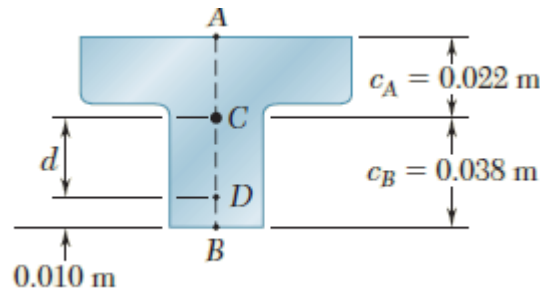
$$\begin{aligned}
 I_{x'} &= \Sigma(\bar{I} + Ad^2) = \Sigma\left(\frac{1}{12}bh^3 + Ad^2\right) \\
 &= \frac{1}{12}(90)(20)^3 + (90 \times 20)(12)^2 + \frac{1}{12}(30)(40)^3 + (30 \times 40)(18)^2 \\
 &= 868 \times 10^3 \text{ mm}^4 \\
 I &= 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

با بررسی تعادل در مقطع  $a-a$  مشخص می‌شود که برای برقراری تعادل، نیروی محوری  $P$  در نقطه  $D$  مقطع عرضی باید وارد شود. به عبارتی در مقطع عرضی مورد بحث با حالت بار محوری خارج از مرکز سروکار داریم.

برای محاسبه تنش‌ها طبق آنچه قبلاً یاد گرفتیم، لازم است نیروی محوری به مرکز سطح مقطع عرضی منتقل شود که با این انتقال لنگری مطابق شکل زیر در نقطه  $C$  خواهیم داشت.



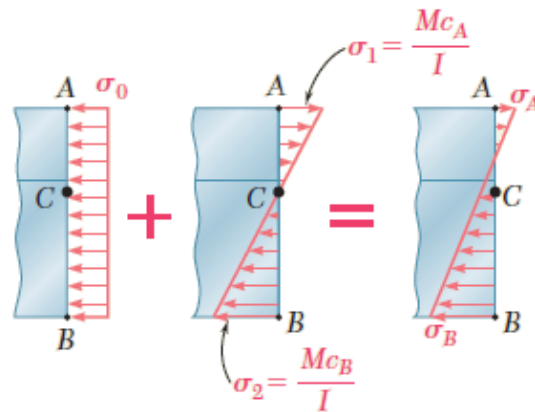
مقادیر سیستم کوپل - نیروی معادل با نیروی محوری خارج از مرکز در مقطع عرضی به صورت زیر می باشد:



$$d = (0.038 \text{ m}) - (0.010 \text{ m}) = 0.028 \text{ m}$$

$$P = P \quad M = P(d) = P(0.028 \text{ m}) = 0.028P$$

نیروی  $P$  وارد بر مرکز سطح باعث توزیع تنش یکنواخت و کوپل  $M$  باعث توزیع تنش خطی مطابق شکل زیر خواهد شد.





(Compression)

$$\sigma_1 = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(0.028P)(0.022)}{868 \times 10^{-9}} = 710P \quad (\text{Tension})$$

$$\sigma_2 = \frac{Mc_B}{I} = \frac{(0.028P)(0.038)}{868 \times 10^{-9}} = 1226P \quad (\text{Compression})$$

با فرض برقراری اصل جمع آثار، توزیع تنش کل با ترکیب تنش ناشی از نیروی مرکزی  $P$  و کوپل خمشی  $M$  بدست می آید:

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc_A}{I} = -333P + 710P = +377P \quad (\text{Tension})$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{Mc_B}{I} = -333P - 1226P = -1559P \quad (\text{Compression})$$

برای محاسبه ماکزیمم بار مجاز، با توجه به تفاوت رفتار در کشش و فشار، لازم است حداکثر تنش کششی را برابر تنش مجاز کششی و حداکثر تنش فشاری را برابر تنش مجاز فشاری قرار داده و از بین مقادیر بدست آمده برای  $P$ ، کوچکترین مقدار به عنوان ماکزیمم بار مجاز انتخاب گردد.

$$\sigma_A = 377P = 30 \text{ MPa} \quad P = 79.6 \text{ kN}$$

$$\sigma_B = -1559P = -120 \text{ MPa} \quad P = 77.0 \text{ kN}$$

لذا، حداکثر بار مجاز  $P$  برابر 77 کیلونیوتن می باشد.

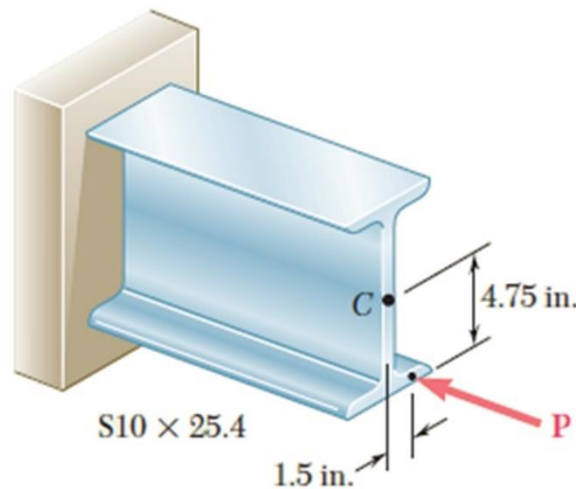
## مثال های حل شده سری ۴

۴

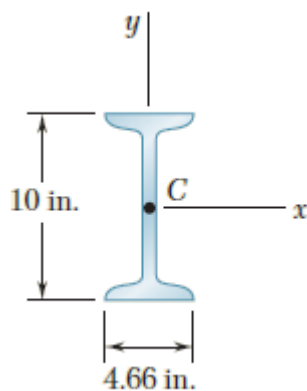
هدف: در این مثال با محاسبه تنش ناشی از نیروی محوری خارج از مرکز در یک مقطع آشنا خواهیم شد.

نیروی افقی  $P$  بر قسمت کوتاهی از عضو فولادی نورد شده  $S10 \times 25.4$  وارد شده است. ماکزیمم بار مجاز  $P$  را بیابید، به طوری که تنش فشاری در عضو از 12 کیلوپوند بر اینچ مربع بیشتر نشود.

A horizontal load  $P$  is applied as shown to a short section of an  $S10 \times 25.4$  rolled-steel member. Knowing that the compressive stress in the member is not to exceed 12 ksi, determine the largest permissible load  $P$ .



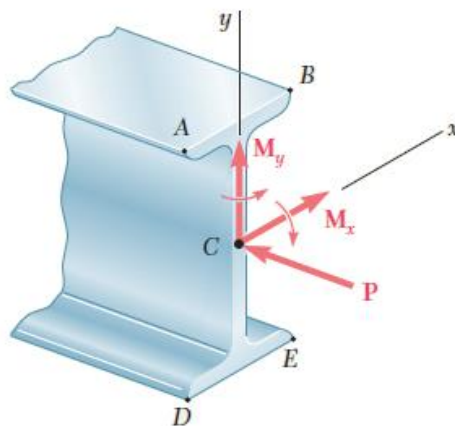
جداولی (شبه جداول انتهایی سررسیدها) وجود دارد که مشخصات هندسی مقاطع مورد استفاده در آنها وجود دارد که در درس طراحی سازه‌های فولادی بیشتر با آن آشنا خواهید شد (جدول اشتال). طبق این جدول مشخصات مقطع عرضی مورد بحث در این سوال به صورت زیر می‌باشد:



$$\text{Area: } A = 7.46 \text{ in}^2$$

$$\text{Section moduli: } S_x = 24.7 \text{ in}^3 \quad S_y = 2.91 \text{ in}^3$$

با توجه به اینکه نیروی  $P$ ، نیروی خارج از مرکز می‌باشد لازم است برای محاسبه تنش‌ها به مرکز سطح مقطع منتقل شود. با توجه به اینکه نیرو نسبت به دو محور اصلی مقطع دارای خروج از مرکزیت می‌باشد، با انتقال نیرو به مرکز سطح، دو کوپل حول محورهای اصلی ایجاد خواهد شد. سیستم کوپل-نیروی معادل با نیروی محوری خارج از مرکز در شکل زیر نشان داده شده است:



مقادیر کوپل‌ها که در امتداد محورهای اصلی مرکزی مقطع عرضی می‌باشند، به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$M_x = (4.75 \text{ in.})P \quad M_y = (1.5 \text{ in.})P$$

قدر مطلق تنش‌های ناشی از بار مرکزی  $P$  و کوپل‌های  $M_x$  و  $M_y$  در نقاط  $A, B, C, D$  به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{P}{7.46 \text{ in}^2} = 0.1340P$$

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{S_x} = \frac{4.75P}{24.7 \text{ in}^3} = 0.1923P$$

$$\sigma_3 = \frac{M_y}{S_y} = \frac{1.5P}{2.91 \text{ in}^3} = 0.5155P$$

حال با فرض برقراری اصل جمع آثار، با در نظر گرفتن جهت نیرو و کوپل‌ها، تنش کل در چهار نقطه مذکور را با ترکیب تنش‌ها به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\sigma_A = -\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -0.1340P + 0.1923P + 0.5155P = +0.574P$$

$$\sigma_B = -\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = -0.1340P + 0.1923P - 0.5155P = -0.457P$$

$$\sigma_D = -\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 = -0.1340P - 0.1923P + 0.5155P = +0.189P$$

$$\sigma_E = -\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = -0.1340P - 0.1923P - 0.5155P = -0.842P$$

با توجه به مقادیر بدست آمده، مشخص می‌شود که ماکزیمم تنش فشاری در نقطه  $E$  می‌باشد. لذا با توجه به تنش مجاز، حداکثر مجاز بار  $P$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_{\text{all}} = \sigma_E \quad -12 \text{ ksi} = -0.842P \quad P = 14.3 \text{ kips}$$

## مثال های حل شده سری ۴

۵

هدف: در این مثال با محاسبه تنش ناشی از خمش نامتقارن به صورت جامع آشنا خواهیم شد.

کویل  $M_0 = 1.5 \text{ kN.m}$  در صفحه قائم بر تیری با مقطع عرضی  $Z$  وارد شده است. مطلوبست: (الف) تنش در نقطه  $A$ ، (ب) زاویه‌ای که محور خنثی با صفحه افق می‌سازد. ممان اینرسی و حاصلضرب اینرسی مقطع نسبت به محورهای  $y, z$  عبارتند از:

$$I_y = 3.25 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = 4.18 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

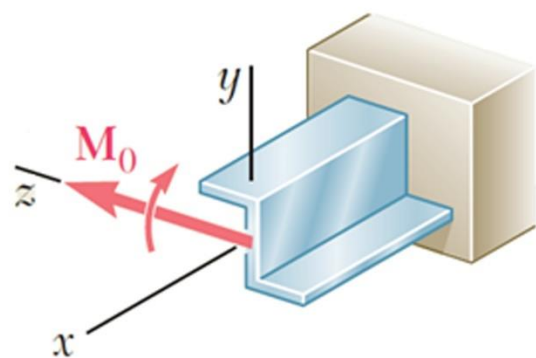
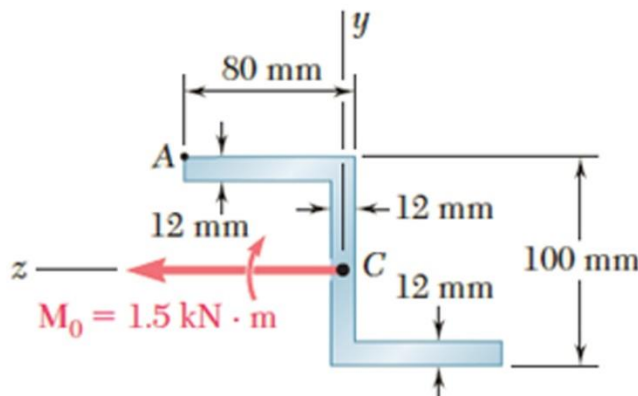
$$I_{yz} = 2.87 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

A couple of magnitude  $M_0 = 1.5 \text{ kN.m}$  acting in a vertical plane is applied to a beam having the Z-shaped cross section shown. Determine (a) the stress at point  $A$ , (b) the angle that the neutral axis forms with the horizontal plane. The moments and product of inertia of the section with respect to the  $y$  and  $z$  axes have been computed and are as follows:

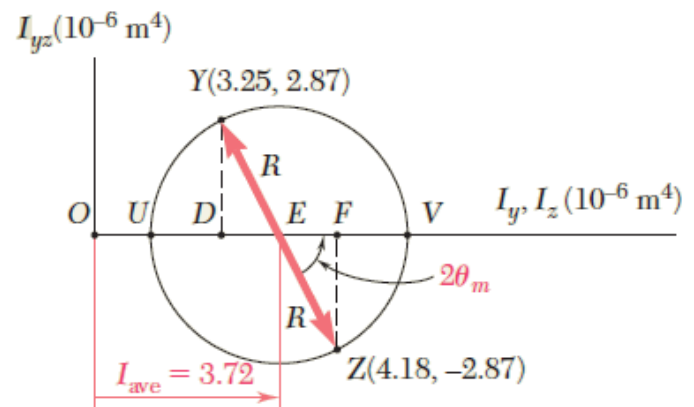
$$I_y = 3.25 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = 4.18 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{yz} = 2.87 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



با توجه به اینکه، لنگر خمشی وارد بر مقطع در امتداد محورهای اصلی مقطع وارد نمی شود، برای استفاده از رابطه خمش خالص جهت محاسبه تنش، لازم است بردار لنگر خمشی (کوپل) در امتداد محورهای اصلی تجزیه گردد. لذا در قدم اول لازم است محورهای اصلی مقطع محاسبه گردد. با استفاده از دایره موهر و آنچه در درس استاتیک یاد گرفتیم داریم:



$$\tan 2\theta_m = \frac{FZ}{EF} = \frac{2.87}{0.465} \quad 2\theta_m = 80.8^\circ \quad \theta_m = 40.4^\circ$$

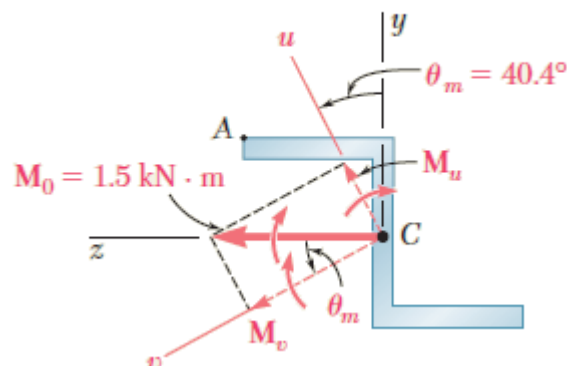
$$R^2 = (EF)^2 + (FZ)^2 = (0.465)^2 + (2.87)^2 \quad R = 2.91 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_u = I_{\min} = OU = I_{\text{ave}} - R = 3.72 - 2.91 = 0.810 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_v = I_{\max} = OV = I_{\text{ave}} + R = 3.72 + 2.91 = 6.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

با توجه به نتایج حاصل از دایره موهر، وضعیت محورهای اصلی و بردار کوپل به صورت زیر خواهد بود

( $u, v$  محورهای اصلی می باشند):

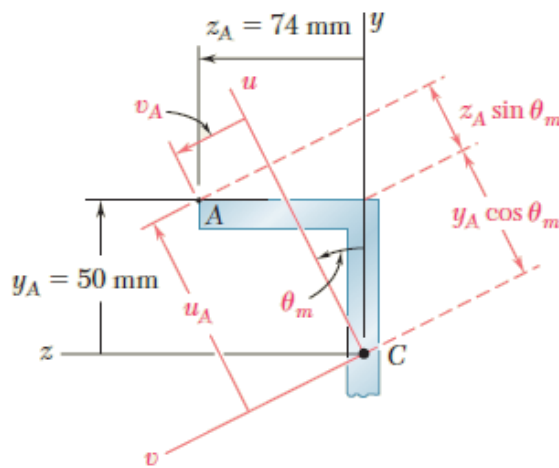


حال کوپل  $M_0$  را در امتداد محورهای اصلی تجزیه می‌کنیم:

$$M_u = M_0 \sin \theta_m = 1500 \sin 40.4^\circ = 972 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_v = M_0 \cos \theta_m = 1500 \cos 40.4^\circ = 1142 \text{ N} \cdot \text{m}$$

برای محاسبه تنش در نقطه  $A$  لازم است فواصل عمودی نقطه را از محورهای اصلی  $(u, v)$  با استفاده از مثلثات بدست می‌آوریم:



$$u_A = y_A \cos \theta_m + z_A \sin \theta_m = 50 \cos 40.4^\circ + 74 \sin 40.4^\circ = 86.0 \text{ mm}$$

$$v_A = -y_A \sin \theta_m + z_A \cos \theta_m = -50 \sin 40.4^\circ + 74 \cos 40.4^\circ = 23.9 \text{ mm}$$

حال با استفاده از روابط مربوط به خمش دو محوره، تنش در نقطه  $A$  به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

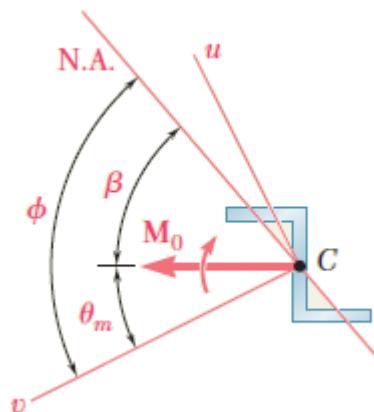
$$\begin{aligned} \sigma_A &= +\frac{M_u v_A}{I_u} - \frac{M_v u_A}{I_v} = +\frac{(972 \text{ N} \cdot \text{m})(0.0239 \text{ m})}{0.810 \times 10^{-6} \text{ m}^4} - \frac{(1142 \text{ N} \cdot \text{m})(0.0860 \text{ m})}{6.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \\ &= +(28.68 \text{ MPa}) - (14.81 \text{ MPa}) \end{aligned}$$

$$\sigma_A = +13.87 \text{ MPa}$$

با استفاده از روابط بدست آمده در کلاس برای تعیین محور خشی در خمش دو محوره، زاویه  $\phi$  بین محور خشی و محور  $v$  را تعیین می‌کنیم:

$$\tan \phi = \frac{I_v}{I_u} \tan \theta_m = \frac{6.63}{0.810} \tan 40.4^\circ \quad \phi = 81.8^\circ$$

$$\beta = \phi - \theta_m = 81.8^\circ - 40.4^\circ = 41.4^\circ \quad \beta = 41.4^\circ$$

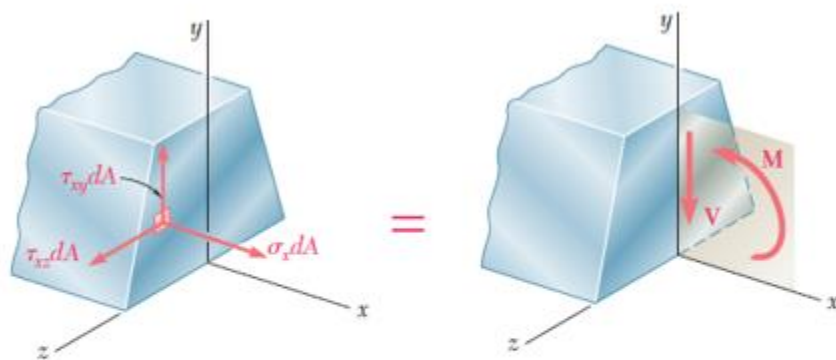


همانطور که سر کلاس درس بحث کردیم، می‌توانید یک نقطه دلخواه با مختصات  $(v, u)$  در ربع مثبت دستگاه مختصات فرض کرده و مقدار تنش در آن نقطه را تحت کویل‌ها محاسبه و برای بدست آوردن محور خشی، این تنش را برابر صفر قرار دهید.





در این بخش به بررسی تنش برشی ناشی از نیروی داخلی برشی خواهیم پرداخت. در شکل زیر مقطعی از یک تیر دارای صفحه تقارن، تحت اثر لنگر خمشی و نیروی برشی را مشاهده می‌کنید. تنش نرمال  $\sigma_x$  ناشی از لنگر خمشی  $M$  را در جلسات قبل بررسی کردیم. با بررسی تعادل نیرویی برای تنش های برشی روابط زیر را خواهیم داشت:



شکل 1

تعادل نیرویی در راستای  $y$   
= تعادل نیرویی در راستای  $z$

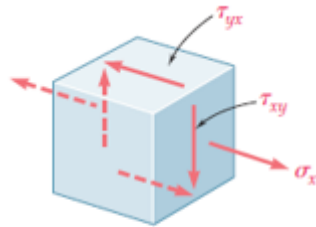
$$\int \tau_{xy} dA = -V$$

$$\int \tau_{xz} dA = 0$$

معادله اول نشان می‌دهد که در یک مقطع عرضی از تیری که تحت بارگذاری عرضی است تنش های برشی عمودی وجود دارد. معادله دوم نیز نشان می‌دهد که میانگین تنش های برشی افقی در هر مقطع صفر است. ولی دقت شود که این را نمی‌رساند که تنش برشی  $\tau_{xz}$  در همه جا صفر است.

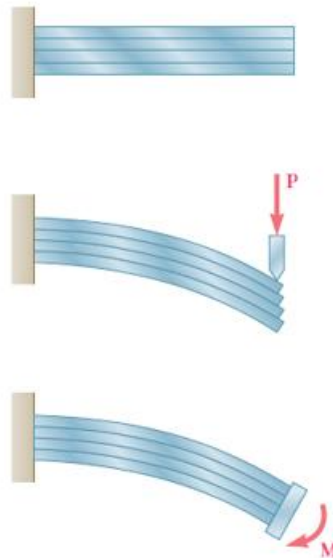
با استفاده از آنچه در جلسات قبل یاد گرفتیم، جزء مکعبی کوچکی را در صفحه تقارن عمودی تیر در نظر بگیرید:

در این بخش به بررسی تنش برشی ناشی از نیروی داخلی برشی خواهیم پرداخت. در شکل زیر مقطعی از یک تیر دارای صفحه تقارن، تحت اثر لنگر خمشی و نیروی برشی را مشاهده می‌کنید. تنش نرمال  $\sigma_x$  ناشی از لنگر خمشی  $M$  را در جلسات قبل بررسی کردیم. با بررسی تعادل نیرویی برای تنش های برشی روابط زیر را خواهیم داشت:



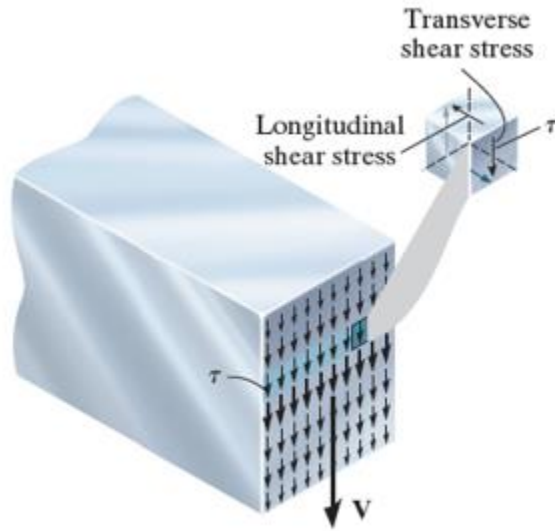
شکل 2: المانی از تیر

قبلا دیدیم که اگر تنش های برشی  $\tau_{xy}$  بر وجوه عمودی یک جزء وارد شوند، بر وجوه افقی آن نیز وارد می شوند. یعنی در هر عضوی که تحت بارگذاری عرضی است تنش برشی طولی وجود دارد. برای درک این مساله، تیر طره چند تکه تحت بار عرضی و لنگر خمشی به صورت جداگانه را تجسم کنید. در کدام حالت تکه ها نسبت به هم می لغزند؟



شکل 3: تیر مرکب از چند تکه

برای جمع بندی و درک تنش برشی، به شکل زیر دقت کنید.



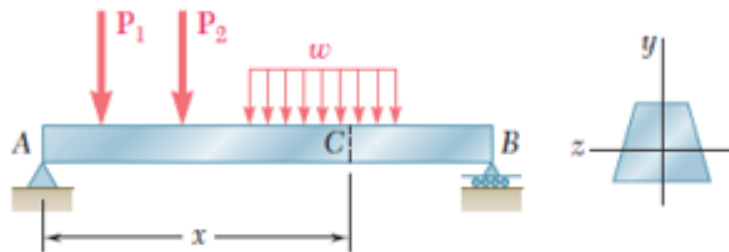
شکل 4: توزیع تنش برشی در مقطع عرضی

۵-۲

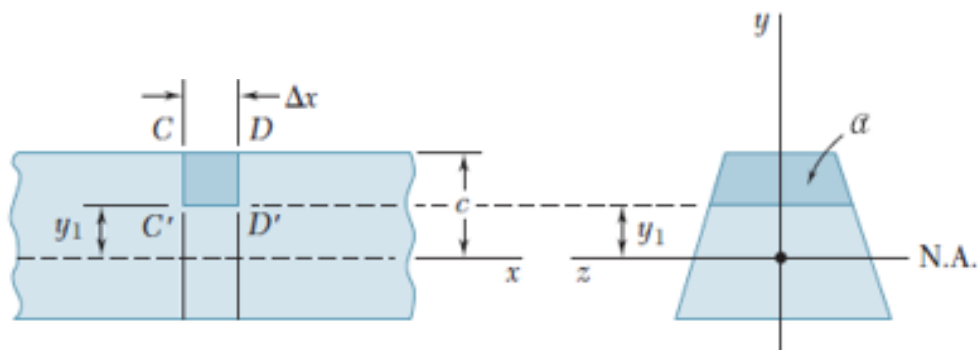
## تنش برشی در تیرها



تیر منشوری  $AB$  زیر را که دارای صفحه تقارن عمودی و تحت بارهای متمرکز و گسترده (اعمالی در صفحه تقارن) در نظر بگیرید. در فاصله  $x$  از انتهای  $A$  المانی به صورت شکل زیر به طول  $\Delta x$  را جدا و تعادل آن را بررسی می نماییم.

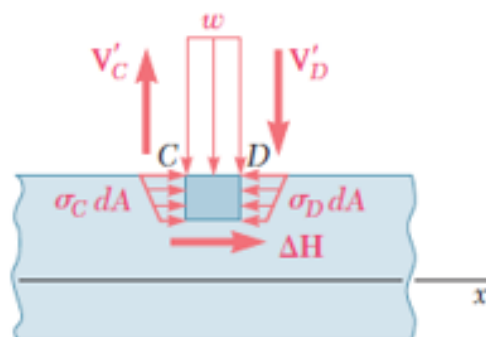


شکل 5: تیر تحت بار گذاری کلی



شکل 6: مقطع طولی و عرضی تیر

نیروهای وارد بر المان جدا شده به صورت زیر می باشد:



معادله تعادل در راستای افقی به صورت زیر می باشد:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad \Delta H + \int_a (\sigma_C - \sigma_D) dA = 0$$

از بخش خمش به یاد داریم:

$$\sigma = My/I$$

لذا نیروی برشی افقی  $\Delta H$  که بر وجه پایینی المان وارد می شود به صورت زیر بدست می آید:

$$\Delta H = \frac{M_D - M_C}{I} \int_a y dA$$

انتگرال در رابطه بالا به چه معناست؟

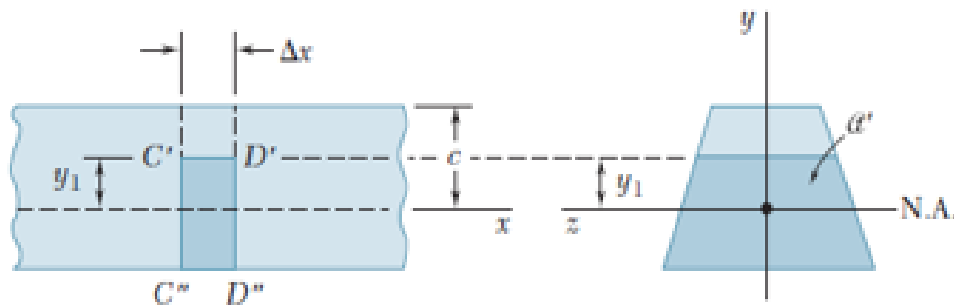
این انتگرال لنگر (مانان) اول سطح  $a$  (هاشورخورده) از مقطع عرضی تیر را نسبت به محور خشی بیان می‌کند و با  $Q$  نشان داده می‌شود. از طرفی از استاتیک به یاد داریم:

$$M_D - M_C = \Delta M = (dM/dx) \Delta x = V \Delta x$$

در نتیجه داریم:

$$\Delta H = \frac{VQ}{I} \Delta x$$

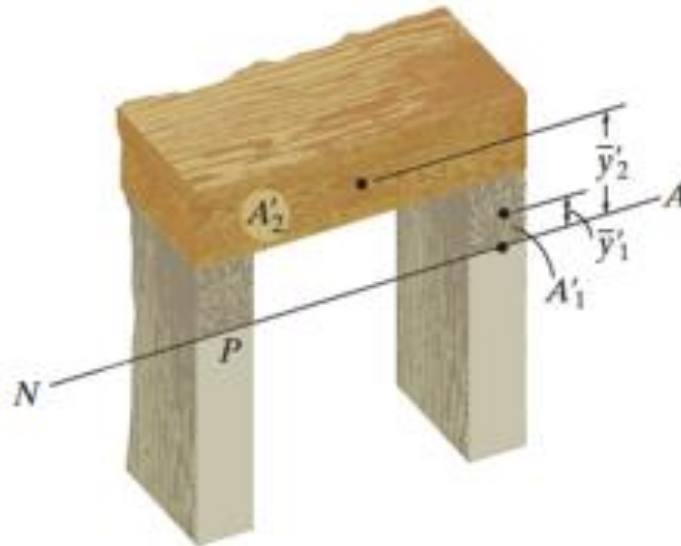
دقت کنید رابطه بالا را از قسمت پایین مقطع نیز می‌توان با توجه به شکل زیر بدست آورد. زیرا نیروهای برشی  $\Delta H$  و  $\Delta H'$  که این دو المان (جزء) بر هم وارد می‌کنند با هم برابر و در سوی مخالف هم هستند. در نتیجه لنگر اول سطح  $a'$  از مقطع عرضی، که پایین خط  $y = y_1$  قرار دارد، از نظر مقدار با لنگر اول سطح  $a$  از مقطع عرضی که بالای خط است برابر و با علامت مخالف است. مجموع این دو ممان (لنگر) برابر با لنگر اول مساحت تمام مقطع عرضی نسبت به محور گذرا از مرکز سطح آن می‌باشد. لذا این مجموع برابر با صفر می‌باشد (از استاتیک به یاد دارید). گاهی از این خاصیت برای ساده کردن محاسبه  $Q$  استفاده می‌شود.



شکل 8: مقطع طولی و عرضی تیر

$Q$  کجای مقطع عرضی حداکثر و کجا صفر می‌باشد؟

به عنوان یادآوری از استاتیک برای محاسبه  $Q$  به شکل زیر توجه کنید.



شکل 9: مرور محاسبه لنگر اول سطح

لنگر اول سطح قسمت قهوه‌ای رنگ نسبت به محور خنثی  
لنگر اول سطح قسمت بالای محور خنثی نسبت به محور خنثی

$$Q = \bar{y}'A'$$

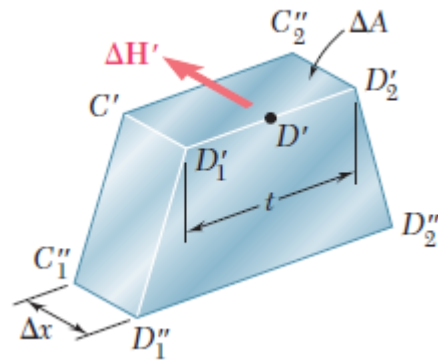
$$Q = 2\bar{y}'_1A'_1 + \bar{y}'_2A'_2$$

با استفاده از آنچه بدست آوردیم، برش افقی در طول واحد (جریان برش) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I}$$

$Q$  لنگر اول سطح قسمتی از مقطع عرضی را که در بالا یا پایین نقطه ای است که  $q$  محاسبه می‌شود، نسبت به محور خنثی نشان می‌دهد و  $I$  ممان اینرسی مرکزی تمام سطح مقطع عرضی نسبت به محور خنثی است.

حال با توجه به شکل زیر، می‌توانیم تنش برشی متوسط را محاسبه نماییم.



شکل 10: محاسبه تنش برشی متوسط

با تقسیم نیروی برشی بر مساحت مقطعی که بر آن اثر می‌کند، تنش برشی متوسط به صورت زیر بدست می‌آید:

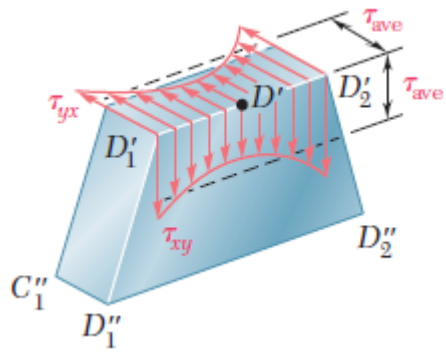
$$\tau_{ave} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{VQ}{I} \frac{\Delta x}{t \Delta x}$$

در نتیجه:

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

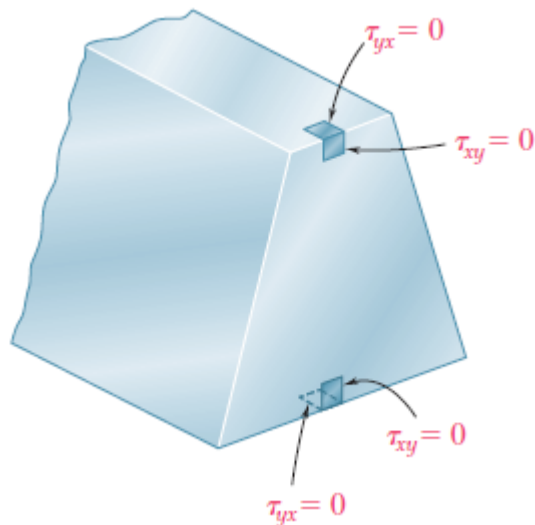
به نظرتون در جایی که  $Q$  حداکثر است،  $\tau_{ave}$  نیز حداکثر است؟ چرا؟

تنش‌های برشی  $\tau_{xy}$  و  $\tau_{yx}$  که به ترتیب بر یک صفحه عرضی و یک صفحه افقی گذرا از  $D'$  اثر می‌کنند با هم برابرند. در نتیجه، تنش متوسط محاسبه شده در بالا، مقدار متوسط  $\tau_{xy}$  را در امتداد خط  $D'_1D'_2$  نیز نشان می‌دهد.



شکل 11: توزیع تنش برشی در یک ارتفاع از مقطع تیر

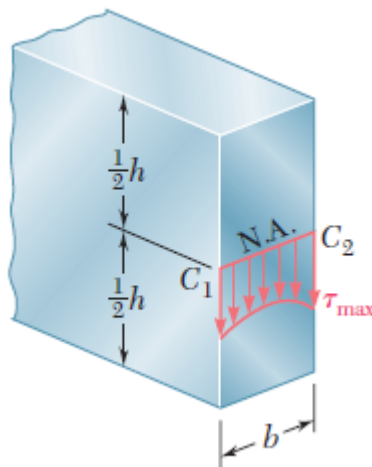
در امتداد لبه های بالایی و پایینی مقطع عرضی تنش برشی چقدر است؟



شکل 12: تنش برشی در لبه های مقطع عرضی تیر

تا وقتی عرض مقطع عرضی تیر در مقایسه با ارتفاع آن کوچک است، برای تعیین تنش برشی در امتداد خط  $D_1'D_2'$  می توان از رابطه بدست آمده در بالا استفاده کرد. در واقع  $\tau_{xy}$  در نقاط  $D_1'$  و  $D_2'$  بزرگتر از  $\tau_{xy}$  در نقطه  $D'$  است، اما طبق تئوری الاستیسیته، برای یک تیر با مقطع مستطیلی به عرض  $b$  و عمق  $h$ ، تا وقتی که  $b \leq h/4$ ، تغییرات تنش برشی از نقطه  $C_1$  تا  $C_2$  بیشتر از 0.8% تنش متوسط در امتداد محور خنثی نخواهد بود.





شکل 13: توزیع تنش برشی در امتداد محور خنثی مقطع مستطیلی شکل

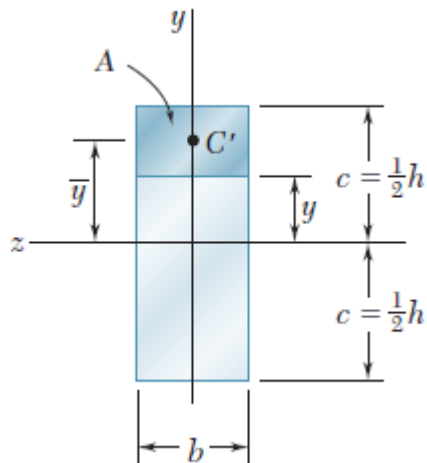
۵-۳

### تنش برشی $\tau_{xy}$ در انواع تیرها

در این بخش قصد داریم، تنش برشی در مقاطع مختلف تیرها را بررسی کنیم. در بخش قبل دیدیم برای تعیین تنش برشی در هر نقطه از مقطع عرضی یک تیر باریک مستطیلی می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It}$$

که در آن  $t$  عرض مقطع عرضی که در اینجا برابر  $b$  می‌باشد و  $Q$  ممان (لنگر) اول سطح سایه خورده  $A$  (شکل زیر) نسبت به محور خنثی می‌باشد.



فاصله مرکز سطح  $A$  (نقطه  $C'$ ) از محور خنثی برابر است :

$$\bar{y} = \frac{1}{2}(c + y)$$

در نتیجه، لنگر اول سطح برابر است با:

$$Q = A\bar{y} = b(c - y)\frac{1}{2}(c + y) = \frac{1}{2}b(c^2 - y^2)$$

و با توجه به اینکه ممان اینرسی مقطع مستطیلی به صورت زیر می‌باشد:

$$I = bh^3/12 = \frac{2}{3}bc^3$$

در نتیجه:

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{3}{4} \frac{c^2 - y^2}{bc^3} V$$

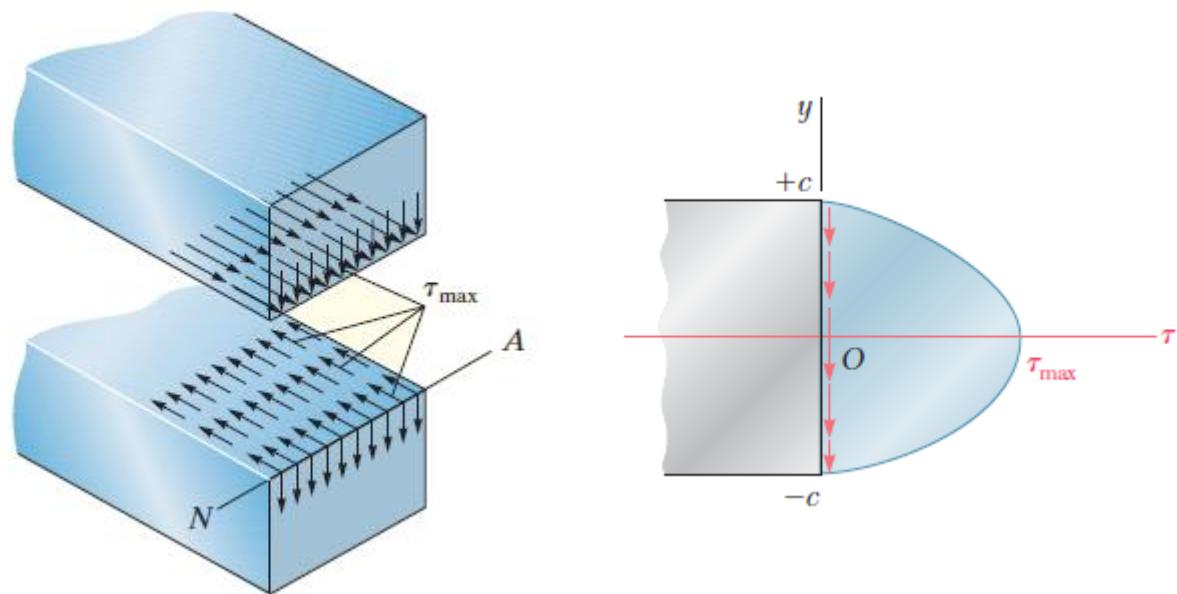
با توجه به اینکه مساحت مقطع عرضی به صورت زیر می‌باشد:

$$A = 2bc$$

خواهیم داشت:

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

با توجه به رابطه بدست آمده، متوجه می‌شویم که توزیع تنش برشی در مقطع عرضی یک تیر مستطیلی به صورت سهمی می‌باشد.



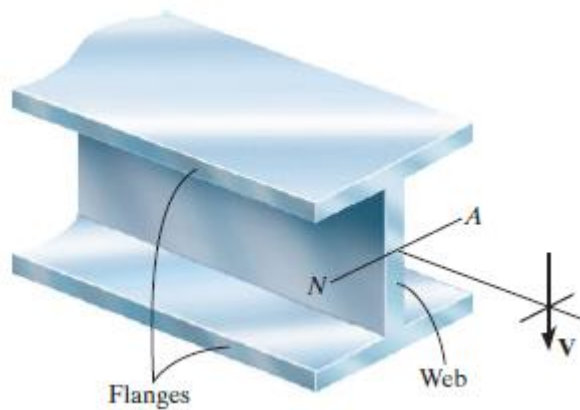
شکل 15: توزیع تنش برشی در مقطع مستطیلی

با جایگذاری  $(y = \pm c)$  در رابطه فوق که متناظر با لبه بالا و پایین مقطع می‌باشد، تنش برشی برابر صفر خواهد بود که در بخش قبل نیز به این نتیجه به صورت شهودی رسیدیم. همچنین با جایگذاری  $y = 0$  ماکزیمم مقدار تنش برشی در مقطع عرضی تیر باریک مستطیلی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A}$$

لذا به این نتیجه می‌رسیم که ماکزیمم مقدار تنش برشی در یک تیر با مقطع عرضی مستطیلی 50 درصد بیشتر از مقدار  $V/A$  حاصل از فرض نادرست توزیع یکنواخت تنش در تمام مقطع عرضی است.

تیر  $I$  شکل از مقاطع مرسوم در کارهای مهندسی می‌باشد. این تیر از بال و جان به صورت شکل زیر تشکیل شده است.



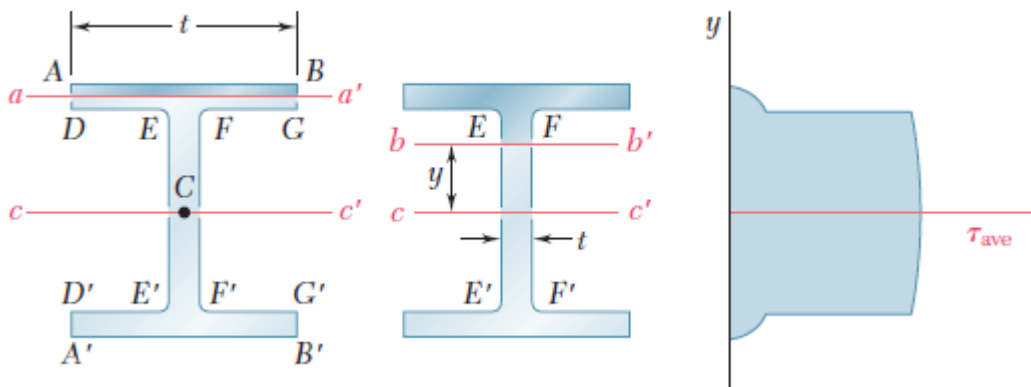
شکل 16: تیر I شکل

حال تیر I شکل به صورت زیر را در نظر بگیرید. برای تعیین مقدار متوسط تنش برشی  $\tau_{xy}$  در مقطع  $aa'$  یا  $bb'$  از مقطع عرضی می توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

که در آن  $V$  برش عمودی،  $t$  عرض مقطع در ارتفاع تحت بررسی و  $Q$  لنگر اول سطح سایه خورده نسبت به محور خنثی  $CC'$  و  $I$  ممان اینرسی کل سطح مقطع عرضی نسبت به محور خنثی  $CC'$  می باشد. در شکل زیر توزیع تنش  $\tau_{ave}$  نسبت به فاصله عمودی  $y$  را مشاهده می کنید.

به نظرتون علت ناپیوستگی در نمودار توزیع تنش چیست؟



در جان تیر، تنش برشی  $\tau_{xy}$  در عرض مقطع  $bb'$  فقط کمی تغییر می‌کند و می‌توان فرض کرد که با مقدار متوسط  $\tau_{ave}$  برابر است. ولی این موضوع برای بال‌های تیر صحت ندارد. مثلاً خط افقی  $DEFG$ ،  $\tau_{xy}$  بین  $D$  و  $E$  و بین  $F$  و  $G$  صفر است، زیرا این دو تکه قسمتی از سطح آزاد تیر هستند. از طرفی با جایگذاری  $t = EF$  در رابطه بالا، می‌توان  $\tau_{xy}$  بین  $E$  و  $F$  را بدست آورد.

در عمل، معمولاً فرض می‌شود که تمام بار برشی را جان تیر تحمل می‌کند و از تقسیم  $V$  بر مساحت مقطع عرضی جان تیر می‌توان ماکزیمم مقدار تنش برشی در مقطع عرضی را با تقریب خوبی به صورت زیر بدست آورد:

$$\tau_{\max} = \frac{V}{A_{\text{web}}}$$

لازم به ذکر است، گرچه می‌توان از مولفه قائم  $\tau_{xy}$  در بال‌ها صرف‌نظر کرد، ولی مولفه افقی  $\tau_{xz}$  آن قابل توجه است.

دقت کنید با توجه به رابطه زیر، تنش برشی در مقطع عرضی هنگامی حداکثر می‌شود که نسبت  $\frac{Q}{t}$  در مقطع ماکزیمم گردد.

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$\tau_{\max} = \frac{V}{I} \left( \frac{Q}{t} \right)_{\max}$$

توزیع تنش برشی در مقاطع دیگر مثلاً دایره‌ای، مثلثی، لوزی یا ... با استفاده از همین روندی که برای مستطیل استفاده شد،

بدست می‌آید و می‌توان نسبت تنش برشی به تنش برشی متوسط  $\tau_{ave} = \frac{V}{A}$  را به صورت رابطه کلی زیر نوشت:

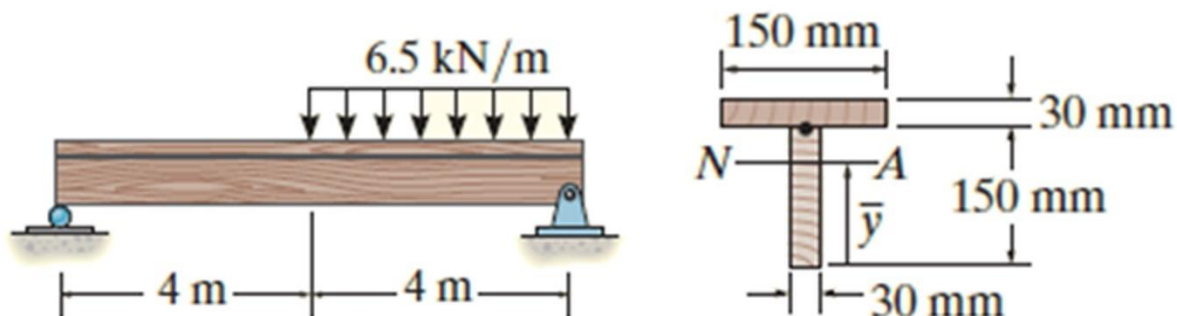
$$\tau = \square \times \tau_{ave} = \square \times \frac{V}{A}$$

## مثال های حل شده سری ۵

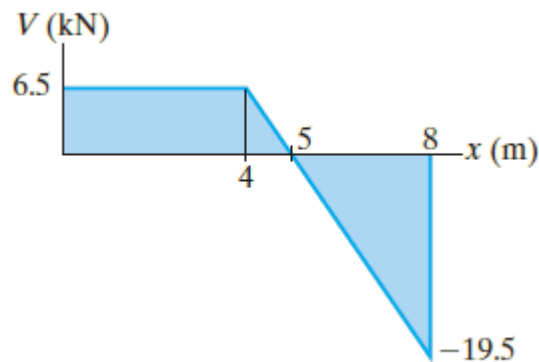
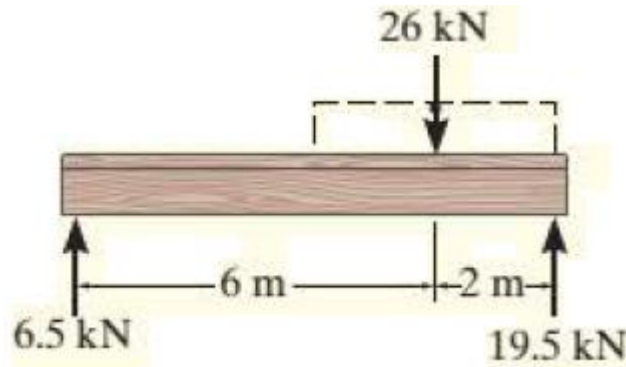
هدف: در این مثال با محاسبه تنش برشی ناشی از بارگذاری دلخواه عرضی در یک تیر آشنا خواهیم شد.

تیر نشان داده شده در شکل از دو تخته تشکیل شده است. حداکثر تنش برشی در چسب برای نگه داشتن تخته‌ها در امتداد درز اتصال را تحت بارگذاری وارده تعیین نمایید.

The beam shown in figure is made from two boards. Determine the maximum shear stress in the glue necessary to hold the boards together along the seam where they are joined.



با استفاده از اصول استاتیک، تیر را تحلیل و نمودار نیروی برش به عنوان نیروی داخلی تیر را برای آن ترسیم می‌کنیم. بدین منظور ابتدا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی را با استفاده از معادلات تعادل بدست آورده و در ادامه با استفاده از روش مقطع یا روش جمع زدن، نمودار برش به صورت زیر ترسیم می‌گردد.



با توجه به نمودار نیروی برشی، برش حداکثر در تیر برابر مقدار زیر می‌باشد:

$$V_{\max} = 19.5 \text{ kN}$$

طبق فرمول محاسبه تنش برشی ناشی از نیروی برش، لازم است محل محور ختشی و ممان اینرسی مقطع عرضی حول محور ختشی را محاسبه نماییم. برای محاسبه مرکز سطح داریم:

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A}$$

$$= \frac{[0.075 \text{ m}](0.150 \text{ m})(0.030 \text{ m}) + [0.165 \text{ m}](0.030 \text{ m})(0.150 \text{ m})}{(0.150 \text{ m})(0.030 \text{ m}) + (0.030 \text{ m})(0.150 \text{ m})} = 0.120 \text{ m}$$

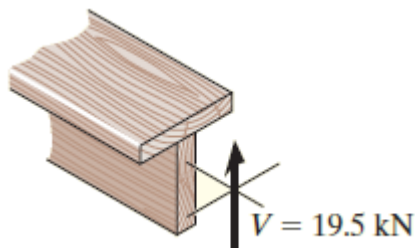
حال می‌توانیم ممان اینرسی مقطع را حول محور خنثی محاسبه نماییم:

$$I = \left[ \frac{1}{12} (0.030 \text{ m})(0.150 \text{ m})^3 + (0.150 \text{ m})(0.030 \text{ m})(0.120 \text{ m} - 0.075 \text{ m})^2 \right]$$

$$+ \left[ \frac{1}{12} (0.150 \text{ m})(0.030 \text{ m})^3 + (0.030 \text{ m})(0.150 \text{ m})(0.165 \text{ m} - 0.120 \text{ m})^2 \right]$$

$$= 27.0(10^{-6}) \text{ m}^4$$

دو تخته به وسیله چسب به هم متصل شده‌اند. لذا برای محاسبه تنش برشی در چسب که در محل اتصال دو تخته قرار دارد، لازم است تنش برشی در محل اتصال این دو تخته در مقطع عرضی محاسبه گردد و سپس طبق آنچه در کلاس درس یاد گرفتیم، تنش در چسب (تنش برشی طولی) که با این تنش در مقطع عرضی برابر است، بدست می‌آید.



$$Q = \bar{y}'A' = [0.180 \text{ m} - 0.015 \text{ m} - 0.120 \text{ m}](0.03 \text{ m})(0.150 \text{ m})$$

$$= 0.2025(10^{-3}) \text{ m}^3$$

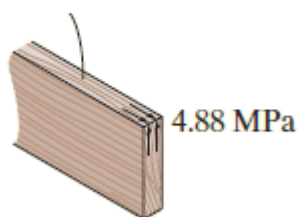


حال تنش برشی حداکثر به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} = \frac{19.5(10^3) \text{ N}(0.2025(10^{-3}) \text{ m}^3)}{27.0(10^{-6}) \text{ m}^4(0.030 \text{ m})} = 4.88 \text{ MPa}$$

در شکل زیر تنش برشی در محل اتصال دو تخته در مقطع عرضی و تنش در چسب نشان داده شده است.

صفحه شامل چسب



## مثال های حل شده سری ۵

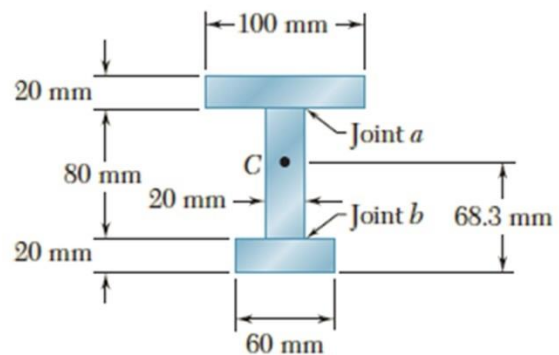
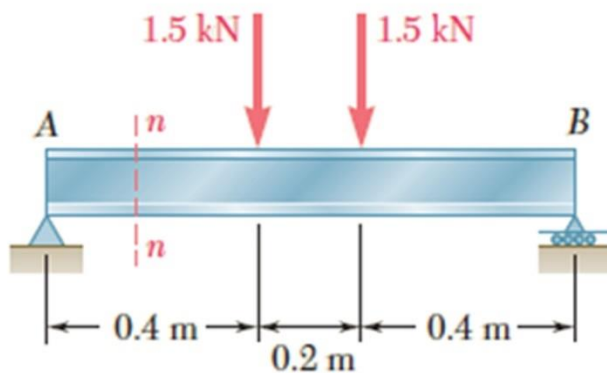
۲

هدف: در این مثال با محاسبه تنش برشی ناشی از نیروی برشی در یک مقطع آشنا خواهیم شد.

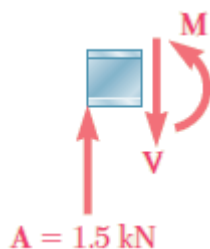
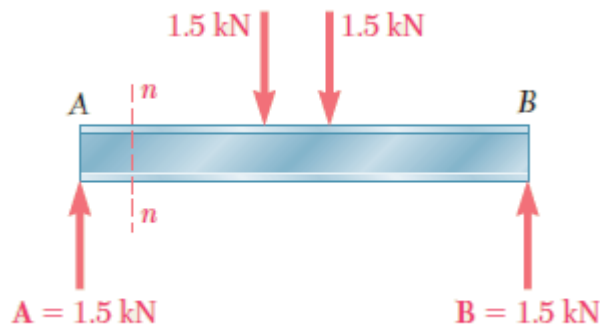
تیر  $AB$  از سه تخته چسب خورده تشکیل شده است و در صفحه تقارن خود تحت بارگذاری داده شده قرار دارد. اگر عرض هر اتصال چسب خورده 20 میلیمتر باشد، تنش برشی متوسط را در هر اتصال در مقطع  $n-n$  تیر بیابید. مکان مرکز سطح مقطع در شکل نشان داده شده است و ممان اینرسی نسبت به محور گذرا از مرکز سطح عبارت است از

$$I = 8.63 \times 10^{-6} m^4$$

Beam  $AB$  is made of three planks glued together and is subjected, in its plane of symmetry, to the loading shown. Knowing that the width of each glued joint is 20 mm, determine the average shearing stress in each joint at section  $n-n$  of the beam. The location of the centroid of the section is given in the sketch and the centroidal moment of inertia is known to be  $I = 8.63 \times 10^{-6} m^4$

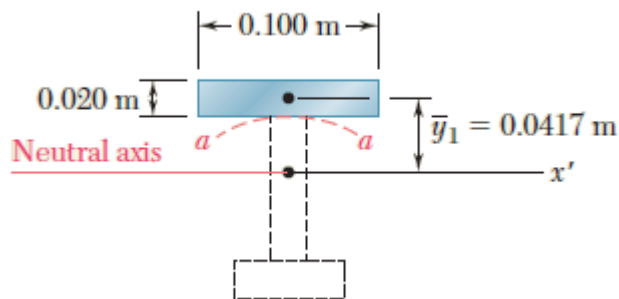


با استفاده از اصول استاتیک، نیروی برشی در مقطع  $n-n$  را به صورت زیر بدست می آوریم. ابتدا عکس العمل های تکیه گاهی با استفاده از معادلات تعادل بدست آمده و سپس در  $n-n$  مقطعی زده و نیروهای داخلی آن را بدست می آوریم.



$$+\uparrow \sum F_y = 0: \quad 1.5 \text{ kN} - V = 0 \quad V = 1.5 \text{ kN}$$

تنش برشی در اتصال  $a$  را با توجه به شکل زیر محاسبه می کنیم. در نقطه مورد نظر مقطعی  $(a-a)$  گذرانده و ممان اول سطح بالای این مقطع  $(a-a)$  را نسبت به محور خنثی برای استفاده در فرمول تنش برشی محاسبه می کنیم.

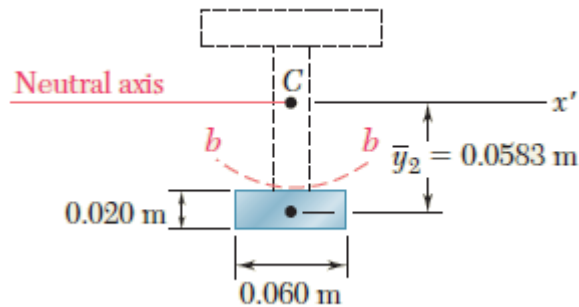


$$Q = A\bar{y}_1 = [(0.100 \text{ m})(0.020 \text{ m})](0.0417 \text{ m}) = 83.4 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1500 \text{ N})(83.4 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(8.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.020 \text{ m})} \quad \tau_{\text{ave}} = 725 \text{ kPa}$$

تنش برشی در اتصال  $b$  را با توجه به شکل زیر محاسبه می‌کنیم. در نقطه مورد نظر مقطعی  $(b-b)$  گذرانده و ممان اول سطح بالای این مقطع  $(b-b)$  را نسبت به محور خنثی برای استفاده در فرمول تنش برشی محاسبه می‌کنیم. دقت کنید طبق نکته‌ای که سر کلاس درس بحث کردیم، به جای محاسبه ممان اول سطح بالای مقطع

$(b-b)$ ، ممان اینرسی سطح پایین مقطع  $(b-b)$  را برای راحتی محاسبه می‌نماییم.



$$Q = A\bar{y}_2 = [(0.060 \text{ m})(0.020 \text{ m})](0.0583 \text{ m}) = 70.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1500 \text{ N})(70.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(8.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.020 \text{ m})} \quad \tau_{\text{ave}} = 608 \text{ kPa}$$

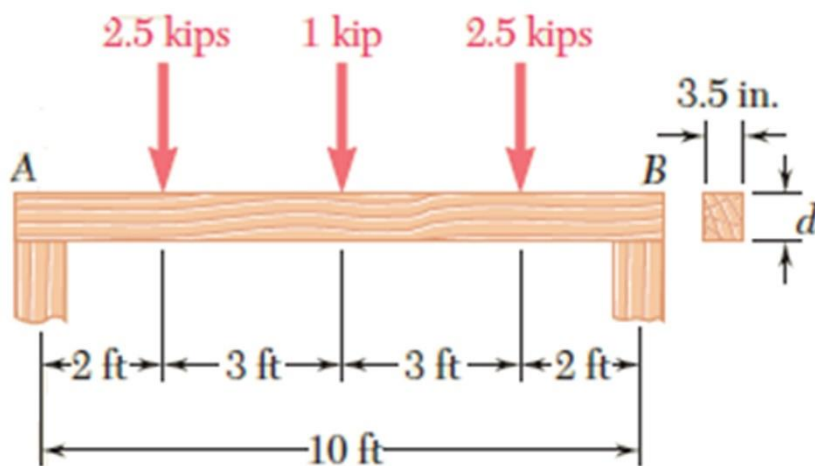
## مثال های حل شده سری ۵

۳

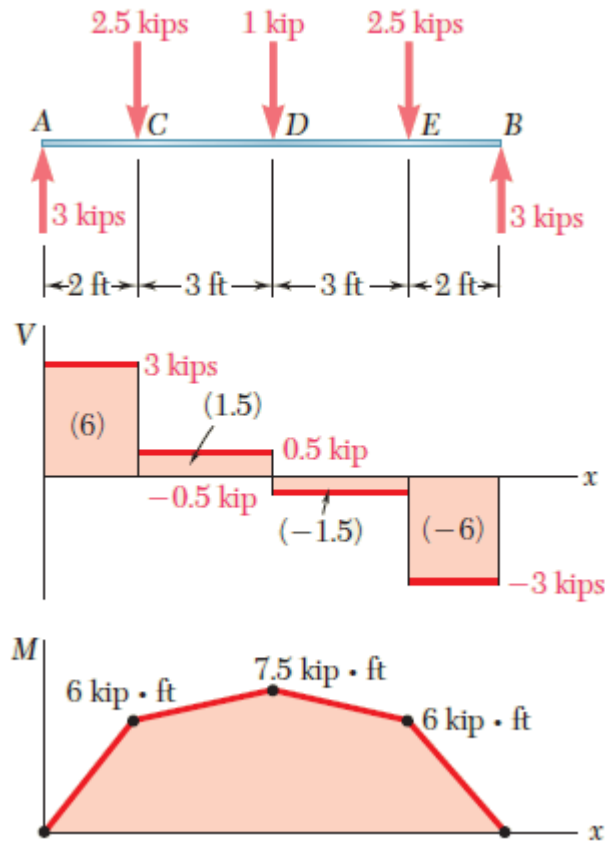
هدف: در این مثال با طراحی تیر تحت برش و خمش آشنا خواهیم شد.

تیر چوبی  $AB$  با دهانه 10 فوت و عرض  $3/5$  اینچ تحت سه بار متمرکز قرار دارد. اگر برای چوب به کار رفته  $\sigma_{all} = 1800 \text{ psi}$  و  $\tau_{all} = 120 \text{ psi}$  باشد، مینیمم عمق  $d$  تیر را بیابید.

A timber beam  $AB$  of span 10 ft and width = 3.5 in. is to support the three concentrated loads shown. Knowing that for the grade of timber used  $\sigma_{all} = 1800 \text{ psi}$  and  $\tau_{all} = 120 \text{ psi}$  determine the minimum required depth  $d$  of the beam.



با استفاده از اصول استاتیک، نمودار نیروی برش و لنگر خمشی تیر را به صورت زیر ترسیم می‌کنیم:



با توجه به نمودارهای ترسیم شده، مقادیر حداکثر برش و خمش در طول تیر به صورت زیر می‌باشد:

$$M_{\max} = 7.5 \text{ kip} \cdot \text{ft} = 90 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$

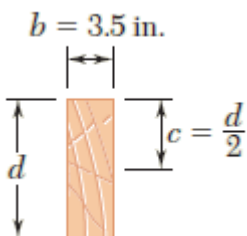
$$V_{\max} = 3 \text{ kips}$$

ابتدا طراحی را براساس تنش مجاز نرمال به صورت زیر انجام می‌دهیم. مدول (اساس) مقطع بر حسب عمق (ارتفاع) تیر به

صورت زیر می‌باشد:

$$S = \frac{I}{c} = \frac{1}{6}bd^2 = \frac{1}{6}(3.5)d^2 = 0.5833d^2$$

با استفاده از تنش مجاز نرمال و لنگر خمشی حداکثر داریم:



$$S = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{all}}} \quad 0.5833d^2 = \frac{90 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{1800 \text{ psi}}$$

$$d^2 = 85.7 \quad d = 9.26 \text{ in.}$$

اگر عمق تیر برابر مقدار بدست آمده باشد، تنش نرمال از تنش مجاز نرمال کمتر خواهد بود. حال لازم است تنش برشی به ازای این مقدار از عمق بدست آمده را محاسبه و با تنش مجاز برشی مقایسه کنیم. اگر تنش برشی نیز کمتر از مقدار تنش برشی مجاز باشد، مقدار  $d$  بدست آمده، جواب طراحی می باشد. ولی اگر تنش برشی بیشتر از مقدار مجاز گردد، لازم است مقدار  $d$  اصلاح گردد.

برای نیروی برشی حداکثر در تیر و  $d$  بدست آمده در بخش قبل، مقدار تنش برشی حداکثر به صورت زیر بدست می آید:

$$\tau_m = \frac{3}{2} \frac{V_{\max}}{A} = \frac{3}{2} \frac{3000 \text{ lb}}{(3.5 \text{ in.})(9.26 \text{ in.})} \quad \tau_m = 138.8 \text{ psi}$$

که این تنش برشی حداکثر از مقدار تنش برشی مجاز بیشتر است و لازم است ابعاد  $d$  را تغییر دهیم به گونه ای که تنش برشی حداکثر نیز از تنش مجاز کمتر گردد. لذا داریم:

$$\tau_m = \tau_{\text{all}} = \frac{3}{2} \frac{V_{\max}}{A} \quad 120 \text{ psi} = \frac{3}{2} \frac{3000 \text{ lb}}{(3.5 \text{ in.})d}$$

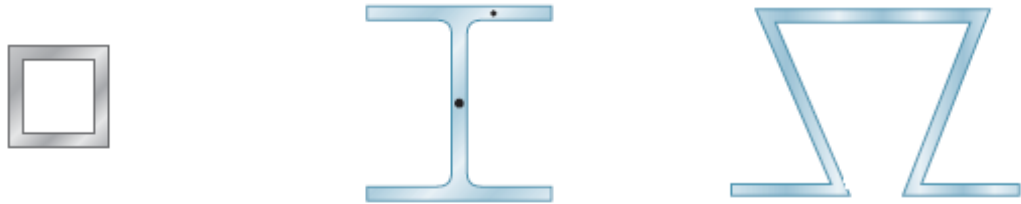
$$d = 10.71 \text{ in.}$$

که این مقدار  $d$  بدست آمده، حداقل عمق (ارتفاع) تیر می باشد که در آن تنش نرمال و برشی همزمان کمتر از مقدار مجاز می باشد.

## تنش برشی در مقاطع جدارنازک تحت نیروی برشی

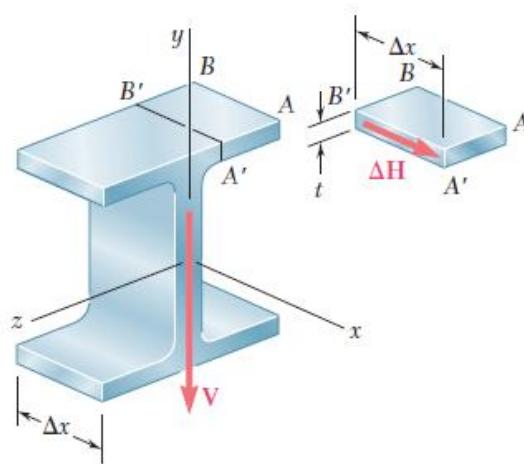


در این بخش به بررسی تنش برشی و جریان برش ناشی از نیروی داخلی برشی در مقاطع جدارنازک خواهیم پرداخت. نمونه‌ای از مقاطع جدارنازک در شکل‌های زیر نشان داده شده است.



قطعه‌ای به طول  $\Delta x$  از یک تیر بال‌پهن را به صورت زیر در نظر بگیرید. جزء  $ABB'A'$  را از بال بالایی با یک برش عمودی جدا می‌کنیم. با استفاده از رابطه‌ای که جلسه قبل بدست آوردیم، نیروی برش طولی وارد بر این جزء را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta H = \frac{VQ}{I} \Delta x$$

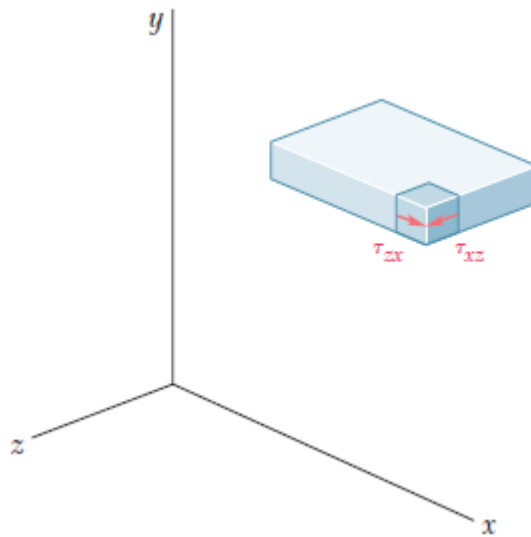




تنش برشی متوسط وارد بر این جزء نیز به صورت زیر تعیین می گردد:

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

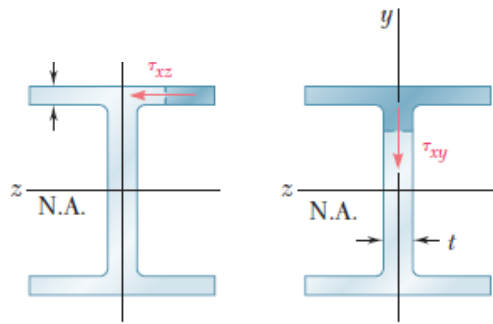
لازم به ذکر است که  $\tau_{ave}$  محاسبه شده، مقدار متوسط  $\tau_{zx}$  می باشد. و به یاد داریم که  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  می باشد.



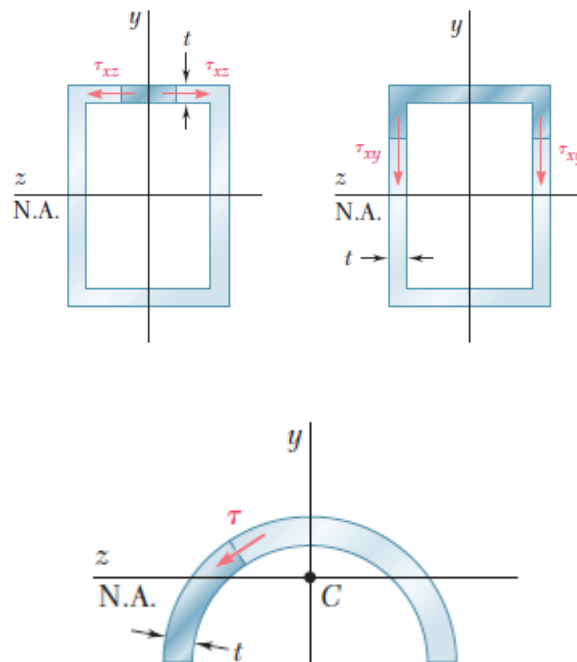
در نتیجه برای تعیین مولفه افقی  $\tau_{xz}$  در هر نقطه مقطع عرضی بال از رابطه زیر استفاده کرد.

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

در معادله فوق،  $Q$  ممان اول سطح (لنگر اول سطح) سایه خورده نسبت به محور خنثی می باشد که در شکل زیر در نقاط مختلف مقطع (بال و جان) نشان داده شده است. نکته دیگری که لازم است توجه شود این است که به علت نزدیکی دو سطح آزاد به یکدیگر، مولفه دیگر (عمودی) تنش برشی در بال را می توان صفر در نظر گرفت. به طور کلی در اجزا جدار نازک، تنش برشی ایجاد شده در جهت طول جزء بزرگتر از تنش ایجاد شده در ضخامت آن است.



برای تعیین تنش‌های برشی در سایر عضوهای جدارنازک، تا وقتی بارها در صفحه تقارن عضو اعمال می‌شوند، می‌توان از رابطه بالا استفاده کرد. در هر حالت مقطع بریده شده باید بر سطح عضو عمود باشد و در این حالت مولفه تنش برشی بدست آمده از رابطه بالا در جهت مماس بر آن سطح را نشان می‌دهد.

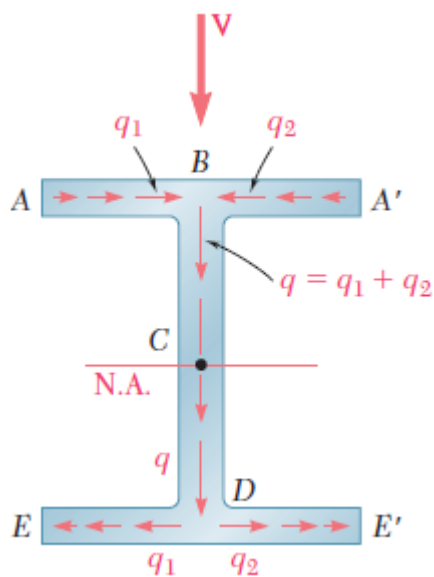
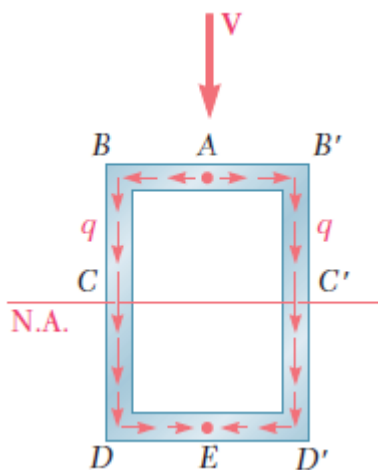


از جلسات قبل، رابطه تنش برشی و جریان برش به صورت زیر می‌باشد:

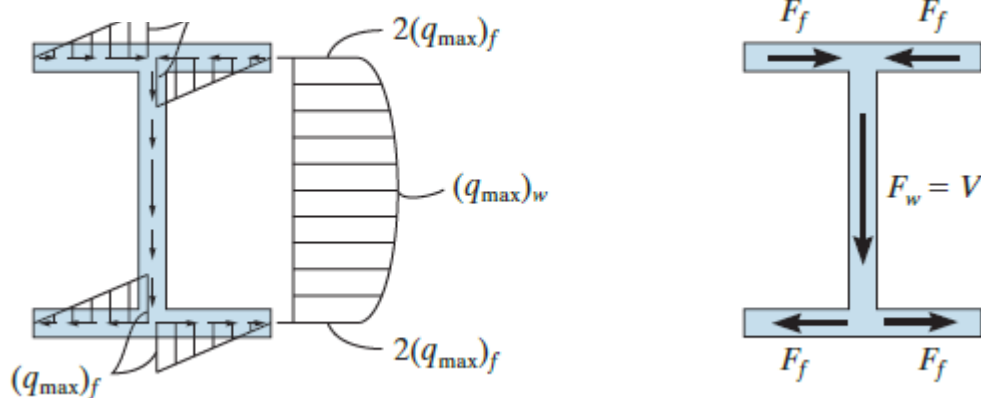
$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$q = \frac{VQ}{I}$$

با مقایسه این روابط به این نتیجه می‌رسیم که  $q = \tau \times t$  که در آن  $q$  جریان برش در یک نقطه و  $\tau$  تنش برشی در یک نقطه معین از مقطع و  $t$  ضخامت مقطع در آن نقطه می‌باشد. با توجه به ثابت بودن  $V$  و  $I$  در تمام مقطع، جریان برش  $q$  فقط به لنگر اول سطح  $Q$  بستگی دارد. لذا می‌توان تغییرات جریان برش را روی مقطع ترسیم کرد. به عنوان مثال به توزیع جریان برش در مقاطع زیر دقت کنید.



در شکل زیر توزیع جریان برش ناشی از نیروی برش عمودی با جزئیات نشان داده شده است.



نکات زیر در ترسیم جریان برش کمک کننده خواهد بود:

1- اگر یک مقطع جدارنازک دارای محور تقارن در راستای قائم (راستای اعمال برش) بوده و بر روی محور تقارن قائم، عضو قائمی وجود نداشته باشد، تنش برشی روی هر نقطه که بر روی محور تقارن قائم باشد، صفر خواهد بود.

2- نقاطی که در لبه (نوک) آزاد مقطع قرار دارند، دارای تنش برشی صفر می باشند.

حال با استفاده از دو نکته بالا، به روش زیر مرحله به مرحله جریان برش را ترسیم می کنیم:

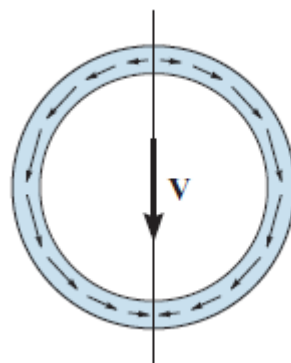
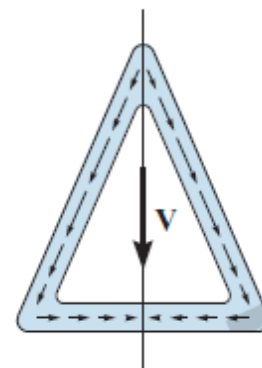
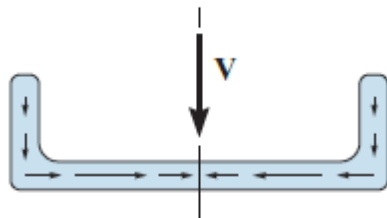
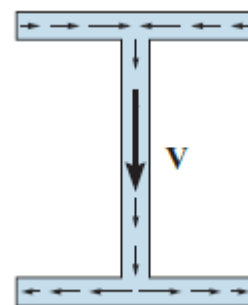
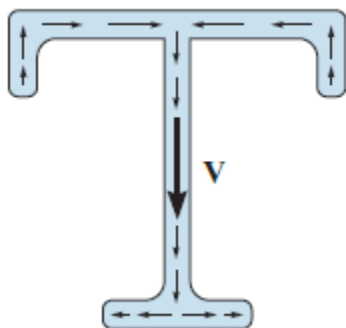
1- ابتدا نقاطی که تنش برشی در آن ها صفر است، به عنوان نقطه شروع انتخاب می کنیم.

2- برای تعیین جهت برش در هر نقطه، ابتدا مقطع را در آن نقطه با خط چین به دو قسمت تقسیم می کنیم و آن قسمتی که محاسبه لنگر اول سطح  $Q$  راحت است را انتخاب می کنیم.

3- اگر  $Q$  سطح انتخاب شده، مثبت باشد (یعنی مرکز سطح آن بالای محور خنثی باشد) جریان برش به خط چین نزدیک می شود در غیر اینصورت وقتی  $Q$  منفی باشد، جریان برش از خط چین دور خواهد شد.

\*\* لزومی به مقطع زدن در تمام نقاط مقطع نیستو معمولاً وقتی جهت جریان در یک یا دو جزء مشخص شد از قاعده جریان آب و اصل تقارن، جهت جریان در سایر اجزا را می توان بدست آورد. همچنین مطابق اصل پیوستگی جریان برش، در هر گره از یک مقطع، جمع جریان های برش ورودی و خروجی با یکدیگر برابر است.

نمونه‌ای از جریان برش در مقاطع مختلف در شکل‌های زیر نشان داده شده است.



برای جمع بندی این بخش، دقت شود که فرض کردیم که تمام بارها در صفحه تقارن عضو وارد می شوند. در عضوهایی که دو صفحه تقارن دارند، هر باری را که از مرکز سطح یک مقطع داده شده می گذرد را می توان به مولفه هایی در امتداد دو محور تقارن آن مقطع تجزیه کرد. هر مولفه باعث می شود عضو در صفحه تقارن خمیده شود و تنش های برشی متناظر را از رابطه  $\tau = \frac{VQ}{It}$  بدست آورد. سپس از اصل ترکیب (جمع آثار) برای تعیین تنش های حاصل استفاده کرد.

اگر عضو تحت بررسی فاقد صفحه تقارن باشد، یا یک صفحه تقارن داشته باشد و تحت باری قرار داشته باشد که در آن صفحه نیست، عضو به طور همزمان خمیده و پیچیده می شود، به جز وقتی که بار در نقطه خاصی به نام **مرکز برش**، وارد شود. این حالت را بعد از جلسه مربوط به پیچش بررسی خواهیم کرد.

۵-۵



### محاسبه نیروی برشی معادل تنش برشی وارد بر قسمتی از مقطع

با استفاده از تعریف تنش برشی، برای محاسبه نیروی معادل تنش برشی در بخشی از مقطع از رابطه زیر استفاده می کنیم:

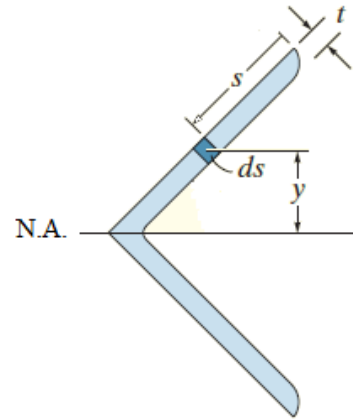
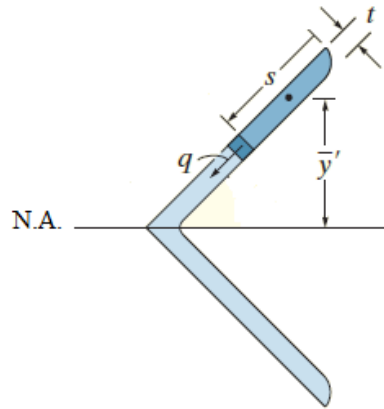
$$F = \int_{x_1}^{x_2} \tau dA$$

در مقاطع جدار نازک، رابطه فوق به صورت زیر در می آید:

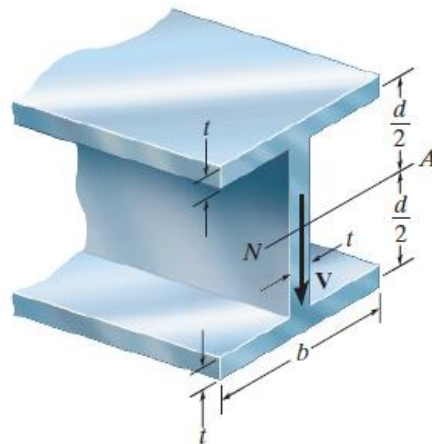
$$F = \int_{x_1}^{x_2} \tau dA = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{q}{t}\right)(t ds) = \int_{x_1}^{x_2} q ds$$

$$F = \int_{x_1}^{x_2} q ds \quad \text{لذا:}$$

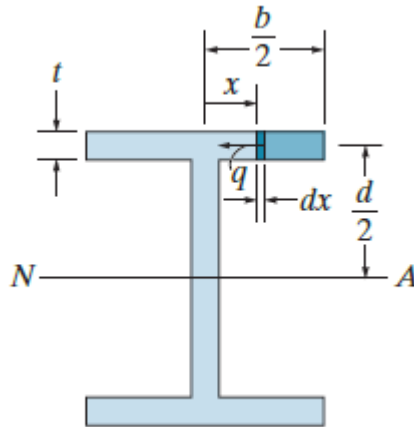
به شکل زیر به عنوان نمونه ای از یک مقطع جدار نازک دقت کنید.



برای خاتمه بحث این جلسه، مثالی از محاسبه جریان برش و نیروی ناشی از برش در یک مقطع جدار نازک  $I$  شکل را بررسی می‌کنیم.



الف: جریان برش و نیروی ناشی از تنش برشی در بال تیر



$$Q = \bar{y}' A' = [d/2](b/2 - x)t$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V(d/2)(b/2 - x)t}{I} = \frac{Vtd}{2I} \left( \frac{b}{2} - x \right)$$

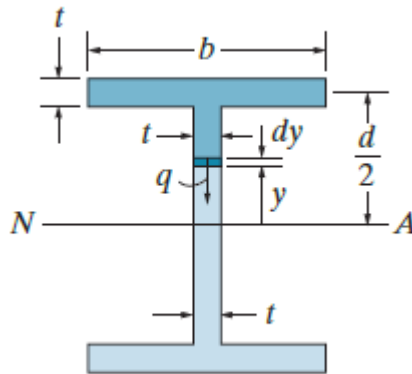
$$(q_{\max})_f = Vtdb/4I$$

$$F_f = \int q \, dx = \int_0^{b/2} \frac{Vtd}{2I} \left( \frac{b}{2} - x \right) dx = \frac{Vtdb^2}{16I}$$

$$F_f = \frac{1}{2} (q_{\max})_f \left( \frac{b}{2} \right) = \frac{Vtdb^2}{16I}$$



ب: جریان برش و نیروی ناشی از تنش برشی در جان تیر



$$Q = \Sigma \bar{y}' A' = [d/2](bt) + [y + (1/2)(d/2 - y)]t(d/2 - y)$$

$$= bt d/2 + (t/2)(d^2/4 - y^2)$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vt}{I} \left[ \frac{db}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) \right]$$

$$F_w = \int q dy = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{Vt}{I} \left[ \frac{db}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right) \right] dy$$

$$= \frac{Vt}{I} \left[ \frac{db}{2} y + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{4} y - \frac{1}{3} y^3 \right) \right] \Big|_{-d/2}^{d/2}$$

$$= \frac{Vtd^2}{4I} \left( 2b + \frac{1}{3} d \right)$$

ممان اینرسی مقطع به صورت زیر می باشد:

$$I = 2 \left[ \frac{1}{12} b t^3 + b t \left( \frac{d}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{12} t d^3$$

ممان اینرسی مقطع را با توجه به کوچکی ضخامت به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$I = \frac{t d^2}{4} \left( 2b + \frac{1}{3} d \right)$$

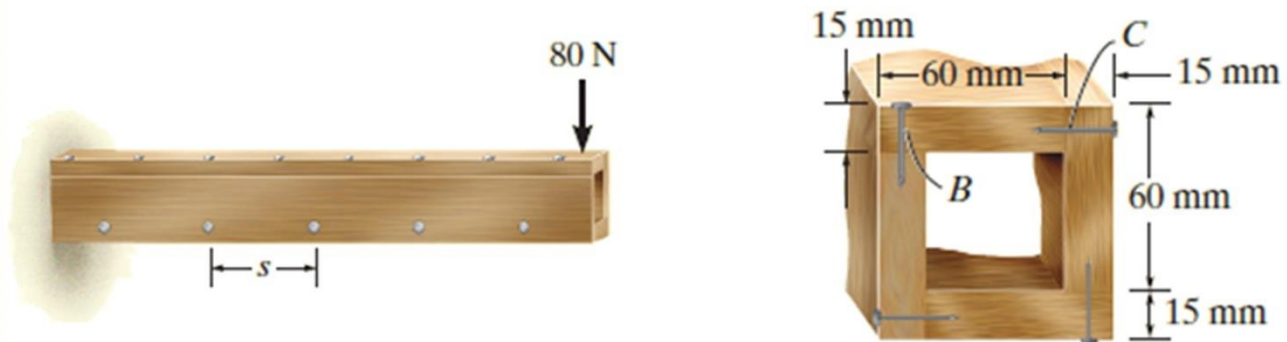
## مثال های حل شده سری ۶

۱

هدف: در این مثال با محاسبه تنش برشی در ادوات اتصال (میخ و ..) و نحوه محاسبه نیرو و فاصله بین آنها تحت نیروی برشی آشنا خواهیم شد.

تیر جعبه‌ای نشان داده شده از 4 تخته که به وسیله میخ به هم متصل شده‌اند، ساخته شده است. اگر هر میخ بتواند نیروی برشی برابر 30 نیوتن را تحمل کند، حداکثر فاصله میخ‌ها  $s$  را در نقاط  $B$  و  $C$  با گرد کردن به 5 میلی‌متر به گونه‌ای تعیین کنید که تیر بار 80 نیوتن وارد را تحمل کند.

A box beam is constructed from four boards nailed together as shown in figure. If each nail can support a shear force of 30 N, determine the maximum spacing  $s$  of the nails at B and at C to the nearest 5 mm. so that the beam will support the force of 80 N.



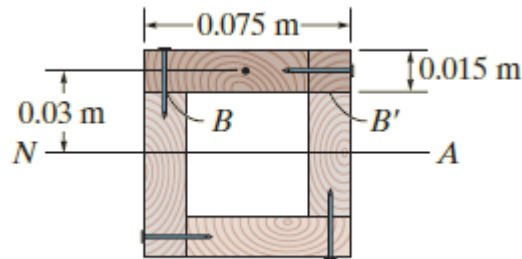
با استفاده از اصول استاتیک، نمودار نیروی داخلی برش در طول تیر به صورت زیر ترسیم می‌گردد:



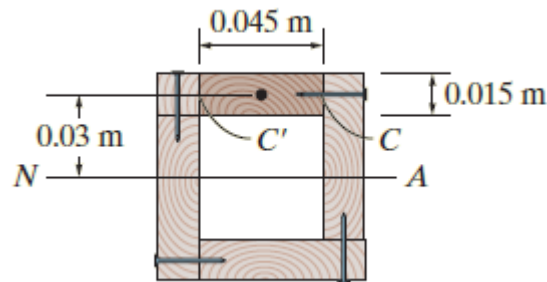
با توجه به شکل مقطع عرضی، ممان اینرسی مقطع حول محور خنثی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$I = \frac{1}{12}(0.075 \text{ m})(0.075 \text{ m})^3 - \frac{1}{12}(0.045 \text{ m})(0.045 \text{ m})^3 = 2.295(10^{-6}) \text{ m}^4$$

برای بدست آوردن جریان برش در نقاط خواسته شده با توجه به تقارن مقطع نسبت به محور قائم (راستای نیروی برشی) در نقاط مورد نظر و نقاط متناظر متقارن آنها مقطع زده و لنگر اول سطح را بدست می‌آوریم. از کلاس به یاد داریم که جریان برش در این نقاط و نقاط متناظر متقارن آنها برابر است.



$$Q_B = \bar{y}'A' = (0.03\text{m})(0.075\text{m})(0.015\text{m}) = 33.75(10^{-6})\text{m}^3$$



$$Q_C = \bar{y}'A' = (0.03\text{m})(0.045\text{m})(0.015\text{m}) = 20.25(10^{-6})\text{m}^3$$

حال، جریان برش به صورت زیر قابل محاسبه می باشد:

$$q_B = \frac{VQ_B}{I} = \frac{(80 \text{ N})[33.75(10^{-6}) \text{ m}^3]}{2.295(10^{-6}) \text{ m}^4} = 1176.47 \text{ N/m}$$

$$q_C = \frac{VQ_C}{I} = \frac{(80 \text{ N})[20.25(10^{-6}) \text{ m}^3]}{2.295(10^{-6}) \text{ m}^4} = 705.88 \text{ N/m}$$

دقت کنید که مقادیر جریان برش بدست آمده، به عنوان مثال  $q_B$ ، بیانگر نیروی برش در واحد طول تیر می باشد که میخ در  $B$  و چوب در  $B'$  تحمل می کنند. فواصل مناسب میخ ها در نقاط  $B$  و  $C$  به صورت زیر بدست می آید:

$$s_B = \frac{30 \text{ N}}{(1176.47/2) \text{ N/m}} = 0.0510 \text{ m} = 51.0 \text{ mm} \quad \text{Use } s_B = 50 \text{ mm}$$

$$s_C = \frac{30 \text{ N}}{(705.88/2) \text{ N/m}} = 0.0850 \text{ m} = 85.0 \text{ mm} \quad \text{Use } s_C = 85 \text{ mm}$$

## مثال های حل شده سری ۶

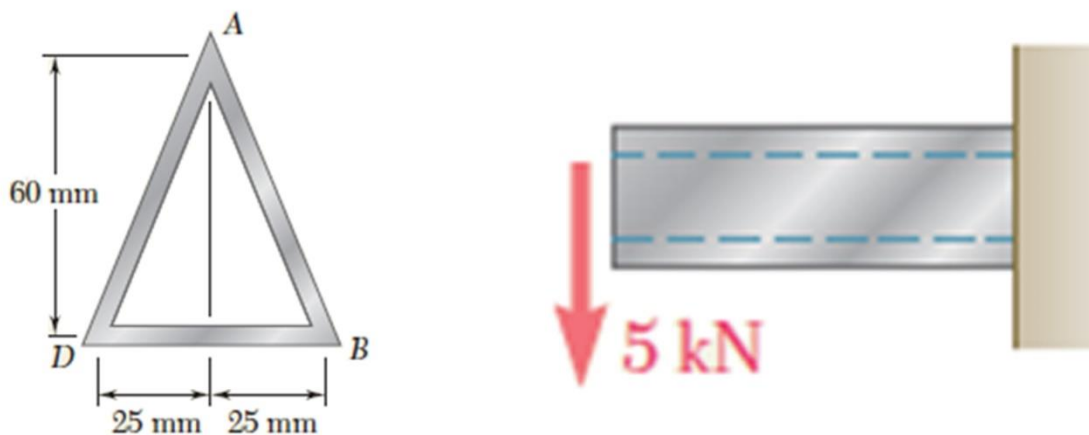
۲

هدف: در این مثال با محاسبه تنش برشی ناشی از نیروی برشی در یک مقطع جدار نازک با اضلاع مورب آشنا خواهیم شد.

تیر جدارنازک آلومینیومی نشان داده شده دارای دیواره یکنواخت با ضخامت 3 میلیمتر است. اگر نیروی برشی در تیر 5 کیلونیوتن باشد، مطلوبست: (الف) تنش برشی در نقطه  $A$ ، (ب) ماکزیمم تنش برشی در تیر. توجه: ابعاد داده شده تا خطوط میانی سطوح خارجی و داخلی تیر هستند.

The thin-walled extruded beam shown is made of aluminum and has a uniform 3-mm wall thickness. Knowing that the shear in the beam is 5 kN, determine (a) the shearing stress at point  $A$ , (b) the maximum shearing stress in the beam.

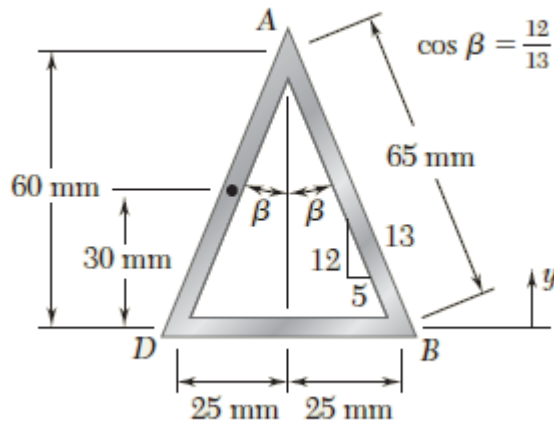
*Note:* The dimensions given are to lines midway between the outer and inner surfaces of the beam.



با توجه به هندسه مقطع تیر داریم:

$$AB = AD = 65 \text{ mm.}$$

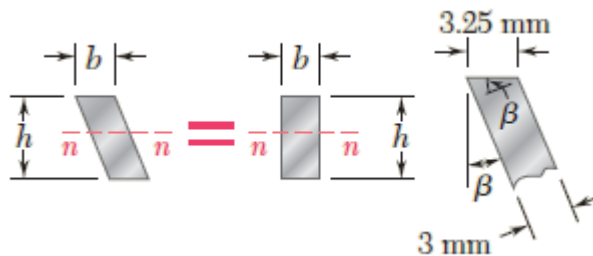
با توجه به شکل زیر مرکز هندسی مقطع را تعیین می‌کنیم:

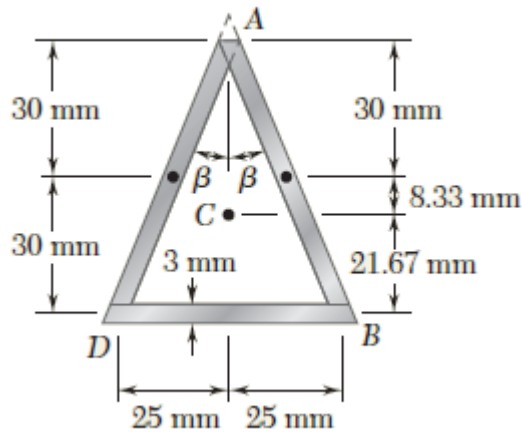


$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{2[(65 \text{ mm})(3 \text{ mm})(30 \text{ mm})]}{2[(65 \text{ mm})(3 \text{ mm})] + (50 \text{ mm})(3 \text{ mm})}$$

$$\bar{Y} = 21.67 \text{ mm}$$

حال ممان اینرسی مقطع را نسبت به محور گذرا از مرکز سطح (محور خنثی) محاسبه می‌کنیم. چون دو ضلع مقطع مورب می‌باشند از نکته زیر که نحوه محاسبه ممان اینرسی متوازی الاضلاع می‌باشد، استفاده می‌کنیم:





$$b = (3 \text{ mm}) / \cos \beta = (3 \text{ mm}) / (12/13) = 3.25 \text{ mm}$$

$$I = \Sigma (\bar{I} + Ad^2) = 2 \left[ \frac{1}{12} (3.25 \text{ mm})(60 \text{ mm})^3 + (3.25 \text{ mm})(60 \text{ mm})(8.33 \text{ mm})^2 \right] + \left[ \frac{1}{12} (50 \text{ mm})(3 \text{ mm})^3 + (50 \text{ mm})(3 \text{ mm})(21.67 \text{ mm})^2 \right]$$

$$I = 214.6 \times 10^3 \text{ mm}^4 \quad I = 0.2146 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

با توجه به تقارن مقطع عرضی و بارگذاری نسبت به یک خط عمودی گذرا از A نتیجه می‌گیریم که تنش برشی در این نقطه برابر صفر می‌باشد.

برای تعیین ماکزیمم تنش برشی، چون ضخامت مقطع ثابت است، ماکزیمم تنش برشی در محور خنثی به وجود می‌آید. یعنی در جایی که Q ماکزیمم است. با توجه به اینکه تنش برشی در A صفر است، مقطع را در امتداد خط چین نشان داده در شکل زیر می‌بریم و قسمت سایه خورده را جدا می‌کنیم. برای تعیین ماکزیمم تنش برشی، مقطع بریده در محور خنثی را عمود بر وجوه می‌گیریم.



حال مقدار تنش برشی ماکزیمم به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$Q = [(3.25 \text{ mm})(38.33 \text{ mm})] \left( \frac{38.33 \text{ mm}}{2} \right) = 2387 \text{ mm}^3$$

$$Q = 2.387 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_E = \frac{VQ}{It} = \frac{(5 \text{ kN})(2.387 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(0.2146 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.003 \text{ m})} \quad \tau_{\max} = \tau_E = 18.54 \text{ MPa}$$

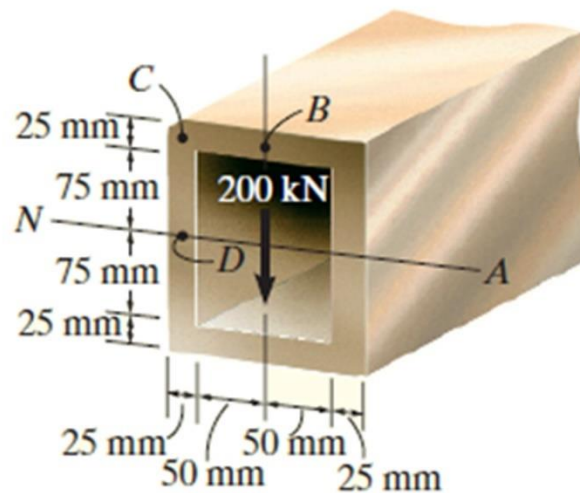
## مثال های حل شده سری ۶

۳

هدف: در این مثال با محاسبه تنش برشی ناشی از بارگذاری دلخواه عرضی در یک تیر آشنا خواهیم شد.

تیر با مقطع جدار نازک جعبه‌ای تحت اثر نیروی برش 200 کیلو نیوتنی قرار دارد. تغییرات جریان برش در مقطع را تعیین و ترسیم نمایید.

The thin-walled box beam is subjected to a shear of 200 KN. Determine the variation of the shear flow throughout the cross section.



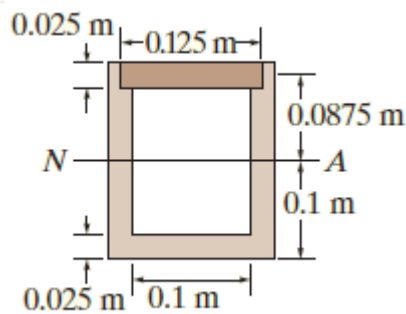
ابتدا ممان اینرسی مقطع عرضی را نسبت به محور خشی محاسبه می‌کنیم. به یاد داشته باشید در مقاطع جدارنازک ابعاد مورد استفاده برای محاسبه ممان اینرسی در عمده موارد، ابعاد مربوط به خط میانی (خط میانی ضخامت) می‌باشد.

$$I = \frac{1}{12} (0.05 \text{ m})(0.175 \text{ m})^3 + 2[(0.125 \text{ m})(0.025 \text{ m})(0.0875 \text{ m})^2] = 70.18(10^{-6}) \text{ m}^4$$

با توجه به تقارن مقطع جریان برش در نقطه  $B$  برابر صفر می‌باشد. لذا:

$$q_B = 0$$

برای نقطه  $C$  با توجه به تقارن مقطع، ناحیه پررنگ را برای محاسبه لنگر اول سطح جدا می‌کنیم

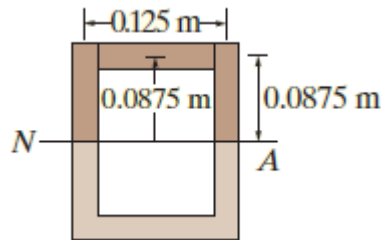


$$Q_c = \bar{y}' A' = (0.0875 \text{ m})(0.125 \text{ m})(0.025 \text{ m}) = 0.27344(10^{-3}) \text{ m}^3$$

لذا داریم:

$$q_c = \frac{1}{2} \left( \frac{VQ_c}{I} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{[200 (10^3) \text{ N}] [0.27344 (10^{-3}) \text{ m}^3]}{70.18 (10^{-6}) \text{ m}^4} \right] = 389.61(10^3) \text{ N/m} = 390 \text{ kN/m}$$

برای نقطه  $D$  نیز با توجه به تقارن مقطع، ناحیه پررنگ را برای محاسبه لنگر اول سطح جدا می‌کنیم

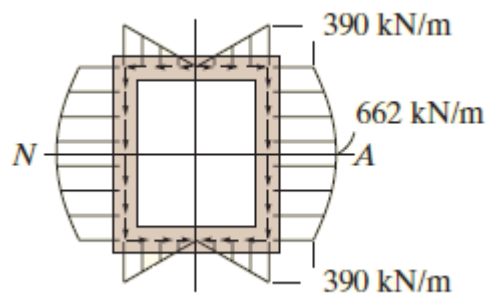


$$Q_D = \Sigma \bar{y}' A' = 2 \left[ \left( \frac{0.0875 \text{ m}}{2} \right) (0.025 \text{ m}) (0.0875 \text{ m}) \right] + [0.0875 \text{ m}] (0.125 \text{ m}) (0.025 \text{ m}) = 0.4648 (10^{-3}) \text{ m}^3$$

لذا داریم:

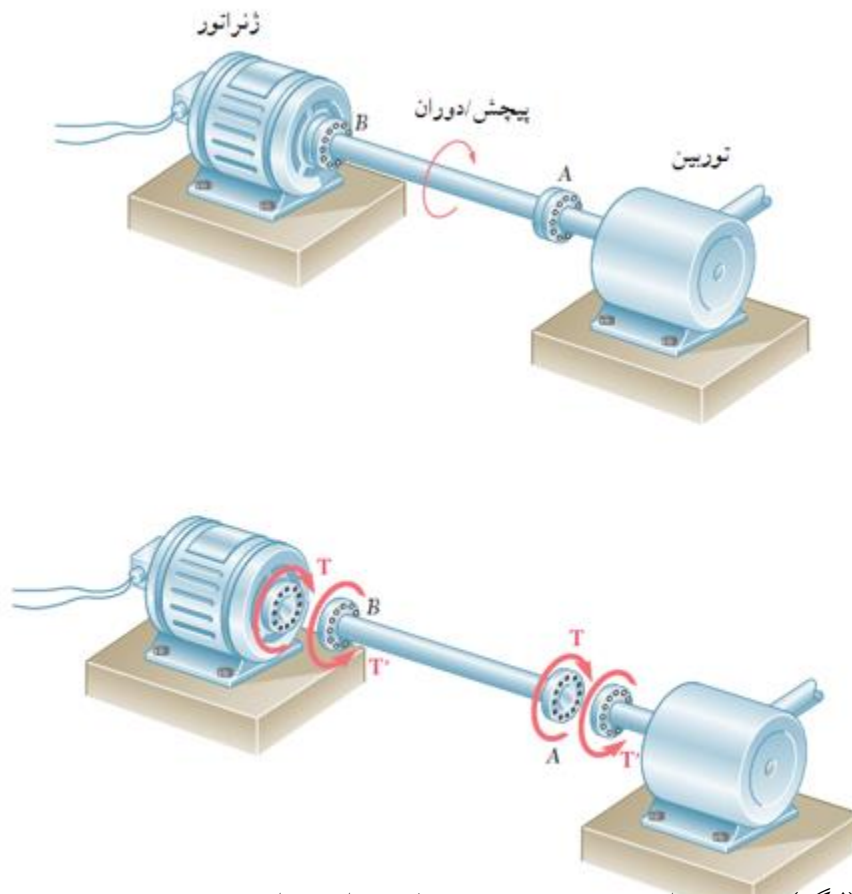
$$q_D = \frac{1}{2} \left( \frac{V Q_D}{I} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{[200 (10^3) \text{ N}] [0.4648 (10^{-3}) \text{ m}^3]}{70.18 (10^{-6}) \text{ m}^4} \right] = 662.33 (10^3) \text{ N/m} = 662 \text{ kN/m}$$

با توجه به مقادیر بدست آمده برای جریان برش، و توجه به تقارن مقطع، توزیع جریان برش به صورت زیر می‌باشد. طبق آنچه در کلاس یاد گرفتیم توزیع جریان برش در اضلاع افقی این مقطع (عمود بر نیروی برش  $V$ ) به صورت خطی و در اضلاع عمودی (موازی با نیروی برش  $V$ ) به صورت سهمی می‌باشد.

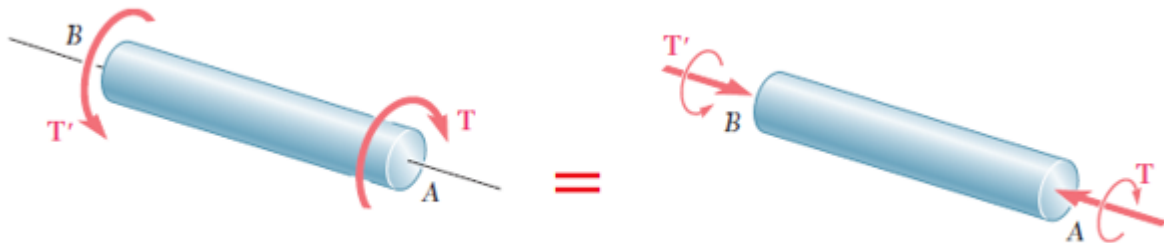




در این بخش به بررسی تنش و کرنش برشی ناشی از پیچش در اعضای ساختمانی و مکانیکی خواهیم پرداخت. مثال بسیار بارز و متداول از عضو تحت پیچش در کاربردهای مهندسی، شفت است که برای انتقال قدرت از یک نقطه به نقطه دیگر به کار می‌رود (شکل زیر).

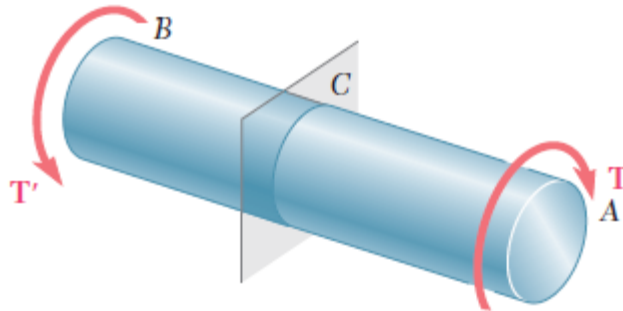


همانند لنگر خمشی، کوپل (لنگر) پیچشی را نیز به صورت زیر نشان خواهیم داد.

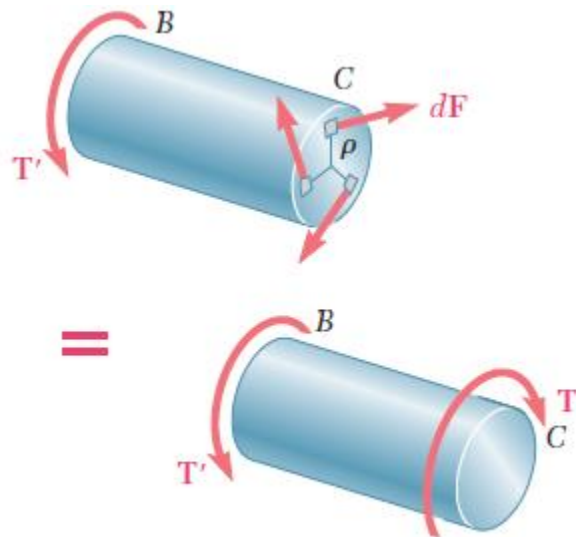


## تنش و کرنش ناشی از پیچش در مقطع دایره‌ای

شفث  $AB$  را که در نقاط  $A$  و  $B$  تحت گشتاورهای مساوی و متضاد  $T$  و  $T'$  قرار دارند را در نظر بگیرید. مقطع عمودی در نقطه دلخواه  $C$  را بررسی می‌نماییم.



با توجه به شکل زیر، از تعادل قسمت  $BC$  نتیجه می‌گیریم که سیستم نیروهای جزئی برشی در مقطع  $C$  معادل با گشتاور داخلی  $T$  می‌باشد.



مجموع لنگر نیروهای برشی  $dF$  نسبت به محور شفث مساوی گشتاور  $T$  می‌باشد. لذا:

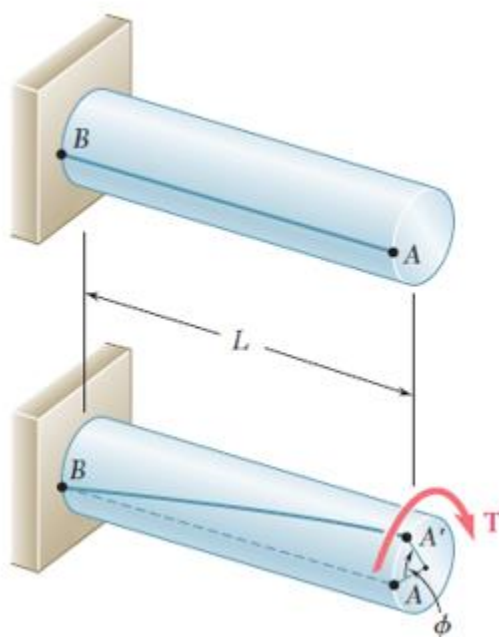
$$\int \rho dF = T$$

با توجه به رابطه بین نیروی جزئی برشی و تنش برشی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$dF = \tau dA$$

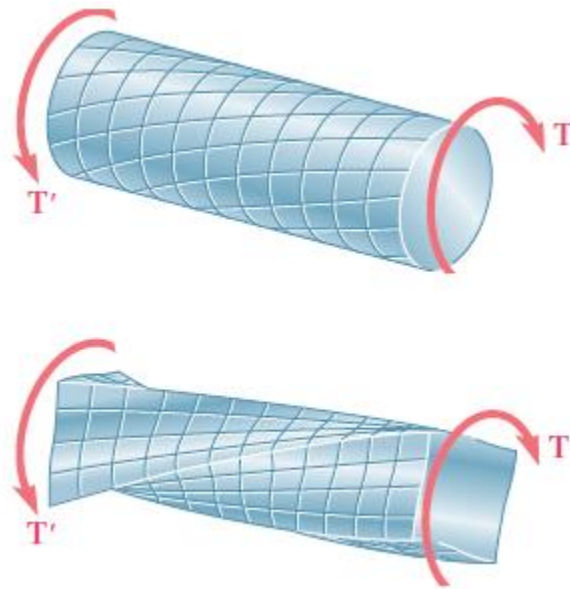
$$\int \rho(\tau dA) = T$$

رابطه بالا، رابطه بسیار مهم در بحث پیچش مقاطع دایره‌ای می‌باشد ولی اطلاعاتی در خصوص نحوه توزیع تنش برشی در مقطع عرضی نمی‌دهد. از بخش‌های قبلی به یاد داریم که توزیع واقعی تنش در مقطع عرضی یک مساله نامعین استاتیکی بوده و لذا با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی که در بالا به کار بردیم، قابل حل نمی‌باشد و لازم است از روابط مربوط به تغییرشکل‌ها در کنار معادلات تعادل استفاده نماییم.



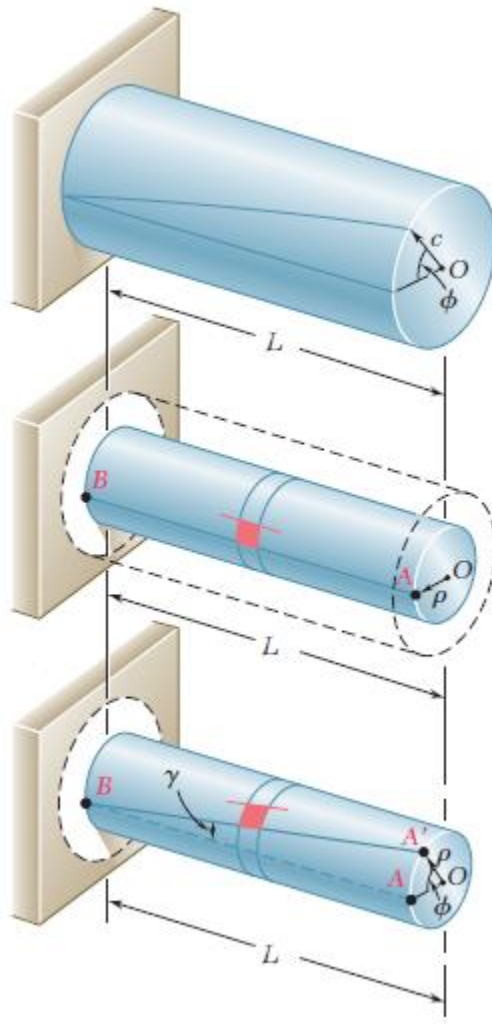
خاصیت مهم شفت‌های دایره‌ای که در بدست آوردن این رابطه استفاده خواهیم کرد، اینست که وقتی یک شفت دایره‌ای تحت پیچش قرار می‌گیرد، تمام مقاطع عرضی آن به صورت صفحه‌ای و بدون اعوجاج می‌مانند یعنی گرچه مقاطع عرضی مختلف در امتداد شفت تحت زوایای متفاوت می‌پیچند، ولی این پیچش صلب‌گونه است (شکل زیر). خاصیت مذکور، مشخصه شفت‌های دایره‌ای توپر و توخالی است. در عضوها با مقطع غیردایره‌ای چنین حالتی وجود ندارد و مقطع غیردایره‌ای تحت پیچش، دچار اعوجاج می‌شود.

در شفت دایره‌ای برای اینکه تمام مقاطع شفت به صورت صفحه‌ای و بی‌اعوجاج بمانند، باید کوپل‌ها طوری وارد شوند که دو انتهای شفت به صورت صفحه‌ای و بی‌اعوجاج بمانند. این کار با اعمال کوپل‌ها بر صفحات صلبی که به دو انتهای شفت متصل‌اند، انجام می‌شود. در این صورت، می‌توان مطمئن بود که هنگام بارگذاری تمام مقاطع به صورت صفحه‌ای و بی‌اعوجاج می‌مانند و تغییر شکل در تمام طول شفت به طور یکنواخت است. تمام دوایری که در فواصل مساوی از هم قرار دارند، نسبت به دایره مجاور خود تحت زاویه یکسان می‌چرخند و هر خط مستقیم تبدیل به یک منحنی می‌شود که دوایر مختلف را تحت



برای بدست آوردن کرنش برشی تحت پیچش به شکل زیر توجه کنید. شفت (میله) به طول  $L$  و به شعاع  $c$  تحت زاویه  $\phi$  پیچیده شده است. استوانه‌ای به شعاع  $\rho$  را از شفت جدا کرده و المانی به صورت زیر در نظر می‌گیریم. تحت اثر پیچش این المان به صورت لوزی تغییر شکل می‌دهد. براساس توضیحات بخش قبل و با توجه به هندسه شکل، کرنش برشی  $\gamma$  با زاویه بین خطوط  $AB$  و  $A'B$  برابر می‌باشد.





برای مقادیر کوچک  $\gamma$  از رابطه طول قطاع در ریاضی داریم:

$$AA' = L\gamma$$

همچنین داریم:

$$AA' = \rho\phi$$

از تساوی دو رابطه بالا داریم:

$$L\gamma = \rho\phi$$

در نتیجه، برای کرنش برشی داریم:

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

دقت کنید که  $\gamma$  و  $\phi$  بر حسب رادیان هستند. این رابطه نشان می‌دهد که کرنش برشی در یک نقطه معین از شفت با زاویه پیچش  $\phi$  و فاصله نقطه تا محور شفت  $\rho$  متناسب می‌باشد. به عبارتی، کرنش برشی در یک شفت (مقطع) دایره‌ای بر حسب فاصله از محور شفت به صورت خطی تغییر می‌کند. کرنش برشی حداکثر در  $\rho = c$  روی می‌دهد که برابر است با:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

رابطه کرنش برشی در هر نقطه مقطع با کرنش برشی حداکثر به صورت زیر می‌باشد:

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max}$$

حال که کرنش برشی تحت پیچش را بدست آوردیم، با فرض اینکه تنش برشی در مقطع دارای مقدار کمتر از استقامت تسلیم باشد، یعنی مقدار تنش برشی در مقطع کمتر از حد تناسب و نیز کمتر از حد الاستیک باشد. در این حالت طبق قانون هوک داریم:

$$\tau = G\gamma$$

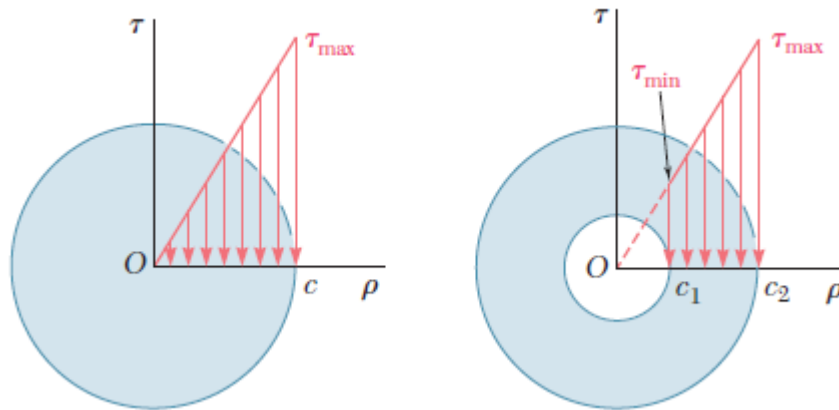
که در آن  $G$  مدول برشی ماده می‌باشد. با استفاده از رابطه بدست آمده برای کرنش برشی تحت پیچش داریم:

$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{\max}$$

یا :

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max}$$

طبق رابطه فوق تا زمانی که هیچ قسمتی از مقطع دایره ای از استقامت تسلیم و حد تناسب فراتر نرود، تنش برشی در مقطع دایره ای بر حسب فاصله  $\rho$  از محور شفت به صورت خطی تغییر می کند. در شکل های زیر این توزیع برای مقطع دایره توپر و توخالی نشان داده شده است.



در مقطع دایره توخالی نسبت تنش برشی حداقل و حداکثر بر حسب شعاع داخلی و خارجی به صورت زیر می باشد:

$$\tau_{\min} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{\max}$$

در اول بحث از معادلات تعادل استاتیکی به این نتیجه رسیدیم که مجموع لنگر نیروهای جزئی برشی وارده بر هر مقطع عرضی مقطع دایره ای با مقدار گشتاور وارد بر مقطع دایره ای برابر است. به عبارتی:

$$\int \rho(\tau dA) = T$$

با جایگذاری رابطه بدست آمده برای تنش برشی، داریم:

$$T = \int \rho \tau dA = \frac{\tau_{\max}}{c} \int \rho^2 dA$$

انتگرال در رابطه بالا بیانگر چیست؟

انتگرال رابطه بالا، ممان اینرسی قطبی مقطع عرضی را نسبت به مرکز  $O$  نشان می دهد. بنابراین:

$$T = \frac{\tau_{\max} J}{c}$$

یا:

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

و با جایگذاری روابط بدست آمده قبلی، در نهایت رابطه مهم پیچش الاستیک مقطع دایره‌ای به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

از استاتیک به یاد داریم که ممان اینرسی قطبی دایره به شعاع  $c$  به صورت زیر می‌باشد:

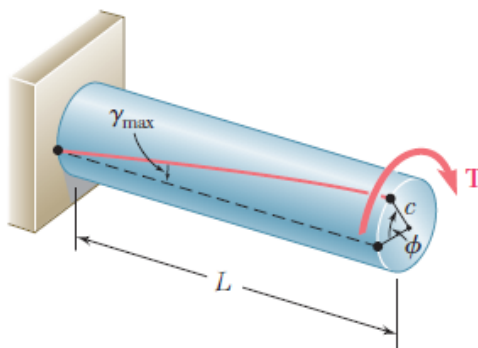
$$J = \frac{1}{2}\pi c^4$$

همچنین ممان اینرسی قطبی دایره تو خالی با شعاع داخلی  $c_1$  و شعاع خارجی  $c_2$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$J = \frac{1}{2}\pi c_2^4 - \frac{1}{2}\pi c_1^4 = \frac{1}{2}\pi (c_2^4 - c_1^4)$$

حال می‌خواهیم زاویه پیچش مقطع دایره‌ای تحت پیچش را بدست آوریم. با توجه به شکل زیر و آنچه در قبل بدست آوردیم،

گرنش برشی حداکثر به صورت زیر می‌باشد:



$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

با استفاده از قانون هوک و روابط قبلی داریم:

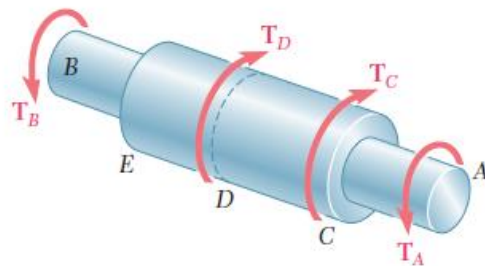
$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{Tc}{JG}$$

در نهایت با استفاده از تساوی دو رابطه بالا، زاویه پیچش به صورت زیر بدست می آید:

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

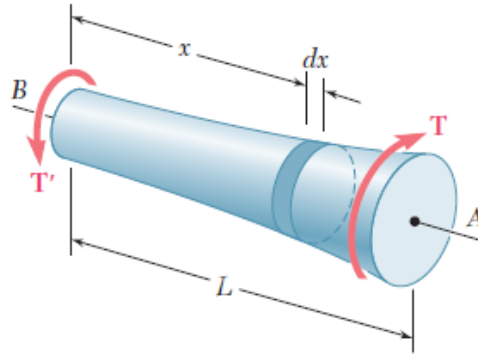
دوباره تاکید می شود که  $\phi$  بر حسب رادیان می باشد.

نکته دیگری که باید توجه کنید این است که رابطه فوق برای محاسبه زاویه پیچش برای میله همگن با  $G$  ثابت و دارای مقطع عرضی یکنواخت که فقط در انتها میله بارگذاری شده است، بدست آوردیم. حال اگر یکی از این فرضیات برقرار نباشد، مثلا اگر میله دایره ای در نقاطی غیر از دو انتها تحت گشتاور پیچشی قرار گیرد یا اگر از قسمت های مختلف با مقاطع عرضی گوناگون یا از مواد مختلف تشکیل شده باشد، آن را باید به قسمت هایی تقسیم کرد که هر کدام شرایط مورد نیاز را برای استفاده از رابطه بالا را داشته باشد. و در نهایت از جمع آثار استفاده می کنیم. (شبهه حالتی که برای نیروی محوری داشتیم) برای درک بهتر موضوع به شکل زیر دقت کنید.



$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{I_i G_i}$$

همچنین برای یک میله با مقطع عرضی متغیر دایره‌ای با استفاده از المان گیری و انتگرال، روابط زیر را خواهیم داشت:



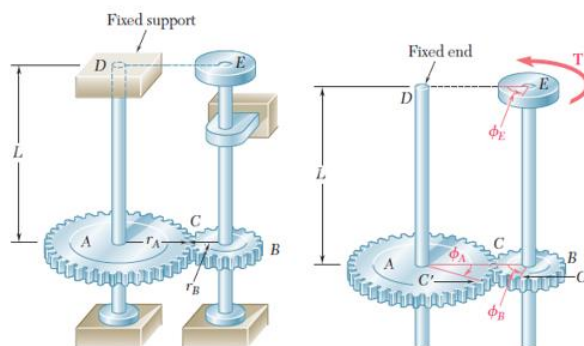
زاویه پیچش یک وجه المان (دیسک) نسبت به وجه دیگر به صورت زیر می‌باشد:

$$d\phi = \frac{T dx}{JG}$$

دقت کنید که  $J$  تابعی از  $x$  می‌باشد. با انتگرال گیری از رابطه فوق در طول تیر برای زاویه کل پیچش میله خواهیم داشت:

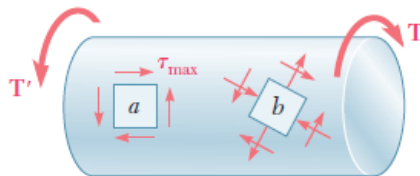
$$\phi = \int_0^L \frac{T dx}{JG}$$

نکته دیگری که لازم است به آن دقت کنیم این است که وقتی یک انتهای میله به تکیه‌گاه ثابتی متصل باشد، زاویه پیچش با زاویه دوران آزاد میله برابر است. در حالتی که هر دو انتهای میله بپیچند، زاویه پیچش میله برابر است با زاویه چرخش یک انتهای میله نسبت به انتهای دیگر آن. برای درک بهتر موضوع به شکل زیر دقت کنید.

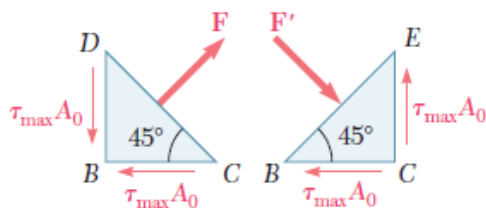


$$\phi_{E/B} = \phi_E - \phi_B = \frac{TL}{JG}$$

وجوه المانی که در اول بحث برای بررسی تنش برشی روی سطح میله انتخاب کردیم، به موازات و عمود بر محور میله بودند و لذا فقط تنش برشی  $\tau_{\max} = Tc/J$  بر این المان وارد می‌شود (المان  $a$  در شکل زیر). در حالی که در المان  $b$  در شکل زیر که وجوه آن با محور میله زاویای اختیاری می‌سازند، دارای تنش‌های نرمال و برشی هستند. در ادامه با استفاده از آنچه در فصول اول یاد گرفتیم تعادل المان را در زاویه 45 درجه بررسی کرده و تنش‌های نرمال و برشی را بدست می‌آوریم.



المانی با زاویه 45 درجه نسبت به محور میله به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



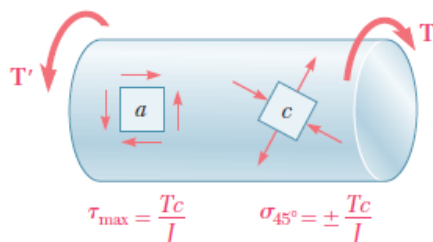
با بررسی تعادل نیروها خواهیم داشت:

$$F = 2(\tau_{\max} A_0) \cos 45^\circ = \tau_{\max} A_0 \sqrt{2}$$

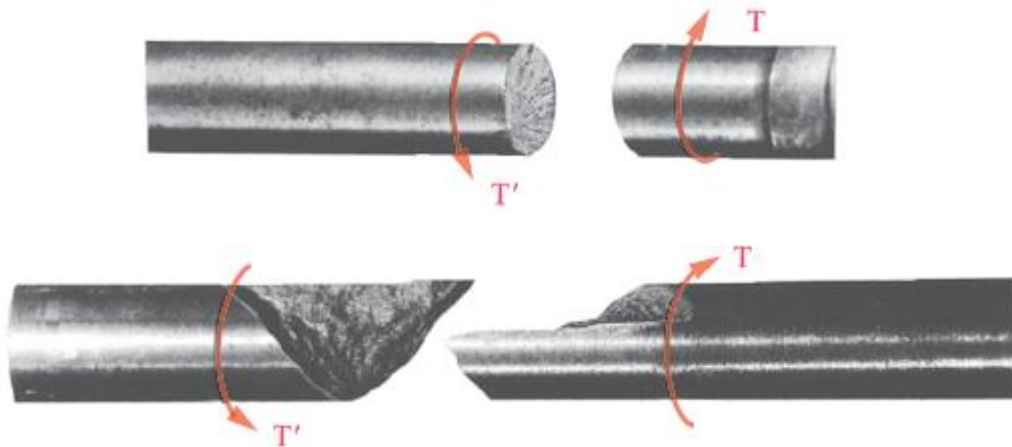
حال با تقسیم نیرو بر مساحت در وجه  $DC$ ، تنش وارد بر این وجه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{\max}$$

از آنچه بدست آمد نتیجه می‌گیریم که وجوه المان  $c$  در شکل زیر که تحت زاویه 45 درجه با محور میله است، تحت تنش‌های قائم و برابر با  $\pm \tau_{\max}$  قرار دارند.



با توجه به آنچه در فصل اول یاد گرفتیم مواد چکش خوار (شکل پذیر) معمولاً در برش گسیخته می‌شوند. بنابراین وقتی میله‌ای از ماده شکل‌پذیر تحت پیچش قرار می‌گیرد، در امتداد یک صفحه عمود بر محور طولی‌اش گسیخته می‌شود. در حالی که مواد ترد (شکننده) در کشش، در مقایسه با برش، ضعیف‌ترند. لذا وقتی میله از ماده ترد تحت پیچش قرار می‌گیرد، تمایل دارد در امتداد سطوح عمود بر امتداد متناظر با کشش ماکزیمم (یعنی در امتداد سطوحی که با محور طولی میله زاویه 45 درجه دارند) بشکند. برای درک بهتر موضوع به شکل‌های زیر دقت کنید.



### ۳-۶ طراحی شفت انتقال قدرت



مشخصات اصلی در طراحی یک شفت انتقال قدرت عبارت است از قدرتی که شفت باید انتقال دهد و سرعت چرخش شفت. طراح ماده شفت و ابعاد مقطع عرضی را به گونه‌ای تعیین می‌کند که ماکزیمم تنش برشی در ماده هنگام انتقال قدرت در یک سرعت مشخص شده از مقدار مجاز خود بیشتر نشود.

از دینامیک می‌دانیم که قدرت  $P$  برای جسم صلب چرخانی که تحت گشتاور  $T$  قرار دارد، به صورت زیر می‌باشد:

$$P = T\omega$$

که در آن  $\omega$  سرعت زاویه‌ای جسم بر حسب رادیان بر ثانیه است. از طرفی می‌دانیم:

$$\omega = 2\pi f$$



که در آن  $f$  فرکانس دوران است. منظور از فرکانس، تعداد دوران‌ها در یک ثانیه است. واحد فرکانس  $1s^{-1}$  است که هرتز (HZ) می‌گویند. با جایگذاری رابطه سرعت زاویه‌ای داریم:

$$P = 2\pi fT$$

در واحدهای SI،  $f$  برحسب هرتز (HZ)،  $T$  برحسب  $N.m$  و قدرت برحسب  $N.m/s$  است که آن را وات ( $W$ ) می‌گویند. گشتاور وارد بر شفتی که قدرت  $P$  را در فرکانس  $f$  انتقال می‌دهد به صورت زیر بدست می‌آید:

$$T = \frac{P}{2\pi f}$$

پس از تعیین گشتاور وارد بر شفت و انتخاب ماده، طراح مقادیر  $T$  و ماکزیمم تنش مجاز را در فرمول پیچش الاستیک قرار می‌دهیم و مینیمم مقدار مجاز  $\frac{J}{c}$  را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\max}}$$

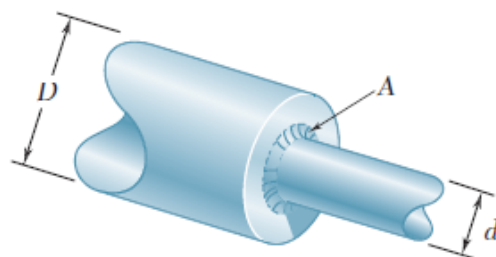
تبدیل واحدهای زیر در حل برخی مسائل کمک کننده خواهد بود:

$$1 \text{ rpm} = \frac{1}{60} s^{-1} = \frac{1}{60} \text{ Hz}$$

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 6600 \text{ in} \cdot \text{lb/s}$$

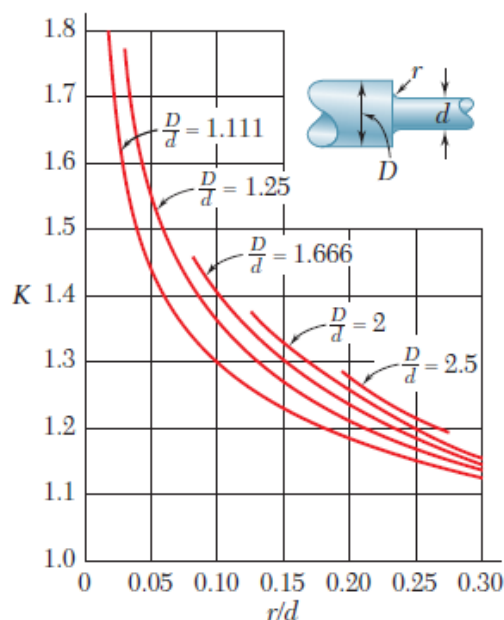


در مقطع عرضی شفتی که قطر آن ناگهان تغییر می‌کند، تمرکز تنش بوجود می‌آید. این تنش‌های بزرگ را با استفاده از ماهیچه می‌توان کاهش داد. ماکزیمم مقدار تنش برشی در ماهیچه از رابطه زیر بدست می‌آید:



$$\tau_{\max} = K \frac{Tc}{J}$$

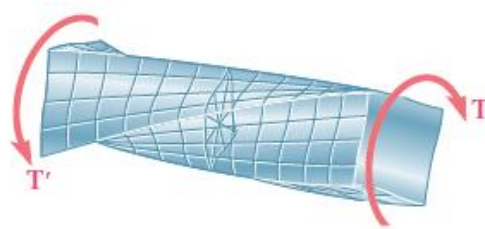
دقت کنید  $Tc/J$  برای شفت با قطر کمتر محاسبه شده و مقدار  $K$  ضریب تمرکز تنش از نمودار زیر تعیین می‌گردد. ضریب  $K$  فقط به نسبت دو قطر و نسبت شعاع ماهیچه (گرده) به قطر شفت کوچکتر بستگی دارد. نکته مهم دیگر اینکه این رابطه و نمودار برای محدوده خطی و تغییر شکل الاستیک برقرار است.





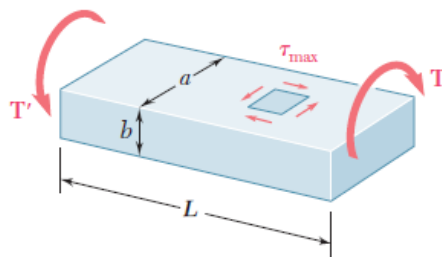
روابط بدست آمده در بخش قبلی فقط برای مقطع دایره‌ای که دارای تقارن محوری بودند، کاربرد دارد و برای مقاطع غیر دایره‌ای که تحت پیچش دچار اعوجاج می‌شود، نمی‌توان به کار برد.

به عنوان مثال میله با مقطع توپر مستطیلی تحت پیچش در شکل زیر نشان داده شده است.



توزیع تنش برشی ناشی از پیچش در مقطع توپر مستطیلی بسیار پیچیده است. ولی می‌دانیم که تنش ماکزیمم در وسط ضلع بزرگتر مقطع رخ می‌دهد و تنش در گوشه‌ها صفر می‌باشد.

اگر طول میله را با  $L$  و ضلع بزرگتر مقطع عرضی را با  $a$  و ضلع کوچکتر را با  $b$  و مقدار گشتاور وارد بر میله را با  $T$  نشان دهیم (شکل زیر)، ماکزیمم تنش برشی در امتداد خط مرکزی وجه بزرگتر میله روی می‌دهد که مقدار آن برابر است با:



$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 a b^2}$$

زاویه پیچش را نیز می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\phi = \frac{TL}{c_2 a b^3 G}$$

ضرایب  $c_1$  و  $c_2$  فقط به نسبت  $a/b$  بستگی دارند و از جدول زیر بدست می‌آیند.

## ضرایب برای مقطع مستطیلی در پیچش

$a/b$	$c_1$	$c_2$
1.0	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2.0	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3.0	0.267	0.263
4.0	0.282	0.281
5.0	0.291	0.291
10.0	0.312	0.312
$\infty$	0.333	0.333

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{3}(1 - 0.630b/a) \quad a/b \geq 5 \text{ فقط برای}$$

۶-۶

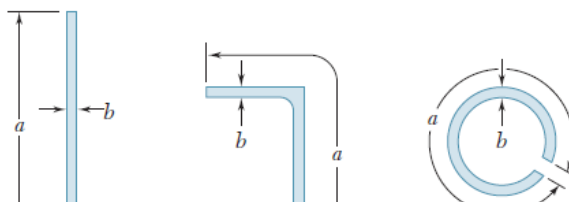
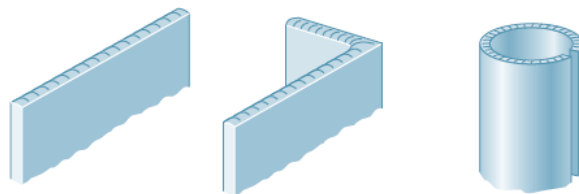
## پیچش در مقاطع جدار نازک باز



برای یک عضو جدار نازک باز با ضخامت یکنواخت و با شکل دلخواه می توان از رابطه پیچش در مقاطع مستطیلی استفاده کرد.

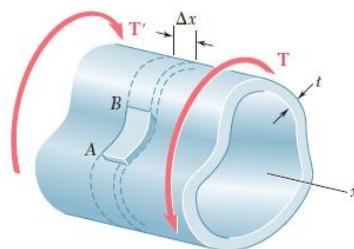
در این حالت با  $a/b$  بسیار بزرگی سروکار داریم لذا

$$c_1 = c_2 \cong 0.333$$

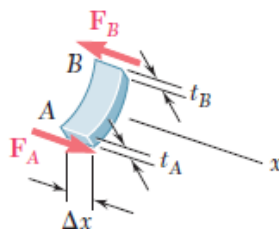




در مقاطع جدارنازک بسته می‌توان با یک محاسبه ساده، توزیع تنش ناشی از پیچش را با تقریب خوبی تعیین کرد. برای این منظور یک استوانه توخالی با مقطع غیردایره‌ای را که تحت بارگذاری پیچشی است، مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. گرچه ضخامت  $t$  دیواره ممکن است در مقطع عرضی تغییر کند، ولی از این ضخامت می‌توان در مقایسه با سایر ابعاد صرف‌نظر کرد.



المان  $AB$  از میله را به صورت زیر در نظر گرفته و تعادل آن را بررسی می‌کنیم:



$$\Sigma F_x = 0: \quad F_A - F_B = 0$$

از طرفی می‌دانیم:

$$F_A = \tau_A (t_A \Delta x)$$

$$\tau_A (t_A \Delta x) - \tau_B (t_B \Delta x) = 0$$

در نتیجه:

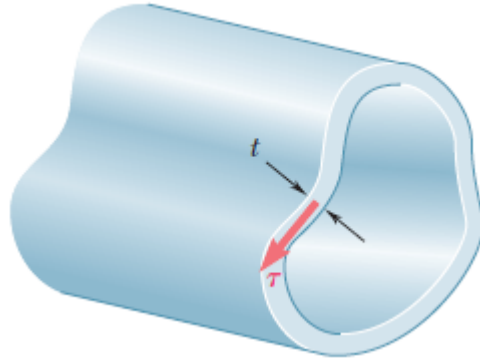
$$\tau_A t_A = \tau_B t_B$$

یا:

با توجه به اینکه نقاط  $A$  و  $B$  به طور اختیاری انتخاب شده‌اند، می‌توان نتیجه گرفت که کمیت  $\tau t$  در سرتاسر عضو ثابت است. لذا:

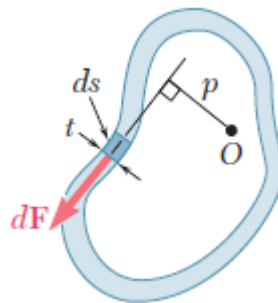
$$q = \tau t = \text{ثابت}$$

لازم به ذکر است که طبق شکل زیر، تنش برشی در هر نقطه از مقطع عرضی عضو توخالی جدارنازک به موازات سطح دیواره است و مقدار متوسط آن که در عرض دیواره محاسبه می‌شود در رابطه زیر صدق می‌کند.



$$q = \tau t = \text{ثابت}$$

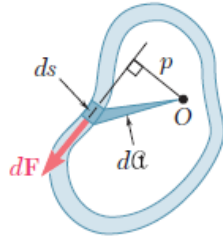
به کمیت  $q = \tau t$  جریان برش در دیواره میله جدارنازک می‌گوییم. برای بدست آوردن رابطه بین گشتاور  $T$  وارد بر عضو و جریان برش  $q$  در دیواره، المانی به صورت شکل زیر در نظر می‌گیریم:



مقدار نیروی برشی وارد بر المان به صورت زیر می‌باشد:

$$dF = \tau dA = \tau(t ds) = (\tau t) ds = q ds$$

گشتاور این نیرو نسبت به نقطه اختیاری  $O$  به صورت زیر می‌باشد:



$$dM_O = p dF = p(q ds) = q(p ds)$$

کمیت  $\rho ds$  با دوبرابر مساحت مثلث سایه‌خورده در شکل برابر است. لذا:

$$dM_O = q(2d\alpha)$$

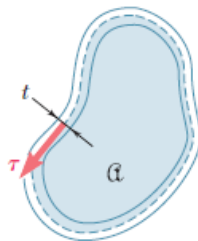
انتگرال کمیت  $dM_O$  پیرامون مقطع جداری برابر است با مجموع لنگر نیروهای برشی جزئی وارد بر مقطع جداری و این مجموع نیز با گشتاور  $T$  وارد بر عضو توخالی برابر است. لذا:

$$T = \oint dM_O = \oint q(2d\alpha)$$

و چون جریان برشی  $q$  ثابت است داریم:

$$T = 2q\alpha$$

که در آن مساحتی است که توسط خط مرکزی مقطع عرضی دیواره محدود شده است.



در نهایت تنش برشی در هر نقطه از دیواره به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\tau = \frac{T}{2t\alpha}$$

که در آن  $t$  ضخامت دیواره در نقطه مورد بررسی می‌باشد. باید توجه کرد که مقدار تنش برشی از رابطه بالا، مقدار متوسط تنش برشی در عرض دیواره است ولی توزیع تنش در عرض دیواره را برای تغییرشکل‌های الاستیک می‌توان یکنواخت فرض کرد و تنش برشی بدست آمده را مقدار واقعی تنش در نقطه داده شده دانست.

زاویه پیچش یک میله جدارنازک بسته را با استفاده از روش‌های انرژی با فرض تغییر شکل الاستیک، از رابطه زیر بدست آورد.

$$\phi = \frac{TL}{4\alpha^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

که در آن، انتگرال در امتداد خط مرکزی مقطع جدار می‌محاسبه می‌شود.



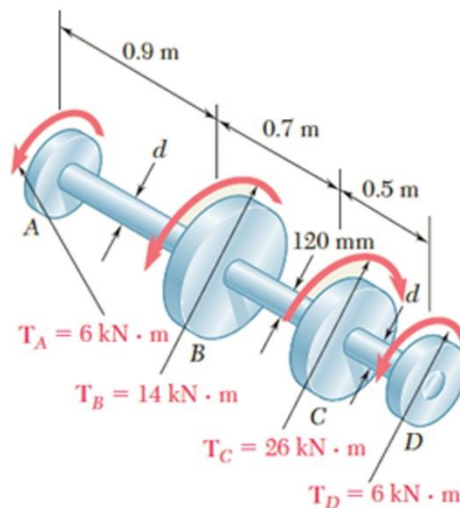
## مثال های حل شده سری ۶

۱

هدف: در این مثال با محاسبه تنش برشی ناشی از پیچش در مقاطع دایره‌ای توپر و توخالی و طراحی آنها آشنا خواهیم شد.

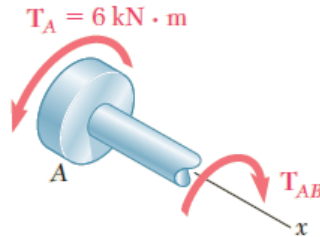
شفت  $BC$  توخالی و با قطرهای داخلی و خارجی ۹۰ میلی‌متر و ۱۲۰ میلی‌متر است. شفت‌های  $AB$  و  $CD$  توپر و به قطر  $d$  هستند. برای بارگذاری نشان داده شده، مطلوب است: (الف) ماکزیمم و مینیمم تنش برشی در شفت  $BC$  (ب) قطر  $d$  در صورتی که تنش مجاز برشی در این شفت‌ها ۶۵ مگاپاسکال باشد.

Shaft  $BC$  is hollow with inner and outer diameters of 90 mm and 120 mm, respectively. Shafts  $AB$  and  $CD$  are solid and of diameter  $d$ . For the loading shown, determine (a) the maximum and minimum shearing stress in shaft  $BC$ , (b) the required diameter  $d$  of shafts  $AB$  and  $CD$  if the allowable shearing stress in these shafts is 65 MPa.



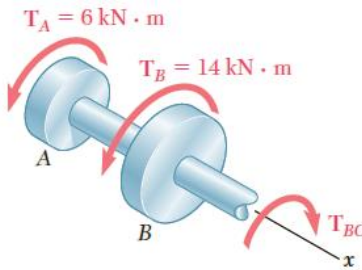
ابتدا با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی، گشتاور پیچشی در بخش های مختلف سازه (شفت ها) را بدست می آوریم.

مقطع دلخواهی در شفت  $AB$  زده و با ترسیم نمودار جسم آزاد، معادله تعادل گشتاور به صورت زیر نوشته می شود:



$$\sum M_x = 0: \quad (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{AB} = 0 \quad T_{AB} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

مقطع دلخواهی در شفت  $BC$  زده و با ترسیم نمودار جسم آزاد، معادله تعادل گشتاور به صورت زیر نوشته می شود:



$$\sum M_x = 0: \quad (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) + (14 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{BC} = 0 \quad T_{BC} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

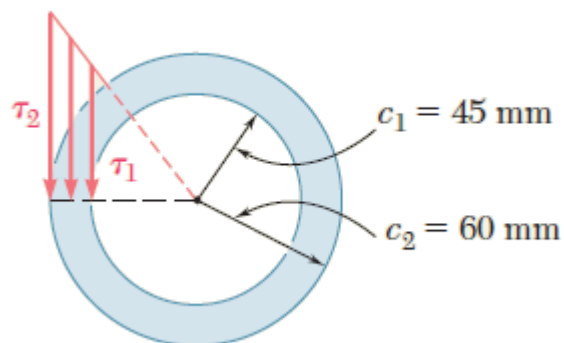
برای شفت توخالی  $BC$  تنش برشی حداکثر و حداقل به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0.060)^4 - (0.045)^4] = 13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

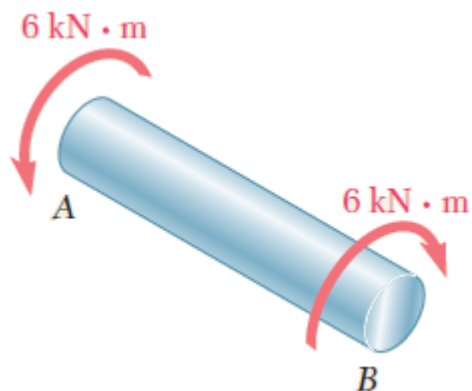
$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{(20 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.060 \text{ m})}{13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \quad \tau_{\max} = 86.2 \text{ MPa}$$

$$\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{c_1}{c_2} \quad \frac{\tau_{\min}}{86.2 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \quad \tau_{\min} = 64.7 \text{ MPa}$$

که توزیع تنش برشی در شکل زیر نشان داده شده است.



برای شفت‌های  $AB$  و  $CD$  با در نظر گرفتن تنش برشی مجاز، ابعاد شفت به صورت زیر طراحی می‌گردد:



$$\tau = \frac{Tc}{J} \quad 65 \text{ MPa} = \frac{(6 \text{ kN} \cdot \text{m})c}{\frac{\pi}{2}c^4}$$

$$c^3 = 58.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \quad c = 38.9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 2c = 2(38.9 \text{ mm}) \quad d = 77.8 \text{ mm}$$

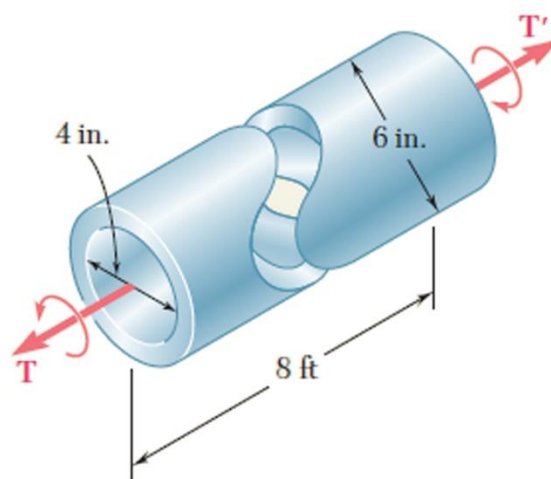
## مثال های حل شده سری ۶

۲

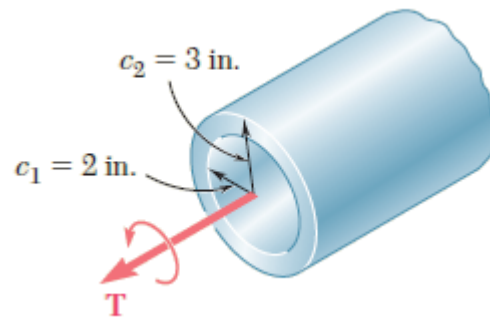
هدف: در این مثال با محاسبه حداکثر گشتاور وارد بر مقاطع دایره‌ای توپر و توخالی و مقایسه مقاومت پیچشی آنها آشنا خواهیم شد.

طراحی اولیه شفت بزرگی که موتوری را به مولدی متصل می‌کند با قطرهای داخلی 4 اینچ و خارجی 6 اینچ است. اگر تنش مجاز برشی  $12 \text{ ksi}$  باشد، مطلوبست ماکزیمم گشتاوری که: (الف) توسط همین شفت می‌توان انتقال داد، (ب) توسط شفت توپری با همان وزن می‌توان انتقال داد، (ج) توسط شفت توخالی با همان وزن و با قطر خارجی 8 اینچ می‌توان انتقال داد.

The preliminary design of a large shaft connecting a motor to a generator calls for the use of a hollow shaft with inner and outer diameters of 4 in. and 6 in., respectively. Knowing that the allowable shearing stress is  $12 \text{ ksi}$ , determine the maximum torque that can be transmitted (a) by the shaft as designed, (b) by a solid shaft of the same weight, (c) by a hollow shaft of the same weight and of 8-in. outer diameter.



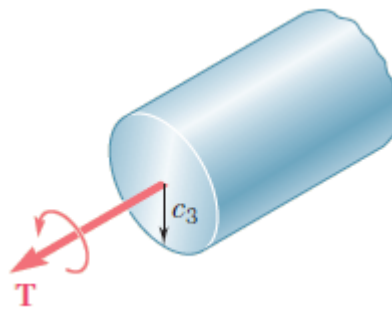
الف) برای شفت طراحی شده اولیه به صورت زیر داریم:



$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(3 \text{ in.})^4 - (2 \text{ in.})^4] = 102.1 \text{ in}^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tc_2}{J} \quad 12 \text{ ksi} = \frac{T(3 \text{ in.})}{102.1 \text{ in}^4} \quad T = 408 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$

ب) برای شفت توپر با همان وزن، با توجه به برابری وزن مخصوص و طول در دو حالت، خواهیم داشت:

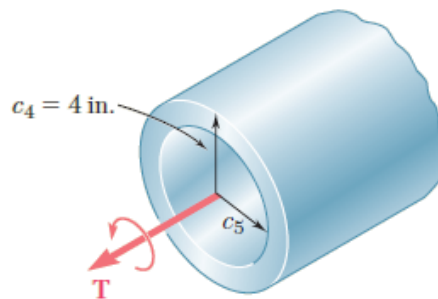


$$A_{(a)} = A_{(b)} \quad \pi[(3 \text{ in.})^2 - (2 \text{ in.})^2] = \pi c_3^2 \quad c_3 = 2.24 \text{ in.}$$

در نتیجه:

$$\tau_{\max} = \frac{Tc_3}{J} \quad 12 \text{ ksi} = \frac{T(2.24 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(2.24 \text{ in.})^4} \quad T = 211 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$

ج) در این حالت، با توجه به برابری وزن مخصوص و طول با حالت های قبلی، نتیجه می شود که مساحت مقطع عرضی تغییر نمی کند و داریم:



$$A_{(a)} = A_{(c)} \quad \pi[(3 \text{ in.})^2 - (2 \text{ in.})^2] = \pi[(4 \text{ in.})^2 - c_5^2] \quad c_5 = 3.317 \text{ in.}$$

$$J = \frac{\pi}{2}[(4 \text{ in.})^4 - (3.317 \text{ in.})^4] = 212 \text{ in}^4$$

در نتیجه:

$$\tau_{\max} = \frac{Tc_4}{J} \quad 12 \text{ ksi} = \frac{T(4 \text{ in.})}{212 \text{ in}^4} \quad T = 636 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$

از مقایسه حالت های مختلف چه نتیجه ای می گیرید؟

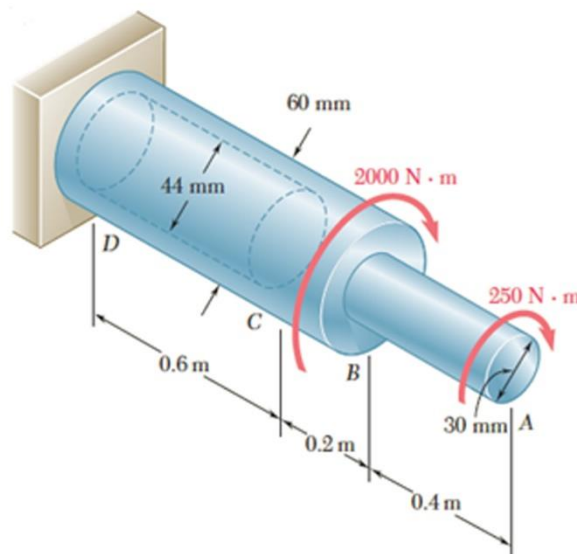
## مثال های حل شده سری ۶

۳

هدف: در این مثال با محاسبه زاویه پیچش در میله دایره‌ای با شرایط متغییر در بارگذاری و مقطع عرضی ناشی از پیچش آشنا خواهیم شد.

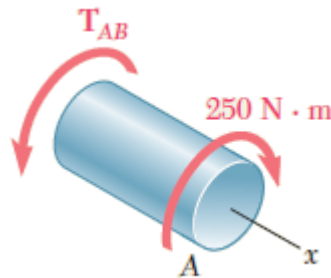
انتهای  $D$  از شفت (میله) افقی  $AD$  به تکیه‌گاه ثابتی متصل است. این میله تحت گشتاورهای نشان داده شده قرار دارد. سوراخی به قطر 44 میلیمتر در قسمت  $CD$  ایجاد شده است. میله از فولاد با مدول برشی 77 گیگاپاسکال ساخته شده است. زاویه پیچش انتهای  $A$  را بیابید.

The horizontal shaft  $AD$  is attached to a fixed base at  $D$  and is subjected to the torques shown. A 44-mm-diameter hole has been drilled into portion  $CD$  of the shaft. Knowing that the entire shaft is made of steel for which  $G = 77\text{GPa}$ , determine the angle of twist at end  $A$ .

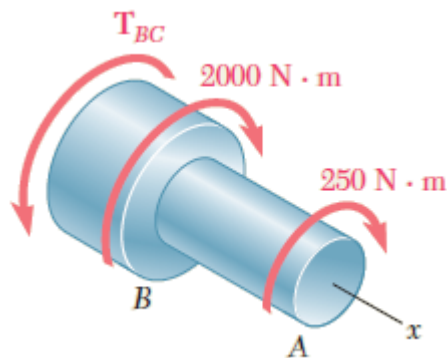


با توجه به اینکه در طول میله مورد نظر مقطع تغییر کرده و همچنین به غیر از انتهای میله، گشتاور وارد می شود، لازم است میله به بخش‌های مختلف تقسیم شده و از جمع زاویه دوران قسمت‌های مختلف (با رعایت علامت) زاویه دوران انتهای میله بدست آید.

با استفاده از اصول استاتیک و به روش مقطع زدن و بررسی تعادل گشتاوری، گشتاور بخش‌های مختلف میله به صورت زیر بدست می‌آید:



$$\sum M_x = 0: \quad (250 \text{ N} \cdot \text{m}) - T_{AB} = 0 \quad T_{AB} = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

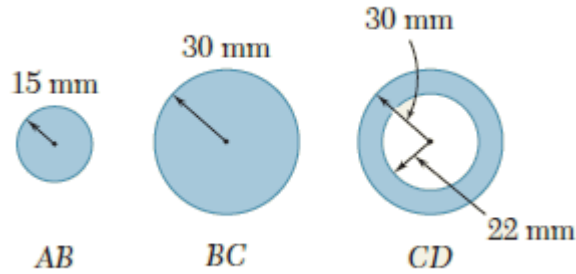


$$\sum M_x = 0: (250 \text{ N} \cdot \text{m}) + (2000 \text{ N} \cdot \text{m}) - T_{BC} = 0 \quad T_{BC} = 2250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_{CD} = T_{BC} = 2250 \text{ N} \cdot \text{m}$$



ممان اینرسی بخش های مختلف میله با توجه به سطح مقطع آن به صورت شکل زیر، محاسبه می گردد:

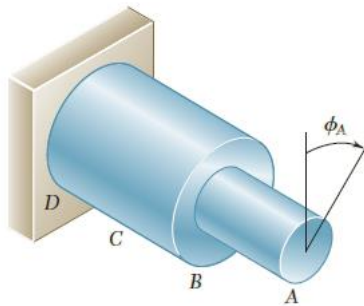


$$J_{AB} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.015 \text{ m})^4 = 0.0795 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{BC} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0.030 \text{ m})^4 = 1.272 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{CD} = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(0.030 \text{ m})^4 - (0.022 \text{ m})^4] = 0.904 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

در نهایت زاویه پیچش در انتهای میله به صورت زیر محاسبه می گردد:



$$\phi_A = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G} = \frac{1}{G} \left( \frac{T_{AB} L_{AB}}{J_{AB}} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{J_{BC}} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{J_{CD}} \right)$$

$$\phi_A = \frac{1}{77 \text{ GPa}} \left[ \frac{(250 \text{ N} \cdot \text{m})(0.4 \text{ m})}{0.0795 \times 10^{-6} \text{ m}^4} + \frac{(2250)(0.2)}{1.272 \times 10^{-6}} + \frac{(2250)(0.6)}{0.904 \times 10^{-6}} \right]$$

$$= 0.01634 + 0.00459 + 0.01939 = 0.0403 \text{ rad}$$

$$\phi_A = (0.0403 \text{ rad}) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \qquad \phi_A = 2.31^\circ$$

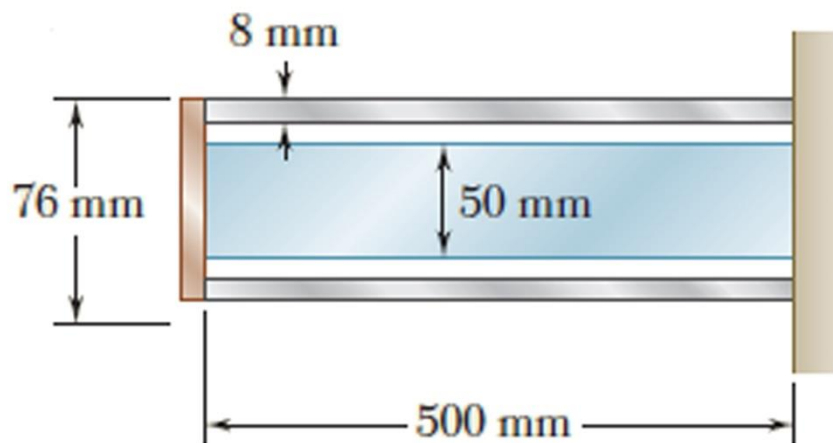
## مثال های حل شده سری ۶

۴

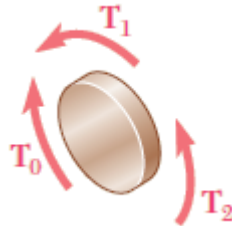
هدف: در این مثال با تحلیل سازه نامعین با مقطع دایره‌ای تحت پیچش آشنا خواهیم شد.

یک میله فولادی و یک لوله آلومینیومی به یک تکیه‌گاه ثابت و یک دیسک صلب با مقطع عرضی نشان داده شده، متصل شده‌اند. اگر تنش‌های اولیه صفر باشند، ماکزیمم گشتاور  $T_0$  را که می‌توان بر دیسک وارد کرد بیابید. تنش مجاز در میله فولادی 120 مگاپاسکال و در لوله آلومینیومی 70 مگاپاسکال است. مدول برشی فولاد را 77 و آلومینیوم را 27 گیگاپاسکال فرض کنید.

A steel shaft and an aluminum tube are connected to a fixed support and to a rigid disk as shown in the cross section. Knowing that the initial stresses are zero, determine the maximum torque  $T_0$  that can be applied to the disk if the allowable stresses are 120 MPa in the steel shaft and 70 MPa in the aluminum tube. Use  $G = 77 \text{ GPa}$  for steel and  $G = 27 \text{ GPa}$  for aluminum.



با یک مساله نامعین استاتیکی سروکار داریم و نمی توان تنها با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی، سازه را تحلیل کرد. نمودار جسم آزاد دیسک صلب به صورت زیر می باشد. گشتاور وارده از لوله بر دیسک را با  $T_1$  و گشتاور وارده از میله را با  $T_2$  نشان می دهیم و از تعادل داریم:



$$T_0 = T_1 + T_2$$

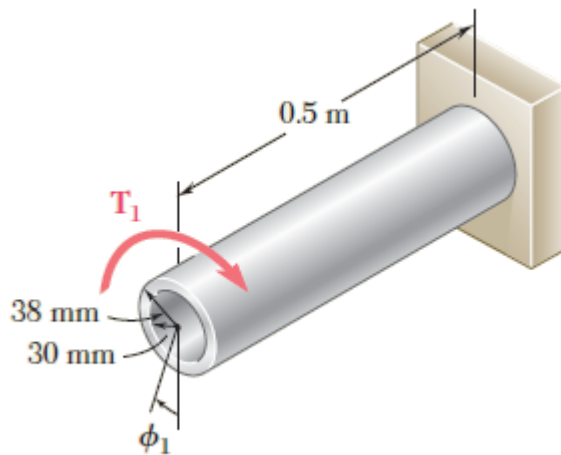
با توجه به اینکه لوله و شفت به دیسک صلب متصل شده اند، زاویه پیچش آنها با هم برابر می باشد و رابطه زیر را برای تغییرشکل ها داریم:

$$\phi_1 = \phi_2: \quad \frac{T_1 L_1}{J_1 G_1} = \frac{T_2 L_2}{J_2 G_2}$$

$$\frac{T_1 (0.5 \text{ m})}{(2.003 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(27 \text{ GPa})} = \frac{T_2 (0.5 \text{ m})}{(0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(77 \text{ GPa})}$$

$$T_2 = 0.874 T_1$$

برای لوله آلومینیومی با در نظر گرفتن تنش مجاز داریم:



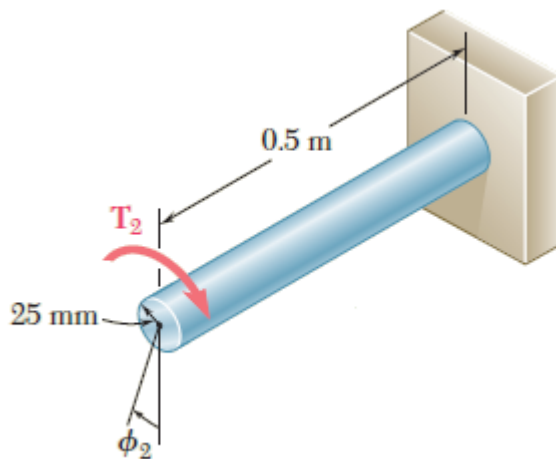
$$G_1 = 27 \text{ GPa}$$

$$J_1 = \frac{\pi}{2} [(38 \text{ mm})^4 - (30 \text{ mm})^4]$$

$$= 2.003 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$T_1 = \frac{\tau_{\text{alum}} J_1}{c_1} = \frac{(70 \text{ MPa})(2.003 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.038 \text{ m}} = 3690 \text{ N} \cdot \text{m}$$

حال از رابطه قبلی بدست آمده، مقدار گشتاور وارد بر میله فولادی را بدست می آوریم و براساس آن، تنش برشی حداکثر در میله فولادی را محاسبه و با تنش مجاز فولاد مقایسه می نماییم.





$$G_1 = 77 \text{ GPa}$$
$$J_1 = \frac{\pi}{2} [(25 \text{ mm})^4]$$
$$= 0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$T_2 = 0.874T_1 = 0.874(3690) = 3225 \text{ N} \cdot \text{m}$$
$$\tau_{\text{steel}} = \frac{T_2 c_2}{J_2} = \frac{(3225 \text{ N} \cdot \text{m})(0.025 \text{ m})}{0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 131.3 \text{ MPa}$$

با توجه به مقدار بدست آمده برای تنش که بالاتر از تنش مجاز می باشد، نشان می دهد که فرض انجام شده نادرست می باشد و باید اصلاح گردد. لذا داریم:

$$T_2 = \frac{\tau_{\text{steel}} J_2}{c_2} = \frac{(120 \text{ MPa})(0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.025 \text{ m}} = 2950 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$2950 \text{ N} \cdot \text{m} = 0.874T_1 \quad T_1 = 3375 \text{ N} \cdot \text{m}$$

در نهایت حداکثر گشتاور مجاز وارد بر سازه به صورت زیر می باشد:

$$T_0 = T_1 + T_2 = 3375 \text{ N} \cdot \text{m} + 2950 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_0 = 6.325 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

## مثال های حل شده سری ۶

۵

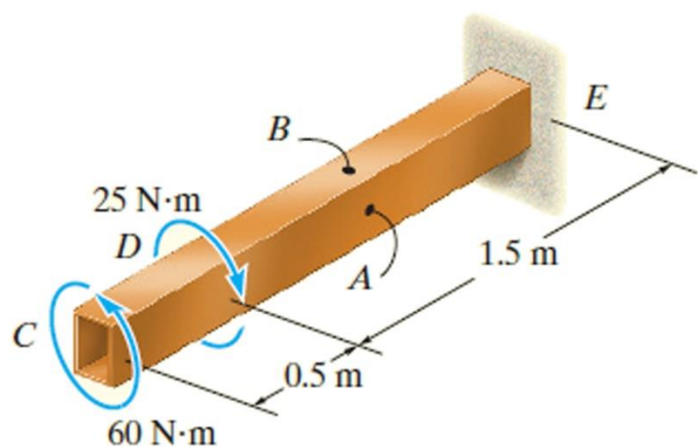
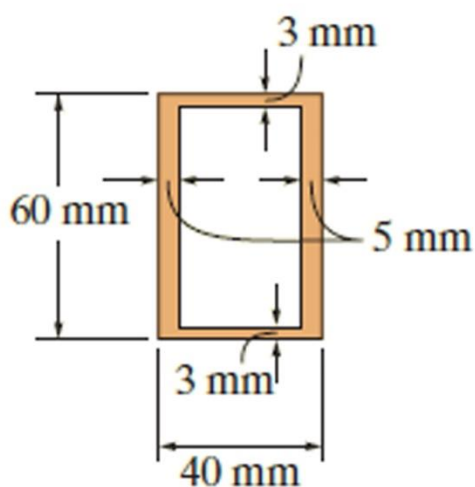
هدف: در این مثال با تحلیل سازه با مقطع جدارنازک بسته تحت پیچش آشنا خواهیم شد.

تیری با مقطع جدارنازک به شکل مستطیل تحت اثر دو گشتاور پیچشی به صورت شکل مقابل قرار دارد. متوسط تنش برشی در نقاط  $A$  و  $B$  و زاویه پیچش در انتهای  $C$  را تعیین نمایید.

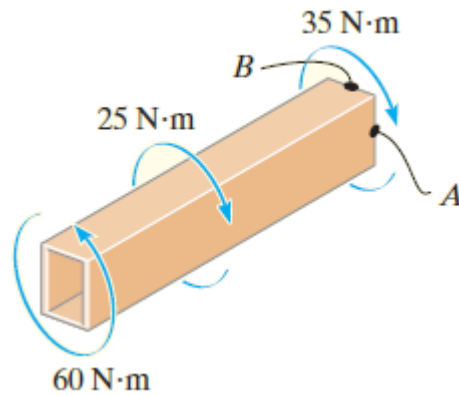
$$G = 38 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

The tube is made of C86100 bronze and has a rectangular cross section as shown in figure. If it is subjected to the two torques, determine the average shear stress in the tube at points A and B. Also, what is the angle of twist of end C? the tube is fixed at E.

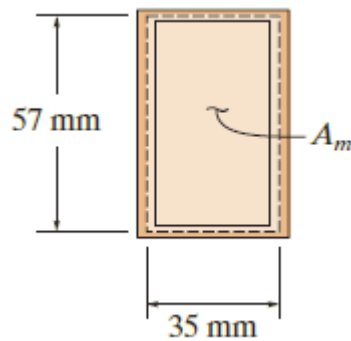
$$G = 38 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$



تیر را در محل نقاط  $A$  و  $B$  مقطع زاده و نمودار جسم آزاد به صورت زیر ترسیم می‌کردد:



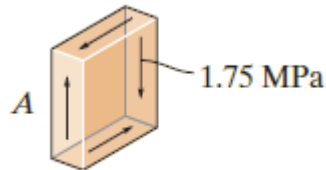
با استفاده از معادلات تعادل، لنگر پیچشی در مقطع مورد نظر برابر 35 نیوتن.متر بدست می‌آید. مساحت میانه مقطع جدارنازک مطابق شکل زیر می‌باشد:



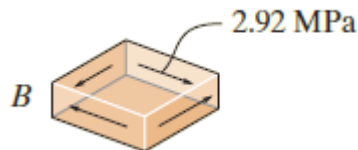
$$A_m = (0.035 \text{ m}) (0.057 \text{ m}) = 0.00200 \text{ m}^2$$

تنش در نقاط  $A$  و  $B$  با در نظر گرفتن ضخامت مقطع در هر نقطه، به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

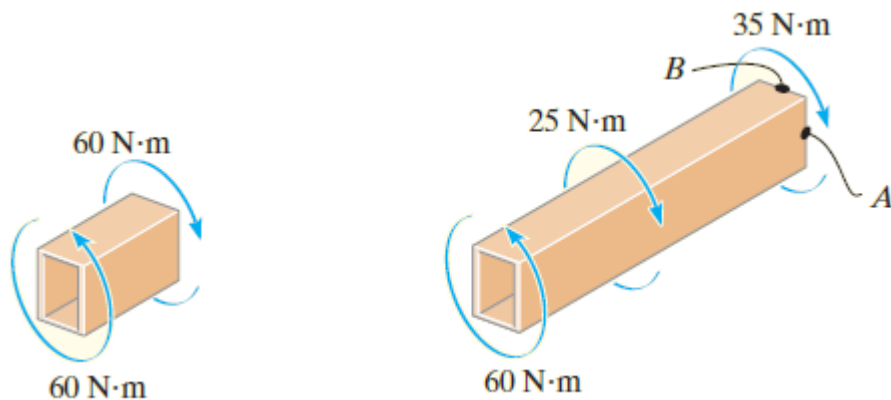
$$\tau_A = \frac{T}{2tA_m} = \frac{35 \text{ N}\cdot\text{m}}{2(0.005 \text{ m})(0.00200 \text{ m}^2)} = 1.75 \text{ MPa}$$



$$\tau_B = \frac{T}{2tA_m} = \frac{35 \text{ N}\cdot\text{m}}{2(0.003 \text{ m})(0.00200 \text{ m}^2)} = 2.92 \text{ MPa}$$



تیر را در امتداد طولی به دو بخش تقسیم کرده و مقدار لنگر پیچشی در هر بخش با توجه به نمودار جسم آزاد، به صورت زیر تعیین می‌گردد:





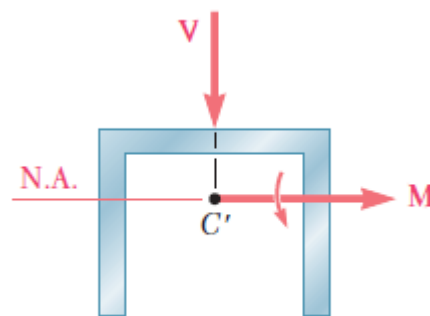
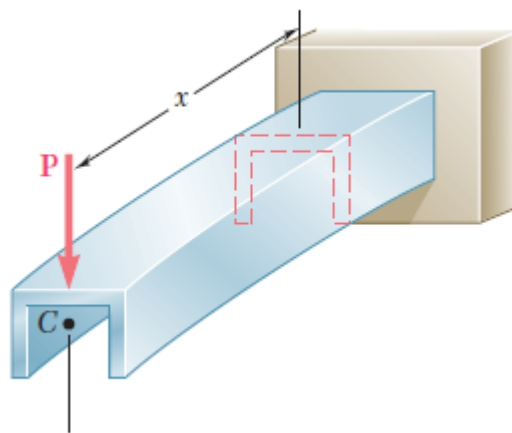
حال زاویه پیچش در انتهای  $C$  را به صورت زیر محاسبه می‌نماییم:

$$\begin{aligned}\phi &= \sum \frac{TL}{4A_m^2 G} \int \frac{ds}{t} \\ &= \frac{60 \text{ N} \cdot \text{m} (0.5 \text{ m})}{4(0.00200 \text{ m}^2)^2 (38(10^9) \text{ N/m}^2)} \left[ 2\left(\frac{57 \text{ mm}}{5 \text{ mm}}\right) + 2\left(\frac{35 \text{ mm}}{3 \text{ mm}}\right) \right] \\ &\quad + \frac{35 \text{ N} \cdot \text{m} (1.5 \text{ m})}{4(0.00200 \text{ m}^2)^2 (38(10^9) \text{ N/m}^2)} \left[ 2\left(\frac{57 \text{ mm}}{5 \text{ mm}}\right) + 2\left(\frac{35 \text{ mm}}{3 \text{ mm}}\right) \right] \\ &= 6.29(10^{-3}) \text{ rad} = 0.360^\circ\end{aligned}$$



اگر یادتان باشد در جلسات قبل در بحث نیروی برشی تاکید داشتیم که بار در صفحه تقارن اعمال شود. که در این حالت ها تحت اثر اعمال بار تیر خم شده و تنش نرمال و برشی ناشی از لنگر خمشی و نیروی برشی را براساس روابط بدست آمده، تعیین می کردیم.

تیر زیر با صفحه تقارن عمودی را در نظر بگیرید که تحت بارگذاری عرضی در آن صفحه تقارن قرار دارد. این تیر طبق آنچه در جلسات قبل یاد گرفتیم در صفحه بارگذاری خم شده و تنش های نرمال و برشی ناشی از لنگر خمشی  $M$  و نیروی برشی  $V$  در مقطع عرضی با استفاده از روابط زیر بدست می آید:



$$(V = P, M = Px)$$



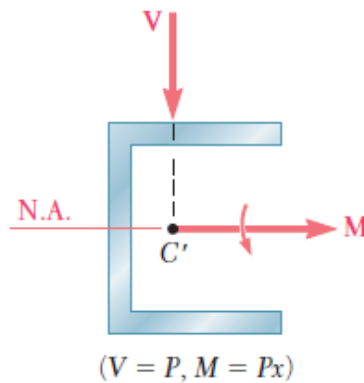
تنش نرمال:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

تنش برشی:

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

حال حالتی از تیر با مقطع ناودانی قبل را در نظر بگیرید که به اندازه 90 درجه چرخانده و خط اثر  $P$  نیز از مرکز سطح مقطع انتهایی بگذرد. نیروهای داخلی در مقطع دلخواه از تیر به صورت زیر می‌باشد. سوال مهم این است که آیا از روابط قبلی برای محاسبه تنش نرمال و برشی می‌توان استفاده کرد یا نه؟



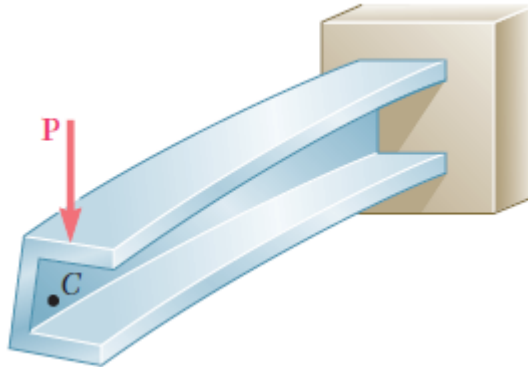
بردار کوپل  $M$  در این حالت هنوز در امتداد محور اصلی مقطع است و محور خنثی بر آن محور منطبق است، لذا برای محاسبه تنش نرمال همچنان از رابطه زیر می‌توان استفاده کرد:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

اما برای محاسبه تنش برشی در این مقطع نمی‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

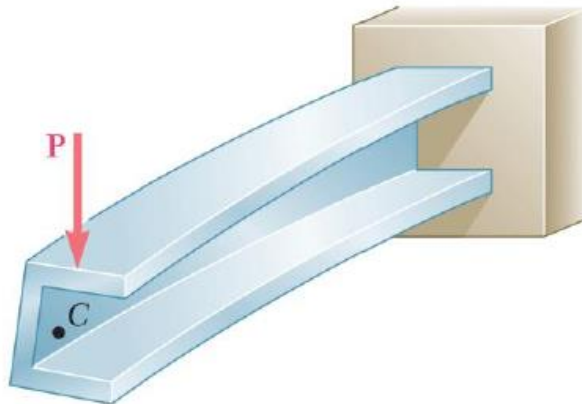
$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

زیرا این رابطه برای عضوی به کار می‌رود که دارای صفحه تقارن عمودی باشد. در این حالت عضو تحت بار وارده برخلاف حالت قبل، علاوه بر خمیده شدن، پیچیده نیز می‌شود (مطابق شکل زیر).

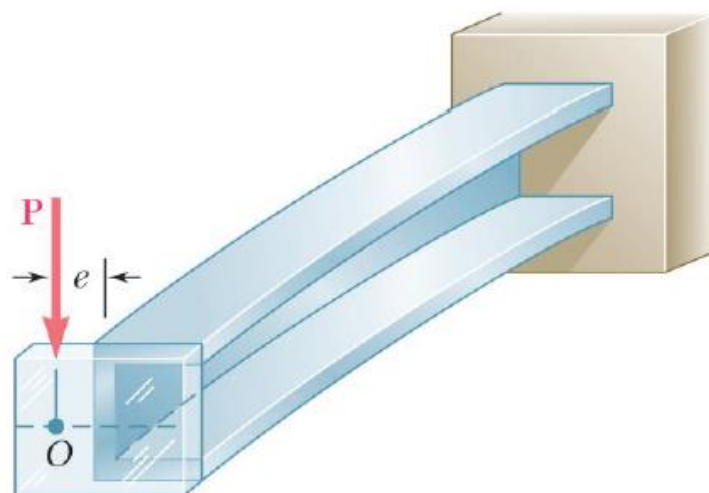


**حال اگر بار در صفحه تقارن اعمال نشود یا مقطع صفحه تقارن نداشته باشد، چه می‌شود؟**

برای هر مقطع، نقطه‌ای وجود دارد که با اعمال بارگذاری در آن نقطه، در مقطع لنگر پیچشی ایجاد نمی‌شود که این نقطه مرکز برش نام دارد. برای فهم این تعریف به شکل‌های زیر و محل اعمال بار و تغییر شکل ایجاد شده دقت کنید.



بار گذاری در مرکز برش اعمال نشده است.

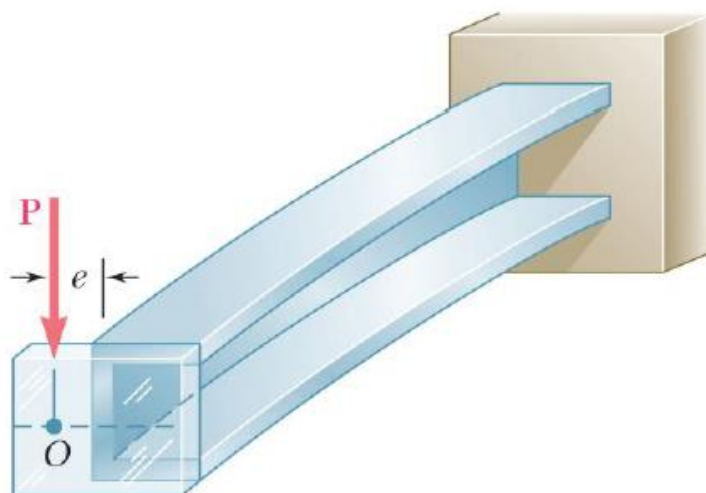


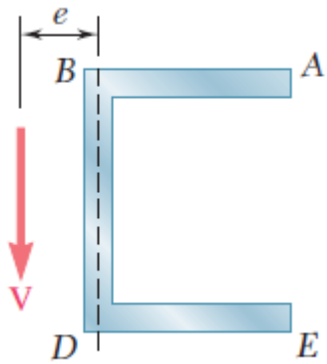
بار گذاری در مرکز برش اعمال شده است.

حال با استفاده از آنچه در جلسات قبل یاد گرفتیم، قصد داریم مرکز برش مقطع ناودانی را بدست بیاوریم.

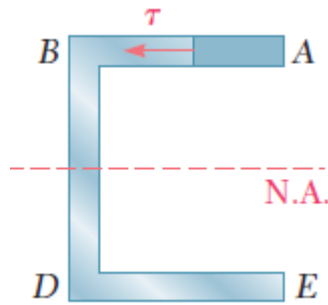
فرض کنید مطابق شکل زیر، نیروی برش در مرکز برش مقطع ناودانی وارد شود. در این حالت تیر فقط خم شده و دچار پیچش نمی گردد و تنش برشی حاصل را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

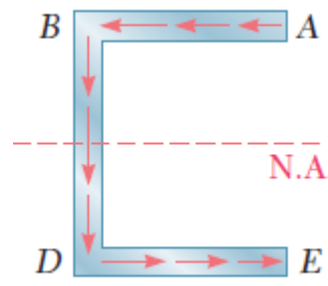




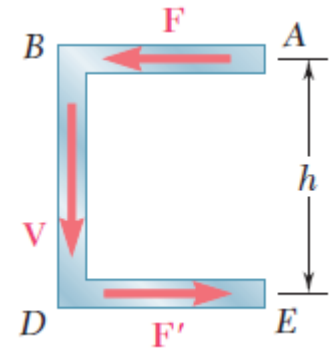
نیروی برش در مرکز برش



تنش برشی

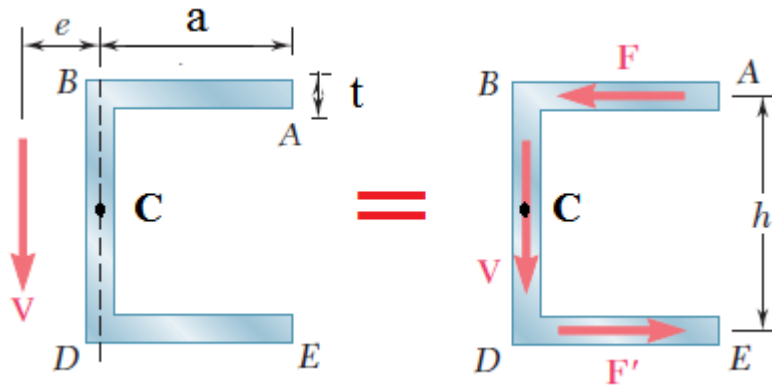


جریان برش



نیروی معادل در اعضا

هدف پیدا کردن  $e$  می باشد که در این صورت محل مرکز برش تعیین می گردد. با توجه به شکل زیر و با استفاده از تعادل استاتیکی خواهیم داشت:



$$(\sum M_C)_{\text{external}} = (\sum M_C)_{\text{internal}}$$

$$V \times e = V \times 0 + F \times (h/2) + F' \times (h/2)$$



از طرفی می دانیم:

$$F = F'$$

لذا داریم:

$$V \times e = F \times h \Rightarrow e = \frac{F \times h}{V}$$

از جلسات قبل به یاد داریم که:

$$F = \left( \frac{\tau_A + \tau_B}{2} \right) \times at$$

$$\tau_A = 0$$

$$\tau_B = \frac{V Q_B}{It} = \frac{V (at) (h/2)}{It} = \frac{Vah}{2I}$$

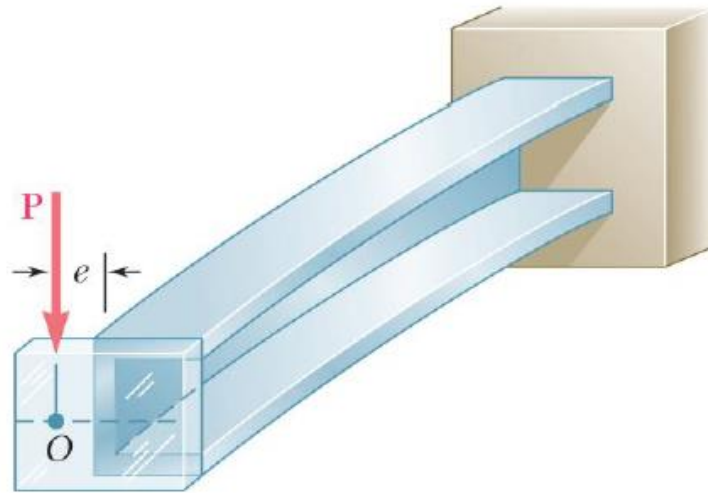
در نتیجه داریم:

$$F = \left( \frac{Vah}{4I} \right) \times at = \frac{Va^2ht}{4I}$$

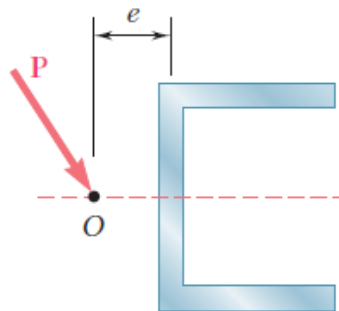
و در نهایت محل مرکز برش براساس مشخصات هندسی مقطع به صورت زیر بدست می آید:

$$e = \frac{a^2h^2t}{4I}$$

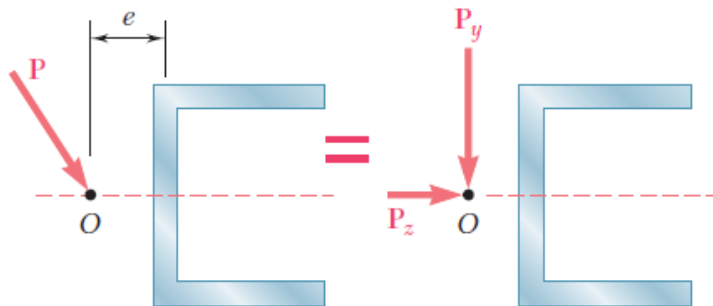
پس در شکل زیر، نقطه  $O$  که محل تلاقی خط اثر  $P$  با محور تقارن مقطع می باشد، مرکز برش مقطع می باشد.



به نظر شما اگر بار  $P$  به صورت مایل مانند شکل زیر در نقطه  $O$  اثر کند، عضو خواهد پیچید یا نه؟



در این حالت نیروی  $P$  را می توان به دو مولفه به صورت زیر تجزیه کرد که هیچکدام از آنها باعث پیچش عضو نمی گردد.





به عنوان جمع بندی، موارد زیر برای تعیین مرکز برش یک مقطع کمک کننده خواهد بود:

1- مرکز برش به مقدار نیروی برشی بستگی ندارد و یک مشخصه هندسی می باشد.

2- مرکز برش روی محور تقارن مقطع قرار دارد.

3- در صورتی که مقطعی دو محور تقارن داشته باشد، مرکز برش در محل تلاقی محورهای تقارن قرار دارد.

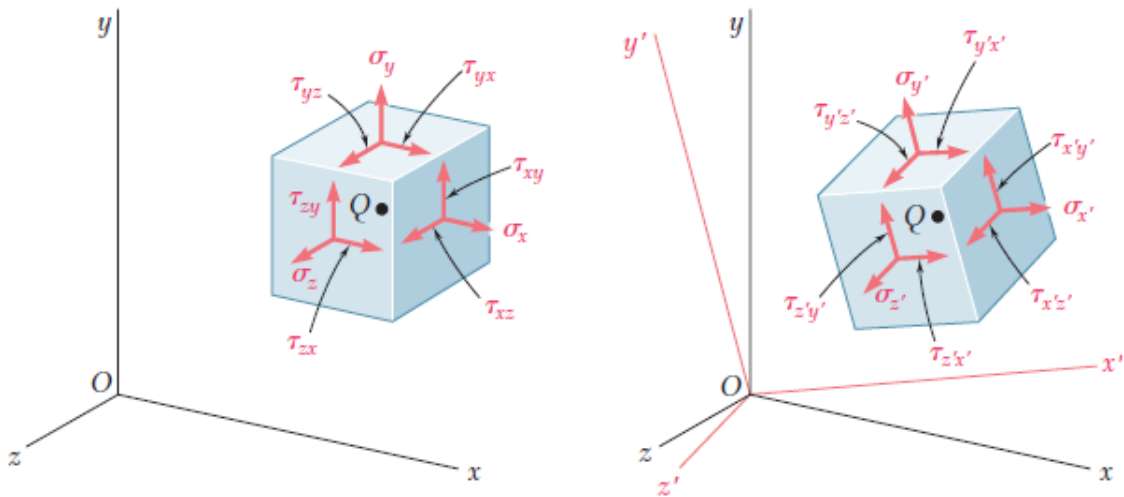
4- در مقاطع جدارنازک، اگر یک مقطع از چند جزء (عضو) هم راس تشکیل شده باشد، مرکز برش همان محل تلاقی اجزاء (اعضا) می باشد.

5- در بقیه موارد، همانند مثال ناودانی در بالا، با فرض اعمال نیروی برش در مرکز برش و با استفاده از رسم توزیع جریان برش و رابطه زیر، نیروی معادل در اعضا و بخش های مختلف ناشی از برش محاسبه شده و از برابری دو سیستم نیرویی، محل مرکز برش تعیین می گردد.

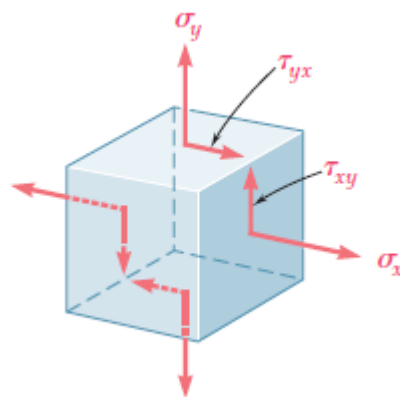
$$F = \int q ds$$



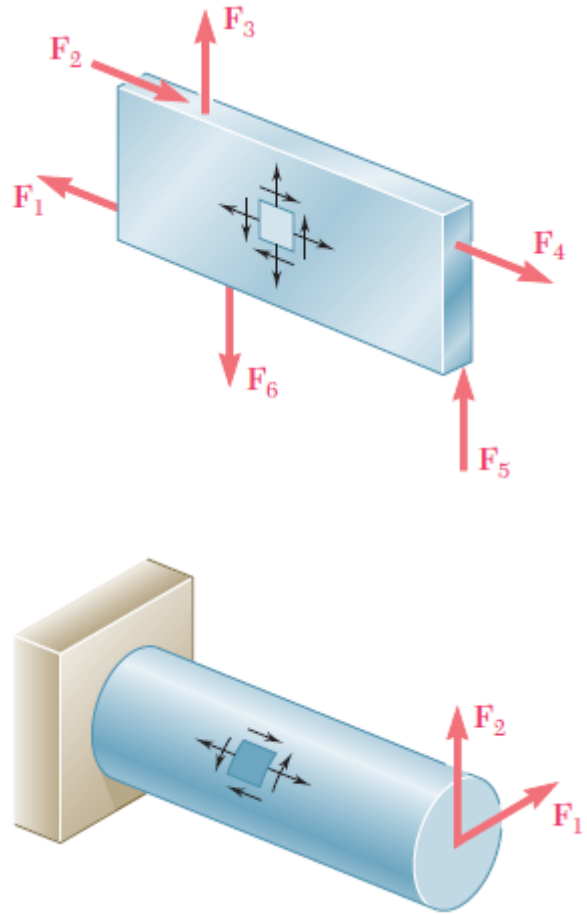
در جلسات اول دیدیم که حالت تنش در یک نقطه مانند  $Q$  را در حالت کلی با شش مولفه بر وجوه یک المان کوچک مکعبی به مرکز  $Q$  نشان داد. اگر محورهای مختصات را دوران دهیم، حالت تنش در وضعیت جدید را با مجموعه دیگری از مولفه‌ها می‌توان نشان داد. در این بخش با نحوه تبدیل مولفه‌های تنش و کرنش بر اثر چرخش محورهای مختصات و تعیین تنش‌ها و کرنش‌های اصلی (حداکثر و حداقل) آشنا خواهیم شد.



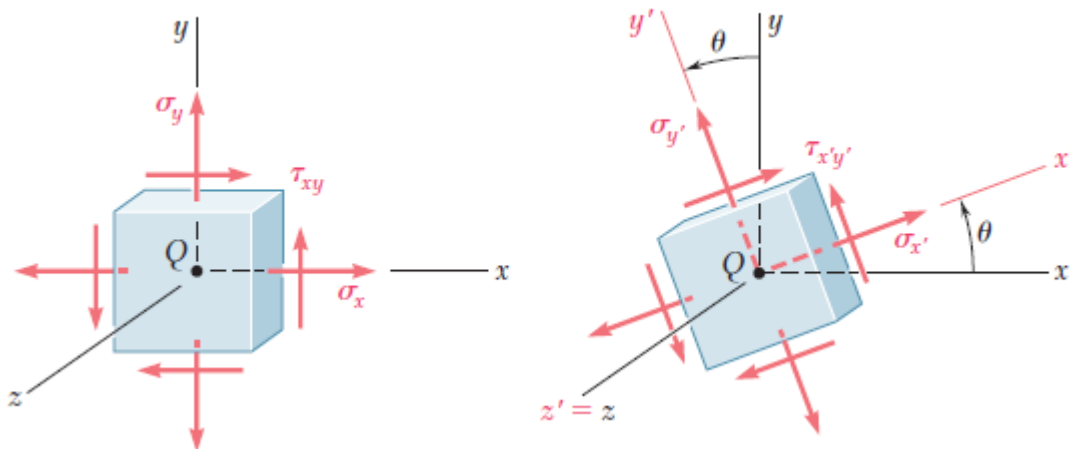
در بحث تبدیل تنش در این بخش، عمدتاً به تنش صفحه‌ای می‌پردازیم، یعنی حالتی که در آن دو وجه المان مکعبی فاقد تنش هستند. اگر محور  $z$  را عمود بر این وجوه بگیریم، داریم  $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$



نمونه‌ای از حالت تنش صفحه‌ای در شکل‌های زیر نشان داده شده است.

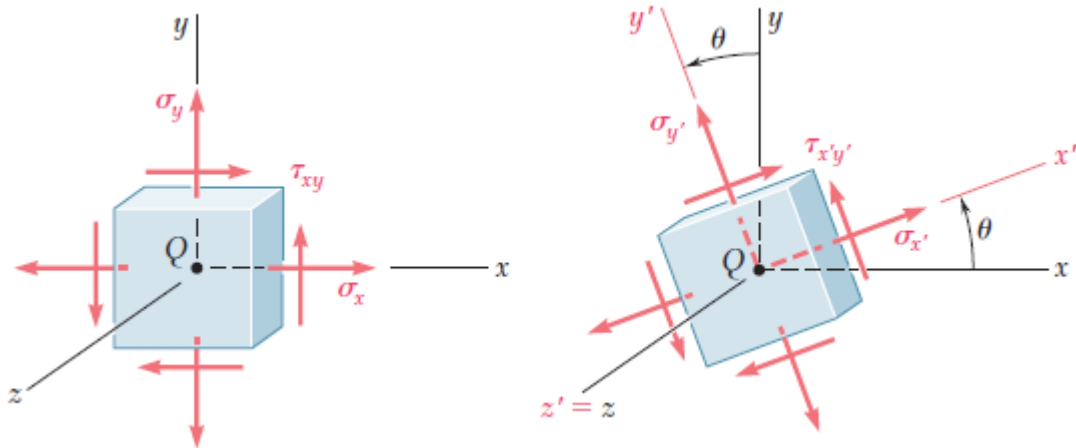


وضعیت مولفه‌های تنش بر روی وجوه المان مکعبی در حالت تنش صفحه‌ای در شکل زیر نشان داده شده است.

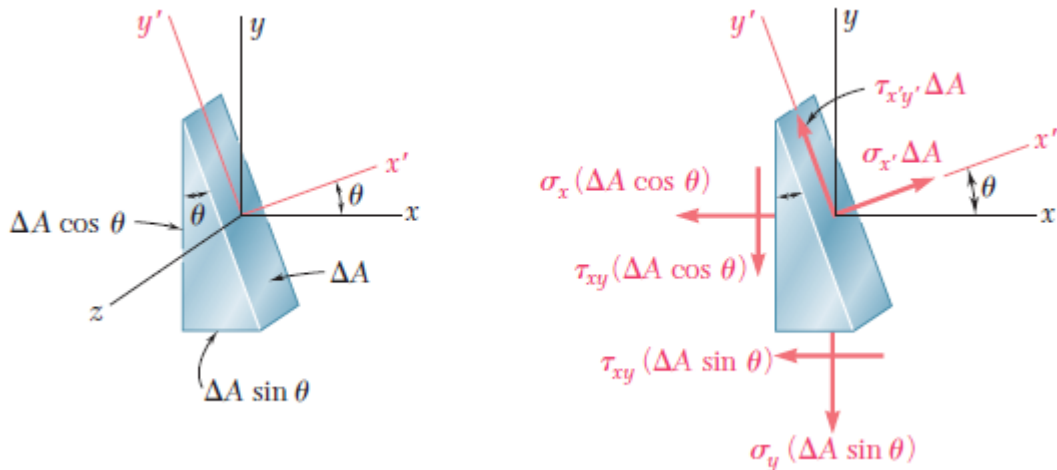




فرض کنید حالت تنش صفحه‌ای در نقطه  $Q$  مطابق شکل زیر وجود داشته باشد. حال المان را تحت زاویه  $\theta$  حول محور  $z$  چرخانده و مولفه‌های تنش در وضعیت جدید را بر حسب مولفه‌های تنش در وضعیت قبلی تعیین می‌کنیم.



برای تعیین تنش قائم  $\sigma_{x'}$  و تنش برشی  $\tau_{x'y'}$  وارد بر وجه عمود بر محور  $x'$ ، یک جزء منشوری را در نظر می‌گیریم که وجوه آن، به ترتیب، بر محورهای  $x$  و  $y$  و  $x'$  عمودند. مساحت وجه مایل را با  $\Delta A$  نشان می‌دهیم. با بررسی تعادل المان موردنظر داریم:



$$\Sigma F_{x'} = 0: \quad \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta = 0$$

$$\Sigma F_{y'} = 0: \quad \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \sin \theta = 0$$

با حل معادله‌های بالا داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{x'y'} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

با توجه به روابط مثلثاتی زیر:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

روابط قبلی بازنویسی شده و مولفه‌های تنش در وضعیت جدید به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

از روابط بالا، نتیجه مهم زیر حاصل می‌شود. به عبارتی مجموع تنش‌های قائم وارد بر یک جزء (المان) مکعبی در حالت تنش صفحه‌ای از وضعیت آن جزء مستقل است.

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$



معادله بدست آمده برای  $\sigma_{x'}$  و  $\tau_{x'y'}$  معادله‌های پارامتری یک دایره اند، یعنی اگر نقطه  $M$  به طول  $\sigma_{x'}$  و به عرض  $\tau_{x'y'}$  را برای هر مقدار معلوم پارامتر  $\theta$  رسم کنیم، تمام نقاطی که به این ترتیب بدست می‌آیند روی یک دایره قرار می‌گیرند. برای تعیین معادله این دایره،  $\theta$  را از معادلات حذف می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

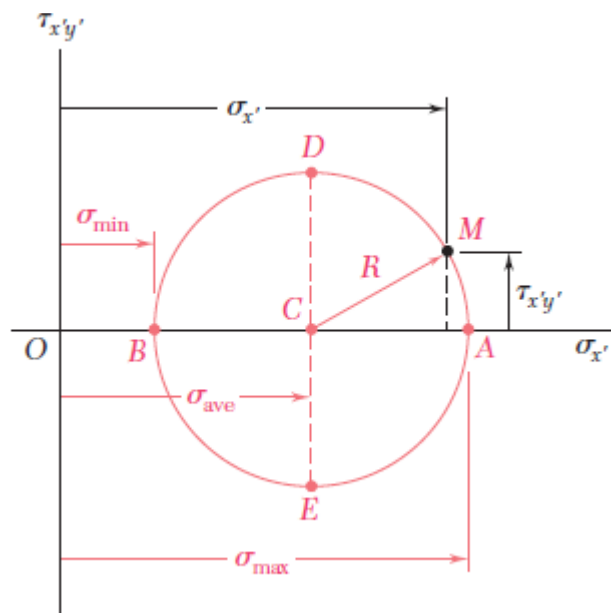
با استفاده از تعاریف زیر و جایگذاری در رابطه بالا،

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

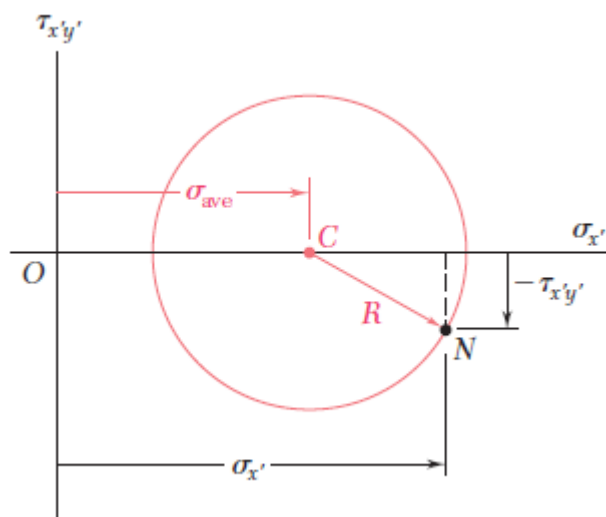
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

معادله دایره به شعاع  $R$  و با مرکز  $C$  به مختصات  $(\sigma_{ave}, 0)$  به صورت زیر بدست می‌آید.

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{ave})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$



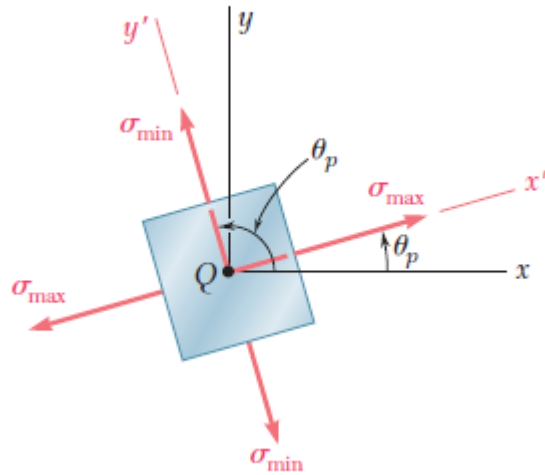
به علت تقارن دایره نسبت به محور افقی، اگر نقطه  $N$  به طول  $\sigma_{x'}$  و به عرض  $-\tau_{x'y'}$  را به جای نقطه  $M$  رسم می‌کردیم، به همان نتیجه بالا می‌رسیدیم.



نقاط  $A$  و  $B$  را که محل تلاقی دایره با محور افقی است، متناظر با مقادیر حداکثر و حداقل تنش نرمال بوده و در هر دو نقطه تنش برشی صفر می‌باشد. زاویه دوران متناظر با این نقاط (مطابق شکل) به صورت زیر می‌باشد:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

تنش های نرمال در نقاط  $A$  و  $B$  که متناظر با  $\sigma_{\max}$  و  $\sigma_{\min}$  می باشد را تنش های اصلی در نقطه  $Q$  می گویند و صفحاتی را که این تنش ها بر آنها وارد می شوند، صفحات اصلی تنش در نقطه  $Q$  می گویند (مطابق شکل زیر).



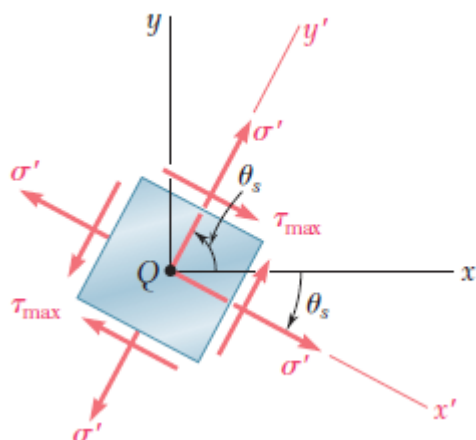
با استفاده از روابط بالا و دایره ترسیمی، مقادیر تنش های اصلی به صورت زیر تعیین می گردد:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ave}} + R \quad \text{و} \quad \sigma_{\min} = \sigma_{\text{ave}} - R$$

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

با توجه به دایره ترسیمی، تنش برشی نیز در یک زاویه مشخصی حداکثر خواهد شد. مقدار این زاویه و تنش برشی حداکثر بعد از مقداری محاسبات و ساده سازی های ریاضی روابط قبلی، از روابط زیر تعیین می گردد:





$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

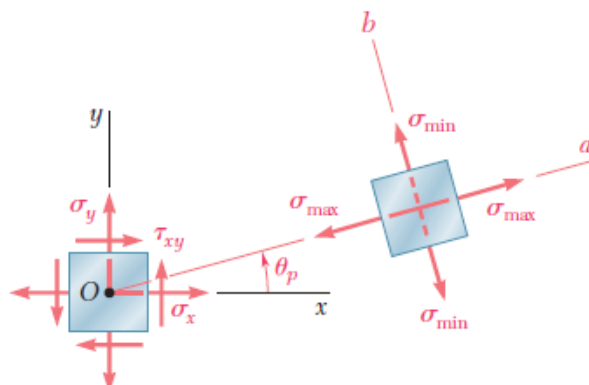
به نظر شما (با توجه به دایره ترسیمی) صفحات تنش برشی حداکثر و صفحات اصلی تنش چه زاویه‌ای با هم دارند؟

صفحات تنش برشی حداکثر با صفحات اصلی تنش زاویه 45 درجه دارند.

۷-۴

### رسم دایره موهر برای حالت تنش صفحه‌ای

دایره ترسیمی در بخش قبلی، همان دایره مور (موهر) برای تنش صفحه‌ای می‌باشد. برای ترسیم دایره موهر با توجه به شکل به صورت زیر عمل می‌کنیم:

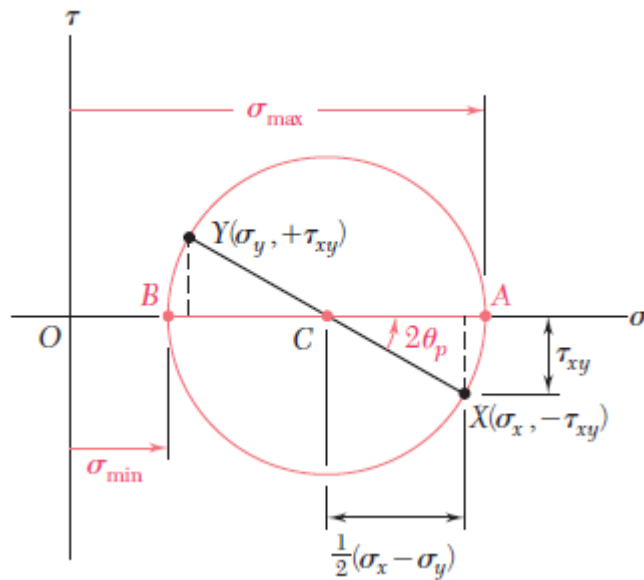


- نقطه X به مختصات  $(\sigma_x, -\tau_{xy})$  را روی نمودار مشخص می‌کنیم.

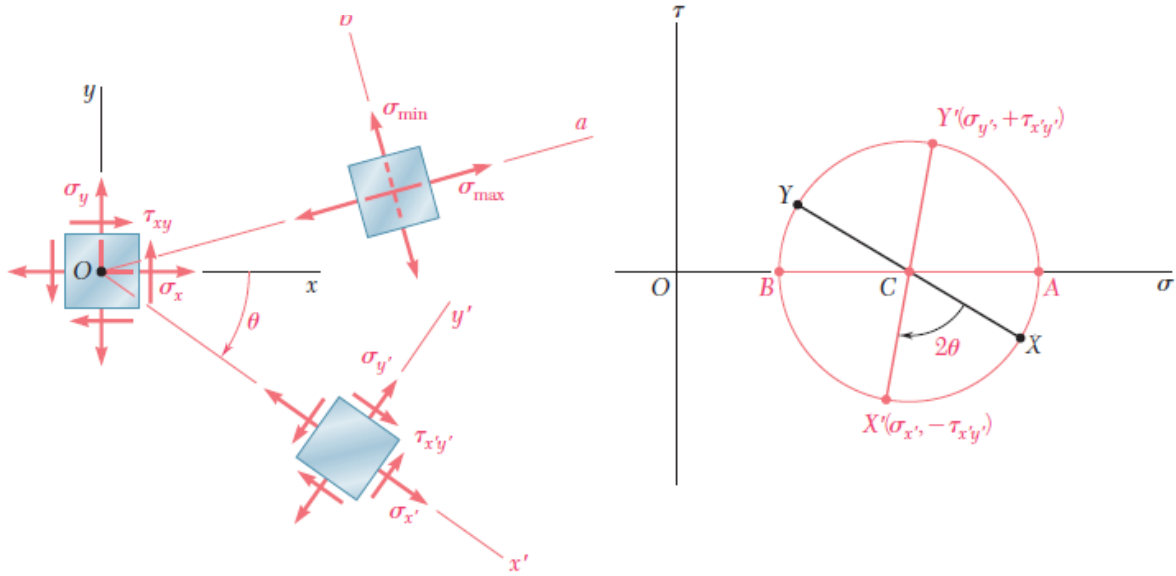
2- نقطه Y به مختصات  $(\sigma_y, +\tau_{xy})$  را روی نمودار مشخص می‌کنیم.

3- X و Y را با خطی راست به هم متصل می‌کنیم و نقطه تقاطع خط XY با محور افقی را C می‌نامیم.

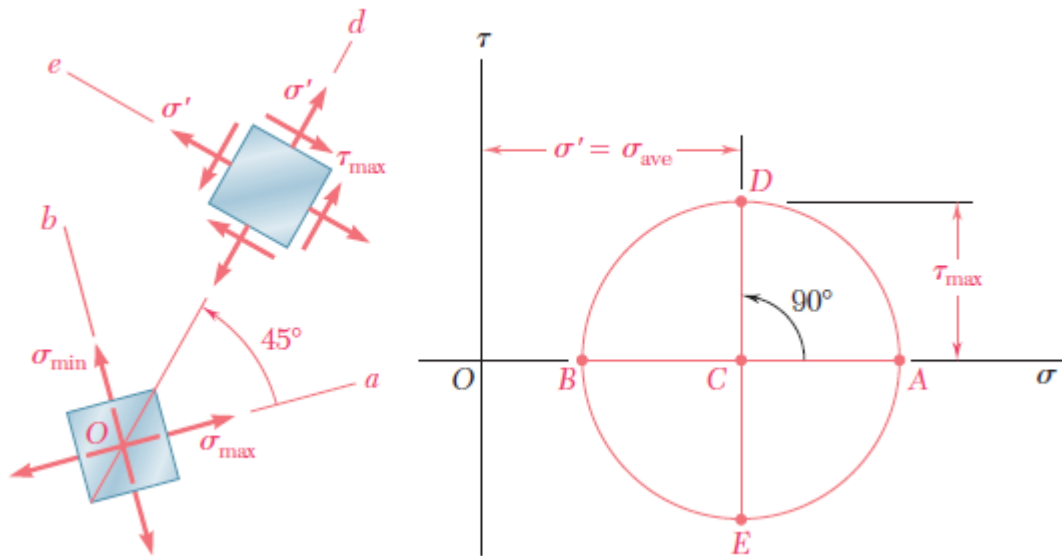
4- دایره‌ای به مرکز C و قطر XY ترسیم می‌کنیم.



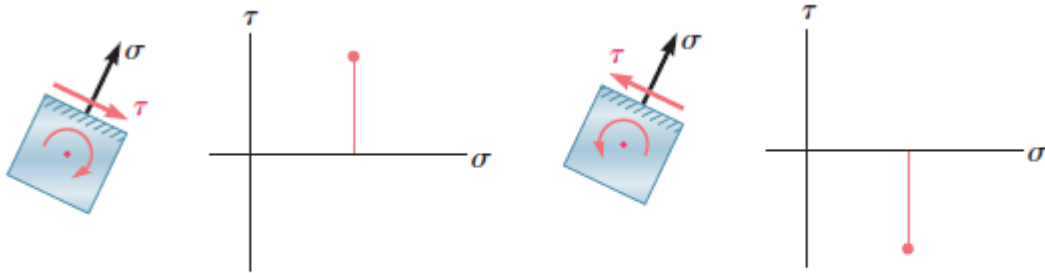
چون دایره مور به طور یکتا تعریف شده است، با در نظر گرفتن مولفه‌های تنش  $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}$  متناظر با محورهای  $x'$  و  $y'$  (شکل زیر) می‌توان همان دایره را بدست آورد.



در دایره مور زیر، وضعیت تنش های اصلی و تنش برشی حداکثر و صفحات مربوطه نشان داده شده است.



در نهایت برای تشخیص علامت تنش های برشی و نرمال جهت رسم دایره به صورت زیر عمل می کنیم. وقتی تنش برشی وارد بر یک وجه معین تمایل دارد المان تحت بررسی را به طور ساعتگرد بچرخاند، نقطه روی دایره مور متناظر با آن وجه در بالای محور افقی قرار دارد. وقتی تنش برشی وارد بر یک وجه معین تمایل دارد المان را به طور پادساعتگرد بچرخاند، نقطه متناظر با آن وجه در پایین محور افقی قرار دارد. همچنین تنش کششی را مثبت و تنش فشاری را منفی در نظر می گیریم.

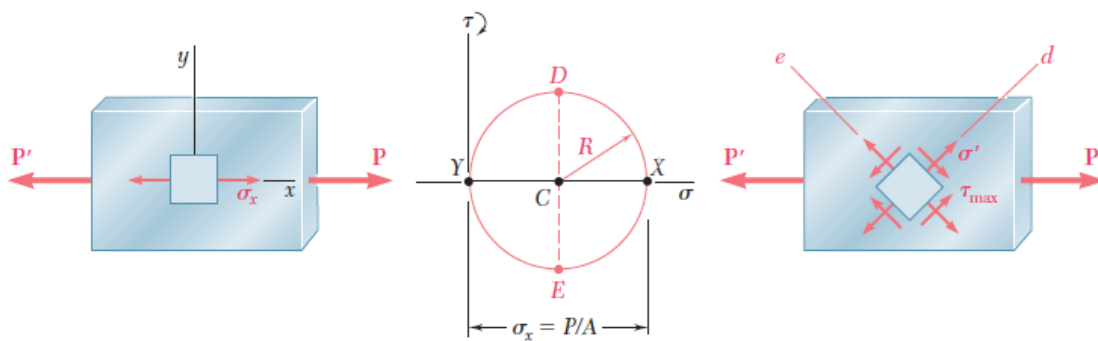


ساعتگرد : بالای محور (مثبت)

پادساعتگرد : پایین محور (منفی)

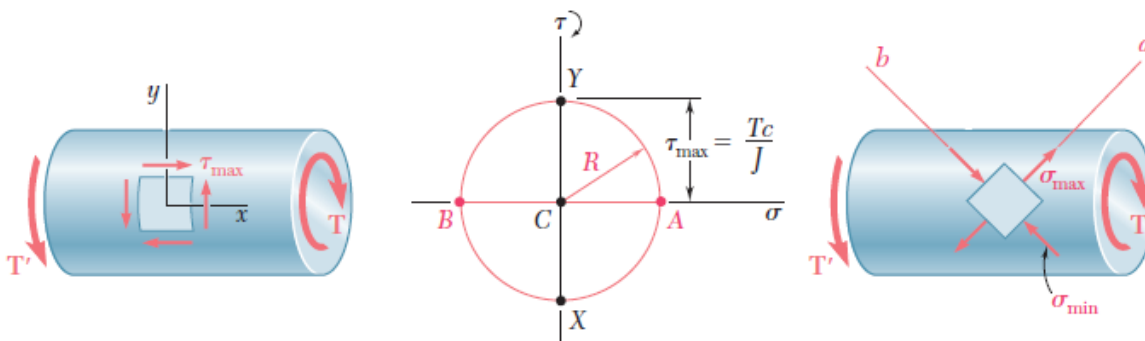
در ادامه دایره مور مربوط به بارگذاری محوری و پیچشی که قبلا بررسی کرده بودیم، مرور می شود.

بارگذاری محوری:



$$\tau_{\max} = \sigma' = R = \frac{P}{2A}$$

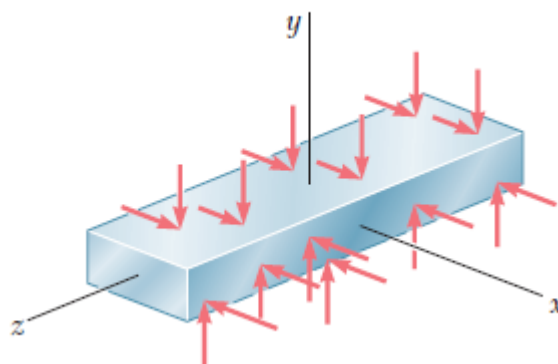
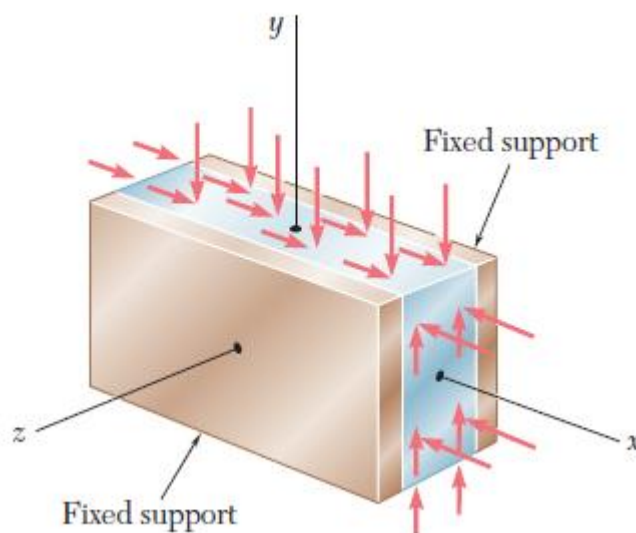
بارگذاری پیچشی:



$$\sigma_{\max, \min} = \pm R = \pm \frac{Tc}{J}$$

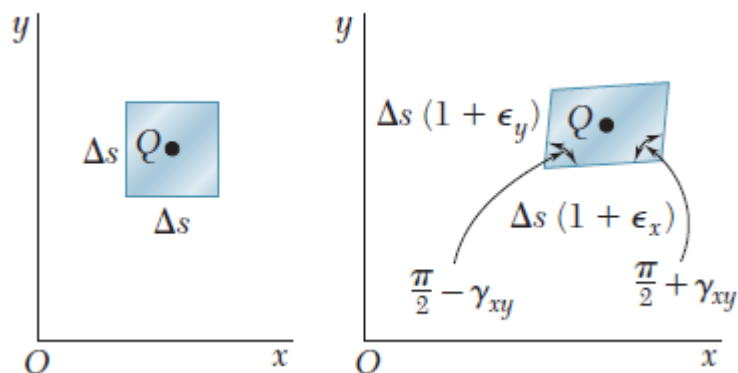


کرنش صفحه‌ای یعنی حالتی که تغییر شکل ماده در صفحات موازی روی می‌دهند و در هر یک از این صفحات به طور یکسان هستند. اگر محور  $z$  را عمود بر این صفحات انتخاب کنیم،  $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$  و فقط مولفه‌های کرنش  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  باقی می‌مانند. این حالت در صفحه‌ای روی می‌دهد که لبه‌های آن تحت بارهای یکنواخت توزیعی قرار دارند و تکیه‌گاه‌های ثابت هموار و صلبی مانع انقباض یا انبساط جانبی آن می‌شوند. این حالت در میله‌ای با طول بینهایت که جوانب آن تحت بارهای یکنواخت توزیعی قرار دارند نیز روی می‌دهد زیرا، به علت تقارن، اجزای واقع در یک صفحه عرضی نمی‌توانند به طرف خارج آن صفحه حرکت کنند. این مدل ایده آلی نشان می‌دهد که در یک میله بلند واقعی که تحت بارهای عرضی یکنواخت توزیعی قرار دارد، در هر مقطع عرضی که خیلی نزدیک انتهای میله نباشد حالت کرنش صفحه‌ای به وجود می‌آید.

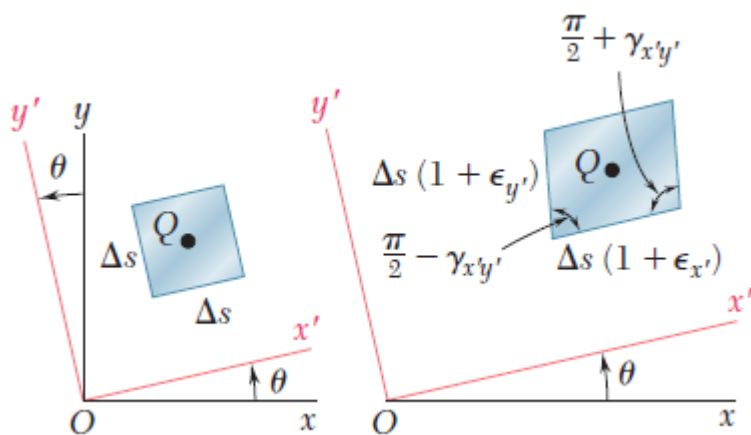


به نظر شما آیا حالت کرنش صفحه‌ای و حالت تنش صفحه‌ای به طور همزمان می‌تواند روی دهد؟

فرض کنید حالت کرنش صفحه‌ای در نقطه  $Q$  به صورت زیر وجود دارد. تحت کرنش‌های وارده، مربع به متوازی الاضلاع تبدیل خواهد شد که در جلسات اول بررسی نمودیم.



حال محورهای مختصات را به اندازه  $\theta$  دوران داده و مولفه‌های جدید کرنش را بر حسب مولفه‌های قدیم بدست می‌آوریم.



با استفاده از روابط هندسی و مثلثات در نهایت رابطه بین مولفه‌های کرنش جدید و قدیم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta$$

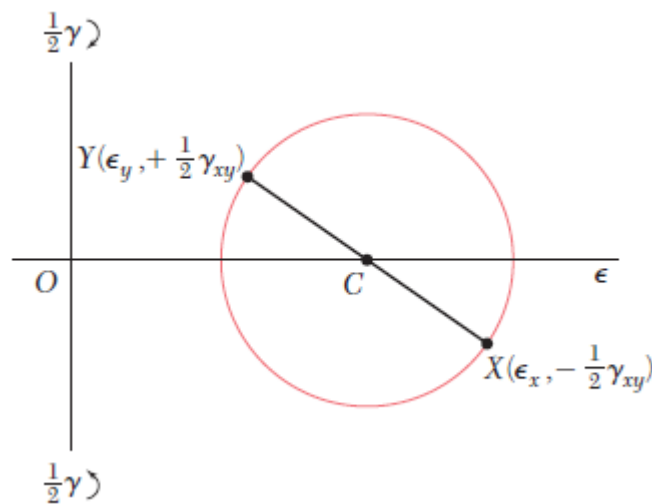
با استفاده از روابط بالا داریم:

$$\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} = \epsilon_x + \epsilon_y$$

## ۶-۷ دایره مور برای کرنش صفحه‌ای



همانند تنش صفحه‌ای در این حالت نیز با توجه به روابط بدست آمده برای تبدیل کرنش صفحه‌ای می‌توان دایره مور کرنش را به صورت شکل زیر ترسیم کرد.

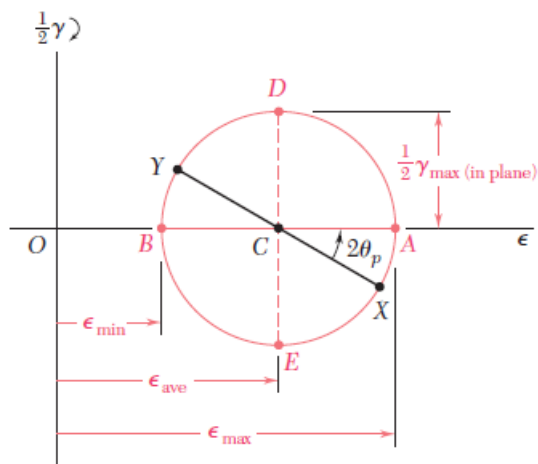


مرکز و شعاع دایره مور کرنش صفحه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$\epsilon_{ave} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \quad \text{و} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

در خصوص علامت کرنش برشی، اگر تغییر شکل برشی باعث دوران ساعتگرد یک ضلع شود، نقطه متناظر در دایره مور کرنش صفحه‌ای در بالای محور افقی رسم می‌شود و بالعکس.

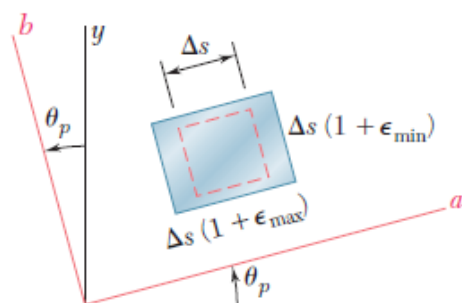
با توجه به دایره مور ترسیمی و روابط ریاضی بدست آمده برای تبدیلات کرنش، مقادیر حداکثر و حداقل کرنش نرمال (کرنش‌های اصلی) و برشی و زاویه مربوطه به صورت زیر بدست می‌آید:



$$\epsilon_{max} = \epsilon_{ave} + R \quad \text{و} \quad \epsilon_{min} = \epsilon_{ave} - R$$

امتداد محورهای اصلی کرنش به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$





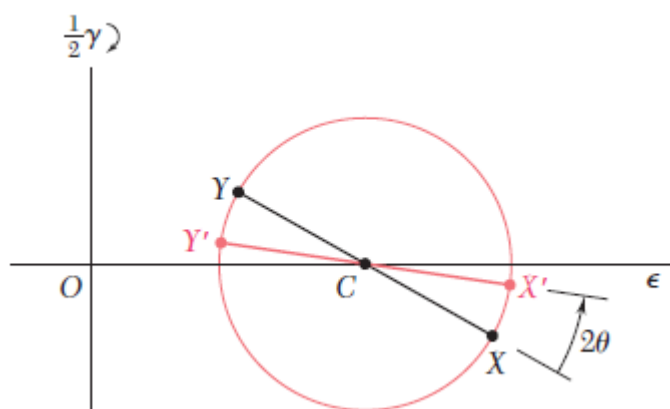
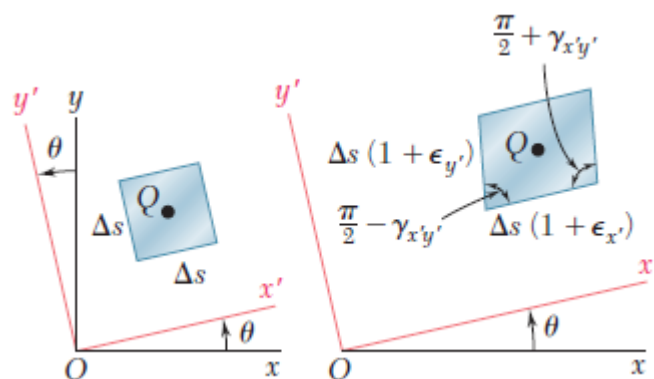
کرنش برشی حداکثر داخل صفحه با توجه به دایره مور به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\gamma_{\max(\text{in plane})} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

آیا محورهای اصلی کرنش بر محورهای اصلی تنش منطبق است؟

در حالت تغییر شکل الاستیک یک ماده همگن و همسانگرد، طبق قانون هوک، اگر تنش برشی صفر باشد، کرنش برشی نیز صفر خواهد بود. یعنی محورهای اصلی کرنش بر محورهای اصلی تنش منطبق است.

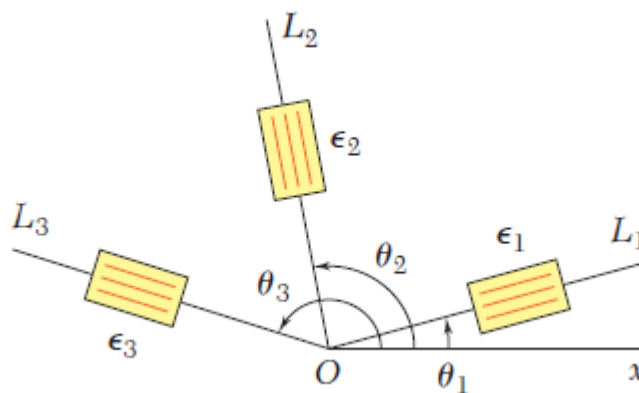
یادآوری می‌شود که جهت دوران در المان و دایره یکسان و میزان دوران در دایره دو برابر دوران در المان می‌باشد.





کرنش قائم را در هر جهت دلخواه روی سطح یک عضو ساختمانی یا مکانیکی تعیین کرد. برای این منظور می‌توان دو علامت را روی یک خط با امتداد دلخواه نشانه زد و طول پاره خط را قبل و بعد از بارگذاری اندازه گرفت و کرنش را با استفاده از روابط جلسات اول که نسبت تغییر طول به طول اولیه بود، حساب کرد. برای اندازه‌گیری دقیق‌تر کرنش قائم، از کرنش سنج الکتریکی استفاده می‌شود.

با توجه به شکل و روابط زیر، با اندازه‌گیری کرنش‌های قائم در امتداد سه خط دلخواه گذرا از یک نقطه، می‌توان  $\epsilon_x$  و  $\epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  را در آن نقطه بدست آورد.



$$\epsilon_1 = \epsilon_x \cos^2 \theta_1 + \epsilon_y \sin^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_x \cos^2 \theta_2 + \epsilon_y \sin^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \sin \theta_2 \cos \theta_2$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_x \cos^2 \theta_3 + \epsilon_y \sin^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \sin \theta_3 \cos \theta_3$$

آرایش کرنش‌سنج‌ها را که برای اندازه‌گیری سه کرنش قائم  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  به کار می‌رود گلبزرگ کرنش می‌گویند.

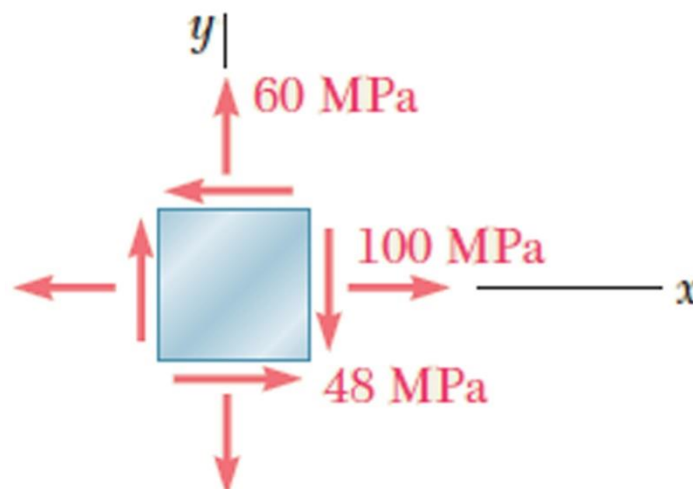
## مثال های حل شده سری ۸

۱

هدف: در این مثال با تبدیلات تنش صفحه‌ای و ترسیم دایره مور و تعیین تنش‌های اصلی آشنا خواهیم شد.

برای حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده، مطلوبست: (الف) صفحات اصلی و تنش‌های اصلی، (ب) مولفه‌های تنش وارد بر المانی که با دوران  $30^\circ$  درجه پادساعتگرد المان نشان داده شده بدست می‌آید.

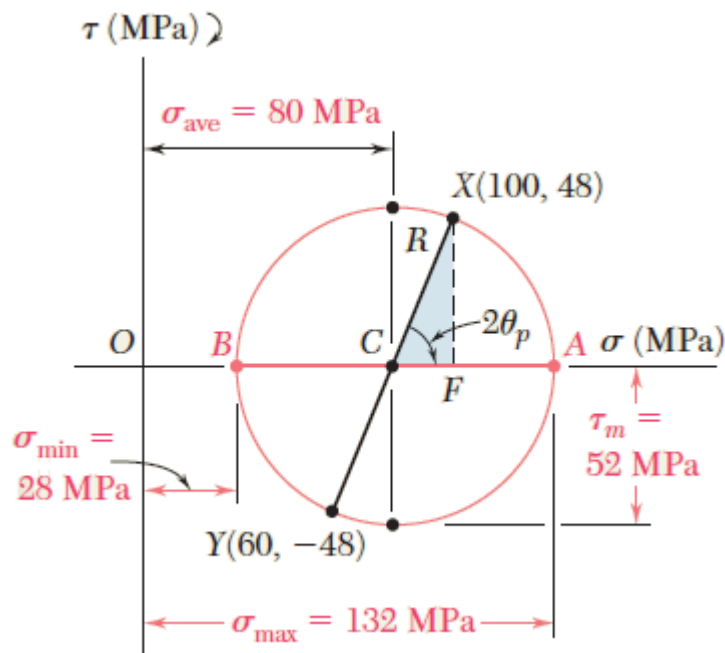
For the state of plane stress shown, determine (a) the principal planes and the principal stresses, (b) the stress components exerted on the element obtained by rotating the given element counterclockwise through  $30^\circ$ .



با استفاده از آنچه در کلاس درس یاد گرفتیم و رعایت قرارداد علامت‌ها برای تنش نرمال و برشی، دایره مور المان داده شده به صورت زیر ترسیم می‌گردد:

$$\sigma_{ave} = OC = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(100 + 60) = 80 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(20)^2 + (48)^2} = 52 \text{ MPa}$$



امتداد محورهای اصلی با توجه به دایره مور و مثلثات به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

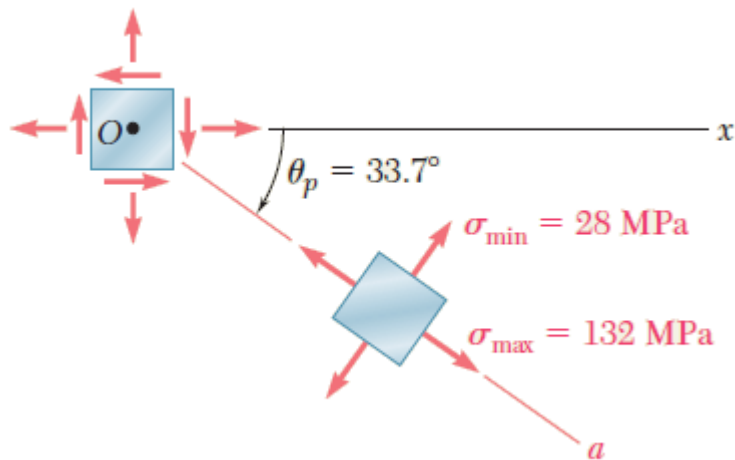
$$\tan 2\theta_p = \frac{XF}{CF} = \frac{48}{20} = 2.4 \quad 2\theta_p = 67.4^\circ \downarrow \quad \theta_p = 33.7^\circ \downarrow$$

مقادیر تنش‌های اصلی نیز به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

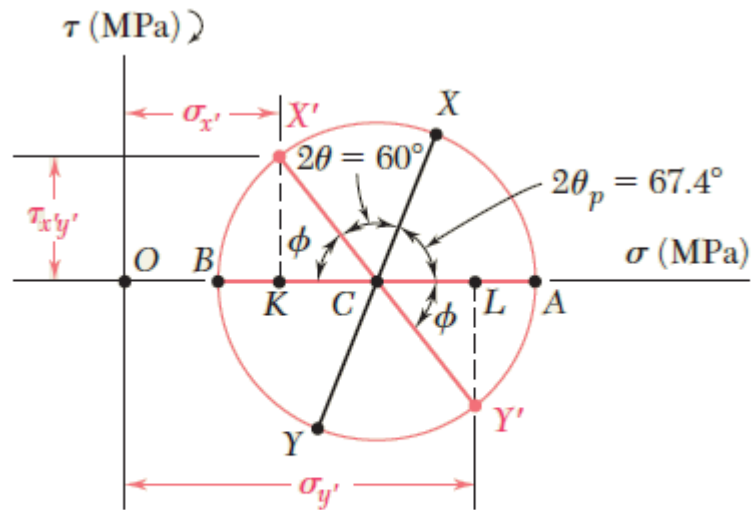
$$\sigma_{max} = OA = OC + CA = 80 + 52 \quad \sigma_{max} = +132 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = OB = OC - BC = 80 - 52 \quad \sigma_{min} = +28 \text{ MPa}$$

در شکل زیر تنش‌های اصلی و امتداد محورهای اصلی نشان داده شده است.



برای تعیین تنش‌ها در المانی با دوران 30 درجه لازم است نقطه متناظر با وجه المان اصلی به اندازه 60 درجه در جهت یکسان با دوران المان، روی دایره مور دوران داد و مقادیر تنش‌های نرمال و برشی را بدست آورد.



$$\phi = 180^\circ - 60^\circ - 67.4^\circ$$

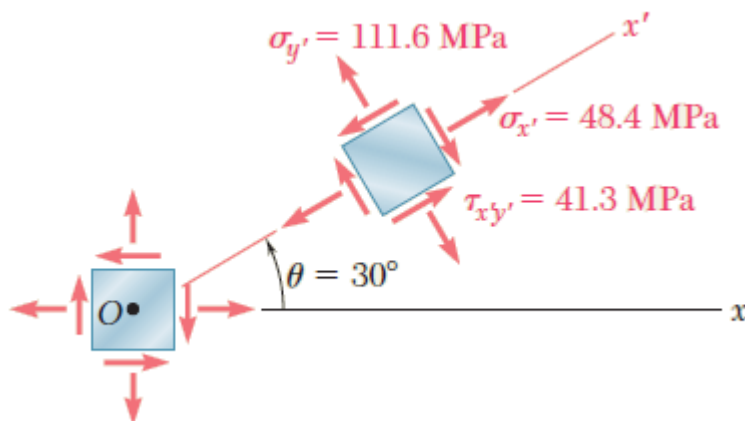
$$\phi = 52.6^\circ$$

با توجه به دایره مور داریم:

$$\begin{aligned} \phi &= 180^\circ - 60^\circ - 67.4^\circ & \phi &= 52.6^\circ \\ \sigma_{x'} &= OK = OC - KC = 80 - 52 \cos 52.6^\circ & \sigma_{x'} &= + 48.4 \text{ MPa} \\ \sigma_{y'} &= OL = OC + CL = 80 + 52 \cos 52.6^\circ & \sigma_{y'} &= + 111.6 \text{ MPa} \\ \tau_{x'y'} &= KX' = 52 \sin 52.6^\circ & \tau_{x'y'} &= 41.3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

مقادیر تنش ها و جهت آنها در شکل زیر نمایش داده شده است.

به جهت تنش ها با توجه به مقادیر تنش ها روی دایره مور در هر نقطه که متناظر با هر وجه در المان است، دقت کنید.



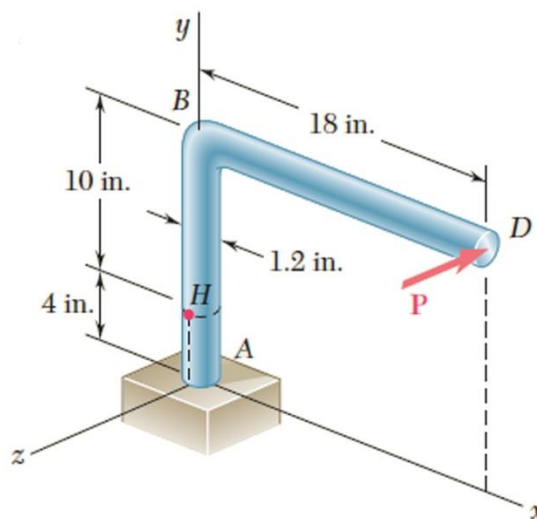
## مثال های حل شده سری ۸

۲

هدف: در این مثال با تبدیلات تنش صفحه‌ای و ترسیم دایره مور و تعیین تنش‌های اصلی در بارگذاری ترکیبی آشنا خواهیم شد.

نیروی افقی  $P$  برابر 150 پوند در انتهای  $D$  از بازوی  $ABD$  وارد می‌شود. اگر قسمت  $AB$  به قطر 1.2 اینچ باشد، مطلوب است: (الف) تنش‌های قائم و برشی وارد بر المان (جزء) که در نقطه  $H$  قرار دارد و اضلاع آن به موازات محورهای  $x$  و  $y$  است، (ب) صفحات اصلی و تنش‌های اصلی در نقطه  $H$ .

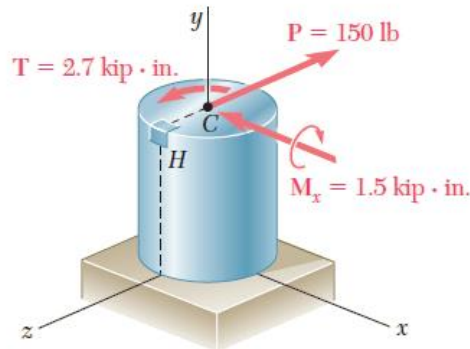
A single horizontal force  $P$  of magnitude 150 lb is applied to end  $D$  of lever  $ABD$ . Knowing that portion  $AB$  of the lever has a diameter of 1.2 in., determine (a) the normal and shearing stresses on an element located at point  $H$  and having sides parallel to the  $x$  and  $y$  axes, (b) the principal planes and the principal stresses at point  $H$ .



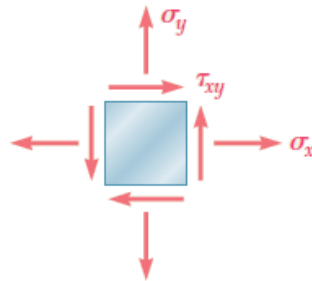
با استفاده از اصول استاتیک، نیروهای داخلی در مقطع شامل نقطه  $H$  به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$P = 150 \text{ lb} \quad T = (150 \text{ lb})(18 \text{ in.}) = 2.7 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$

$$M_x = (150 \text{ lb})(10 \text{ in.}) = 1.5 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$

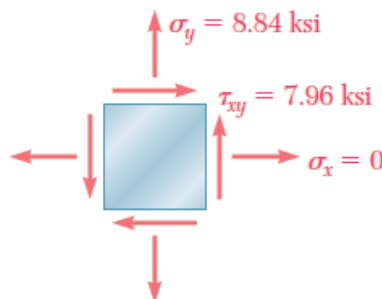


حال مقادیر تنش‌های نرمال و برشی ناشی از نیروهای داخلی و علامت آنها را در المانی در نقطه  $H$  به صورت زیر تعیین می‌کنیم. نکته مهمی که باید توجه کنیم این است که نیروی برشی  $P$  در نقطه  $H$  هیچگونه تنش برشی به وجود نمی‌آورد.



$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = +\frac{Mc}{I} = +\frac{(1.5 \text{ kip} \cdot \text{in.})(0.6 \text{ in.})}{\frac{1}{4}\pi (0.6 \text{ in.})^4} \quad \sigma_y = +8.84 \text{ ksi}$$

$$\tau_{xy} = +\frac{Tc}{J} = +\frac{(2.7 \text{ kip} \cdot \text{in.})(0.6 \text{ in.})}{\frac{1}{2}\pi (0.6 \text{ in.})^4} \quad \tau_{xy} = +7.96 \text{ ksi}$$





حال با استفاده از روابط مربوط به تبدیل تنش‌ها، محورهای اصلی تنش و مقادیر تنش‌های اصلی به صورت زیر تعیین می‌گردد.  
یادآوری می‌شود که می‌توانید از دایره مور هم استفاده کنید.

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(7.96)}{0 - 8.84} = -1.80$$

$$2\theta_p = -61.0^\circ \quad \text{and} \quad 180^\circ - 61.0^\circ = +119^\circ$$

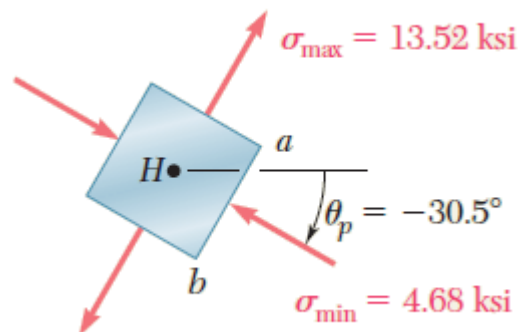
$$\theta_p = -30.5^\circ \quad \text{and} \quad +59.5^\circ$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max, \min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{0 + 8.84}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 8.84}{2}\right)^2 + (7.96)^2} = +4.42 \pm 9.10 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = +13.52 \text{ ksi}$$

$$\sigma_{\min} = -4.68 \text{ ksi}$$

مقادیر تنش‌های اصلی و امتداد محورهای اصلی در المان شکل زیر نمایش داده شده است.



## مثال های حل شده سری ۸

۳

هدف: در این مثال با اندازه‌گیری کرنش در یک نقطه، دایره مور کرنش و تعیین کرنش‌های اصلی آشنا خواهیم شد.

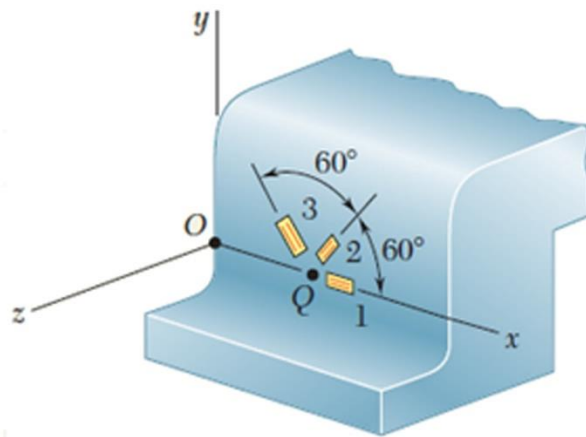
با استفاده از گلبزرگ 60 درجه، کرنش‌های زیر در نقطه  $Q$  روی سطح یک قطعه فولادی اندازه‌گیری شده‌اند:

$$\epsilon_1 = 40 \mu \quad \epsilon_2 = 980 \mu \quad \epsilon_3 = 330 \mu$$

با استفاده از محورهای مختصات داده شده، در نقطه  $Q$  مطلوب‌ست: (الف) مولفه‌های کرنش  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  (ب) کرنش‌های اصلی (ج) ماکزیمم کرنش برشی. فرض کنید  $\nu = 0.29$

Using a  $60^\circ$  rosette, the following strains have been determined at point  $Q$  on the surface of a steel machine base:

$\epsilon_1 = 40 \mu \quad \epsilon_2 = 980 \mu \quad \epsilon_3 = 330 \mu$  Using the coordinate axes shown, determine at point  $Q$ , (a) the strain components  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  (b) the principal strains,



با توجه به محورهای مختصات در شکل، داریم:

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = 60^\circ \quad \theta_3 = 120^\circ$$

با استفاده از روابط مربوط به گلبزرگ کرنش در کلاس درس و مقادیر بالا داریم:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \epsilon_x(1) + \epsilon_y(0) + \gamma_{xy}(0)(1) \\ \epsilon_2 &= \epsilon_x(0.500)^2 + \epsilon_y(0.866)^2 + \gamma_{xy}(0.866)(0.500) \\ \epsilon_3 &= \epsilon_x(-0.500)^2 + \epsilon_y(0.866)^2 + \gamma_{xy}(0.866)(-0.500)\end{aligned}$$

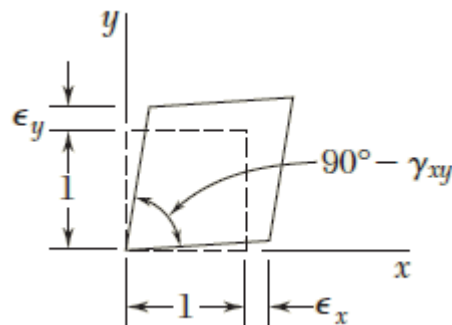
از حل سه معادله بالا، داریم:

$$\epsilon_x = \epsilon_1 \quad \epsilon_y = \frac{1}{3}(2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 - \epsilon_1) \quad \gamma_{xy} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{0.866}$$

با جایگذاری مقادیر داده شده برای کرنش در روابط بالا، نتیجه می شود:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= 40 \mu & \epsilon_y &= \frac{1}{3}[2(980) + 2(330) - 40] & \epsilon_y &= +860 \mu \\ \gamma_{xy} &= (980 - 330)/0.866 & \gamma_{xy} &= 750 \mu\end{aligned}$$

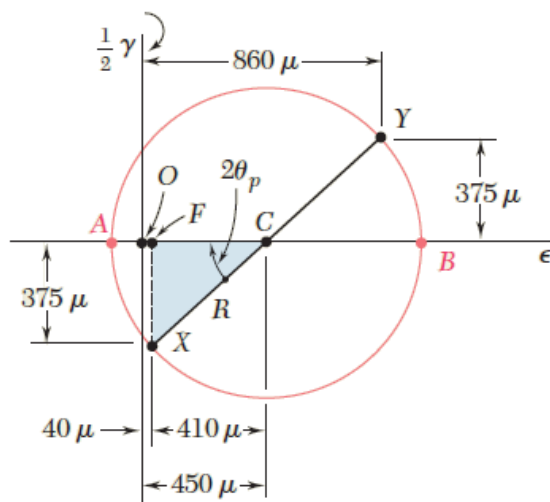
کرنش های مذکور در المانی به صورت زیر نشان داده شده است. دایره مور متناظر با کرنش ها به صورت زیر ترسیم می شود:



$$\epsilon_{ave} = \frac{1}{2}(860 \mu + 40 \mu) = 450 \mu$$

$$R = \sqrt{(375 \mu)^2 + (410 \mu)^2} = 556 \mu$$

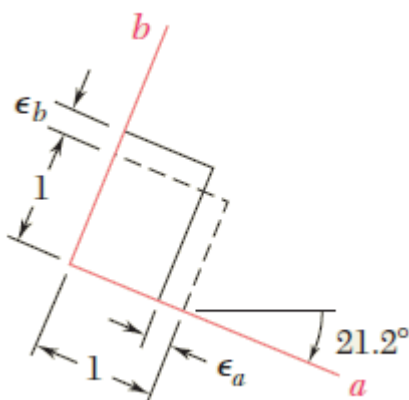
$$\tan 2\theta_p = \frac{375 \mu}{410 \mu} \quad 2\theta_p = 42.4^\circ \downarrow \quad \theta_p = 21.2^\circ \downarrow$$



با استفاده از دایره مور کرنش، مقادیر کرنش های اصلی محاسبه می‌گردد:

$$\epsilon_a = \epsilon_{ave} - R = 450 \mu - 556 \mu \quad \epsilon_a = -106 \mu$$

$$\epsilon_b = \epsilon_{ave} + R = 450 \mu + 556 \mu \quad \epsilon_b = +1006 \mu$$

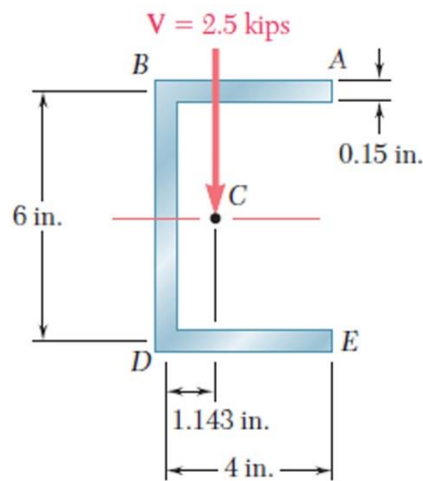


## مثال های حل شده سری ۹

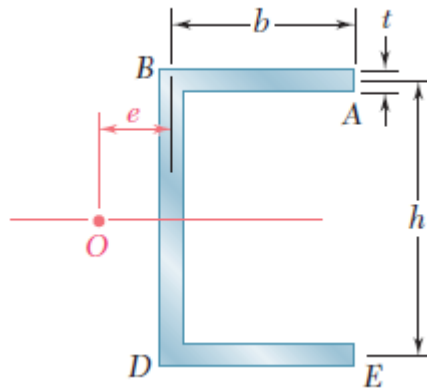
هدف: در این مثال با تعیین تنش برشی ناشی از ترکیب نیروی برش و پیچش آشنا خواهیم شد.

برای ناودانی شکل مقابل و با صرف نظر کردن از تمرکز تنش، ماکزیمم تنش برشی ناشی از برش عمودی  $V$  را که در مرکز سطح ناودانی وارد می شود بیابید. موقعیت مرکز سطح مقطع مشخص شده است.

For the channel in figure, and neglecting stress concentrations, determine the maximum shearing stress caused by a 2.5-kip vertical shear  $V$  applied at the centroid  $C$  of the section, which is located 1.143 in. to the right of the center line of the web  $BD$ .



موقعیت مرکز برش مقطع در کلاس درس تعیین گردید که به صورت زیر می باشد:



$$e = \frac{Fh}{V} = \frac{Vthb^2}{4I} \frac{h}{V} = \frac{th^2b^2}{4I}$$

ممان اینرسی مقطعه به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{web}} + 2I_{\text{flange}} \\ &= \frac{1}{12}th^3 + 2\left[\frac{1}{12}bt^3 + bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] \end{aligned}$$

با صرف نظر کردن از جملات با درجات بالا  $t$  خواهیم داشت:

$$I = \frac{1}{12}th^3 + \frac{1}{2}tbh^2 = \frac{1}{12}th^2(6b + h)$$

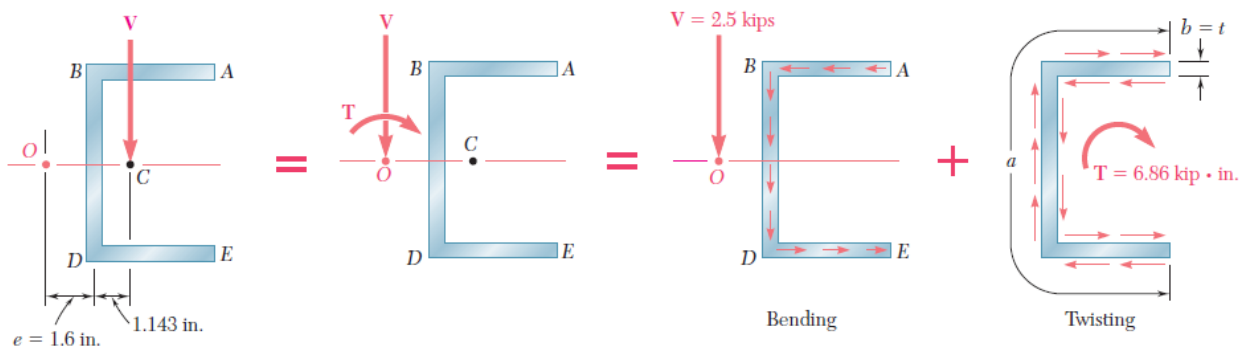
با جایگذاری در رابطه مرکز برش داریم:

$$e = \frac{3b^2}{6b + h} = \frac{b}{2 + \frac{h}{3b}}$$

و در نهایت:

$$e = \frac{4 \text{ in.}}{2 + 0.5} = 1.6 \text{ in.}$$

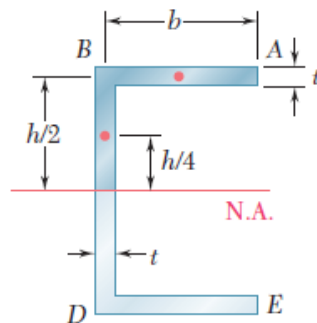
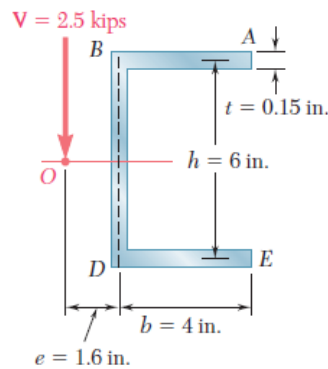
حال نیروی برش را به مرکز برش منتقل کرده و سیستم کوپل-نیروی معادل به صورت زیر تعیین می‌کرد:



$$T = V(OC) = (2.5 \text{ kips})(1.6 \text{ in.} + 1.143 \text{ in.}) \\ = 6.86 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$

حال ماکزیمم تنش برشی تحت بار برش اعمالی در مرکز برش و پیچش را جداگانه تعیین و در نهایت با استفاده از اصل جمع آثار ترکیب می‌کنیم:

تنش برشی حداکثر تحت نیروی برش در مرکز برش





$$Q = bt\left(\frac{1}{2}h\right) + \frac{1}{2}ht\left(\frac{1}{4}h\right) = \frac{1}{8}ht(4b + h)$$

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V\left(\frac{1}{8}ht\right)(4b + h)}{\frac{1}{12}th^2(6b + h)t} = \frac{3V(4b + h)}{2th(6b + h)}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{3(2.5 \text{ kips})(4 \times 4 \text{ in.} + 6 \text{ in.})}{2(0.15 \text{ in.})(6 \text{ in.})(6 \times 4 \text{ in.} + 6 \text{ in.})} \\ &= 3.06 \text{ ksi}\end{aligned}$$

$$(\tau_{\max})_{\text{bending}} = 3.06 \text{ ksi}$$

تنش برشی حداکثر تحت پیچش

$$\begin{aligned}a &= 4 \text{ in.} + 6 \text{ in.} + 4 \text{ in.} = 14 \text{ in.} \\ b &= t = 0.15 \text{ in.} \quad b/a = 0.0107\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{1}{3}(1 - 0.630b/a) = \frac{1}{3}(1 - 0.630 \times 0.0107) = 0.331 \\ (\tau_{\max})_{\text{twisting}} &= \frac{T}{c_1ab^2} = \frac{6.86 \text{ kip} \cdot \text{in.}}{(0.331)(14 \text{ in.})(0.15 \text{ in.})^2} = 65.8 \text{ ksi}\end{aligned}$$

و در نهایت با استفاده از اصل جمع آثار، تنش برشی حداکثر کل به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\tau_{\max} = 3.06 \text{ ksi} + 65.8 \text{ ksi} = 68.9 \text{ ksi}$$



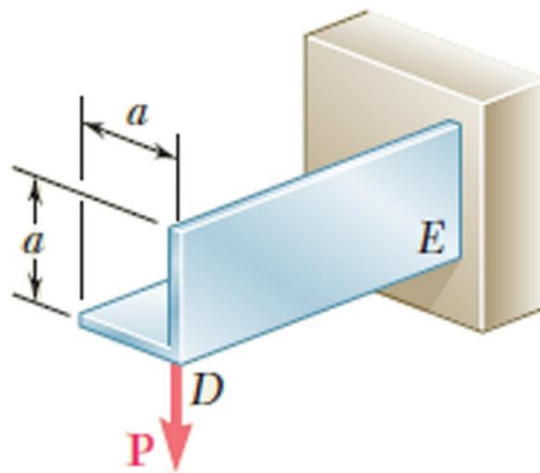
## مثال های حل شده سری ۹

۲

هدف: در این مثال با توزیع تنش برشی ناشی از نیروی برش مایل اعمالی در مرکز برش آشنا خواهیم شد.

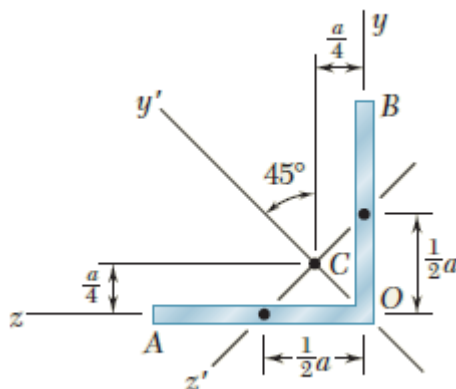
توزیع تنش برشی را در نبشی جدار نازک  $DE$  با ضخامت یکنواخت  $t$  برای بارگذاری داده شده بیابید.

Determine the distribution of shearing stresses in the thin-walled angle shape  $DE$  of uniform thickness  $t$  for the loading shown.

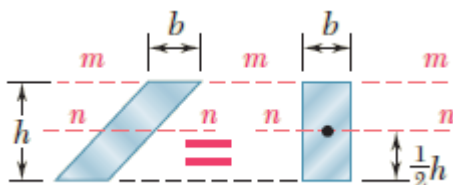


با توجه به آنچه در کلاس درس یاد گرفتیم، مرکز برش مقطع عرضی نبشی جدار نازک در محل تلاقی اجزاء قرار دارد. لذا بار وارده چون در مرکز برش وارد می شود لذا پیچش در مقطع بوجود نمی آید.

با توجه به شکل زیر محور  $y'$  محور تقارن مقطع می باشد، لذا محورهای  $y'$  و  $z'$  (عمود بر محور تقارن)، محورهای اصلی مرکزی مقطع می باشند.



با توجه به آنچه قبلاً یاد گرفتیم ممان اینرسی مقاطع زیر به صورت مقابل محاسبه می گردد:



$$I_{mm} = \frac{1}{3}bh^3$$

$$I_{nn} = \frac{1}{12}bh^3$$

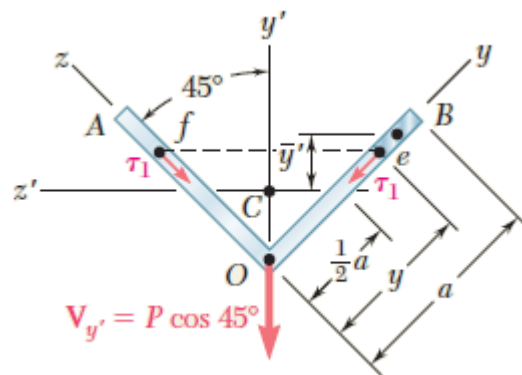
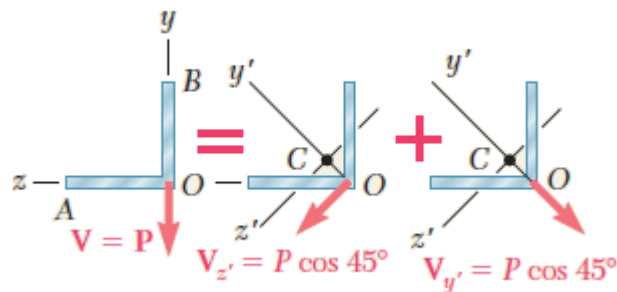
حال با توجه به یادآوری بالا، ممان اینرسی مقطع حول محورهای اصلی به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$I_{y'} = 2 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{t}{\cos 45^\circ} \right) (a \cos 45^\circ)^3 \right] = \frac{1}{3} ta^3$$

$$I_{z'} = 2 \left[ \frac{1}{12} \left( \frac{t}{\cos 45^\circ} \right) (a \cos 45^\circ)^3 \right] = \frac{1}{12} ta^3$$

حال نیروی برش در مقطع را به مولفه‌های موازی با محورهای اصلی تجزیه کرده و تحت هر مولفه با استفاده از رابطه تنش

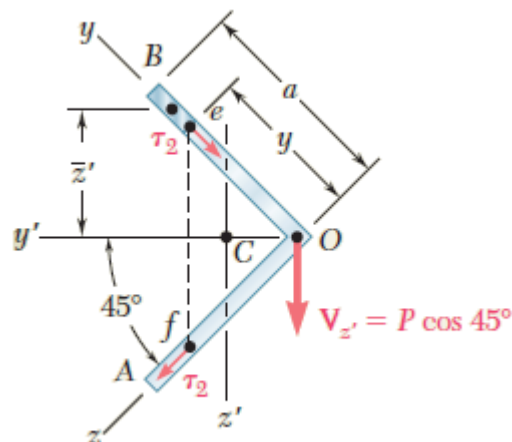
ناشی از نیروی برشی، تنش را محاسبه می‌کنیم



$$\bar{y}' = \frac{1}{2}(a + y) \cos 45^\circ - \frac{1}{2}a \cos 45^\circ = \frac{1}{2}y \cos 45^\circ$$

$$Q = t(a - y)\bar{y}' = \frac{1}{2}t(a - y)y \cos 45^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{V_y' Q}{I_z' t} = \frac{(P \cos 45^\circ) [\frac{1}{2}t(a - y)y \cos 45^\circ]}{(\frac{1}{12}ta^3)t} = \frac{3P(a - y)y}{ta^3}$$



حال با استفاده از اصل جمع آثار، تنش برشی کل به صورت زیر تعیین می‌گردد:

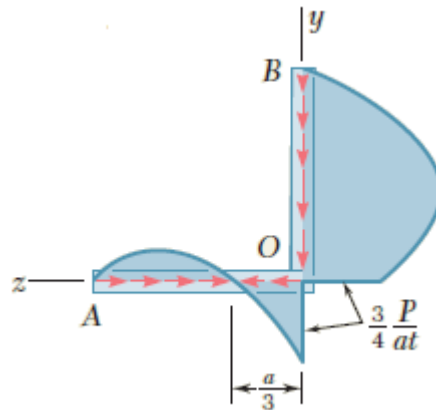
$$\tau_e = \tau_2 + \tau_1 = \frac{3P(a^2 - y^2)}{4ta^3} + \frac{3P(a - y)y}{ta^3} = \frac{3P(a - y)}{4ta^3} [(a + y) + 4y]$$

$$\tau_e = \frac{3P(a - y)(a + 5y)}{4ta^3}$$

$$\tau_f = \tau_2 - \tau_1 = \frac{3P(a^2 - z^2)}{4ta^3} - \frac{3P(a - z)z}{ta^3} = \frac{3P(a - z)}{4ta^3} [(a + z) - 4z]$$

$$\tau_f = \frac{3P(a - z)(a - 3z)}{4ta^3}$$

توزیع تنش برشی کل در مقطع به صورت زیر می‌باشد:



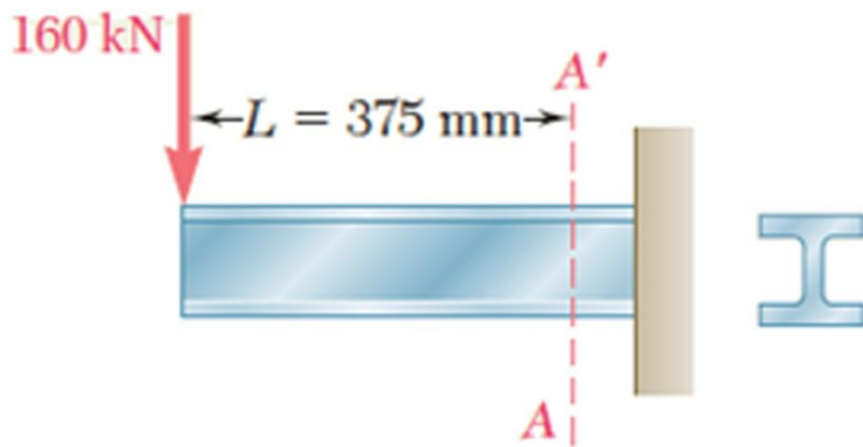
## مثال های حل شده سری ۱۰

۱

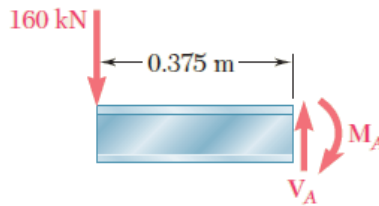
هدف: در این مثال با تعیین تنش حداکثر در طول تیر تحت بارگذاری دلخواه آشنا خواهیم شد.

نیروی متمرکز 160 کیلو نیوتن در انتهای تیر طره نورد شده  $W 200 \times 52$  اعمال می شود. با صرف نظر کردن از تاثیر تمرکز تنش، مقدار حداکثر تنش نرمال در مقطع  $A - A'$  را تعیین کنید.

A 160-kN force is applied as shown at the end of a  $W 200 \times 52$  rolled-steel beam. Neglecting the effect of fillets and of stress concentrations, determine the maximum normal stresses in the beam at section  $A - A'$ .



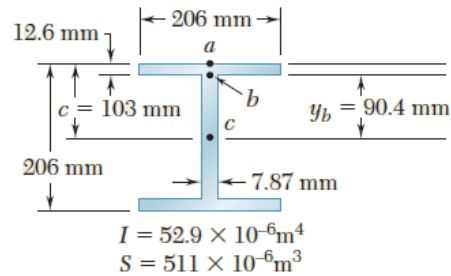
با استفاده از اصول استاتیک، نیروهای داخلی در مقطع  $A - A'$  به صورت زیر تعیین می‌گردد:



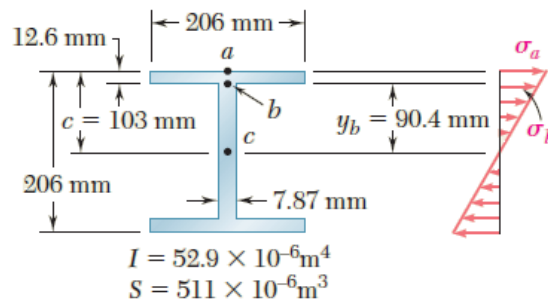
$$M_A = (160 \text{ kN})(0.375 \text{ m}) = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_A = 160 \text{ kN}$$

مشخصات هندسی مقطع با استفاده از جداول مربوط به مقاطع نورد شده (جدول اشتال) به صورت زیر می‌باشد:



### تنش نرمال در مقطع عرضی



تنش نرمال در نقطه  $a$  :

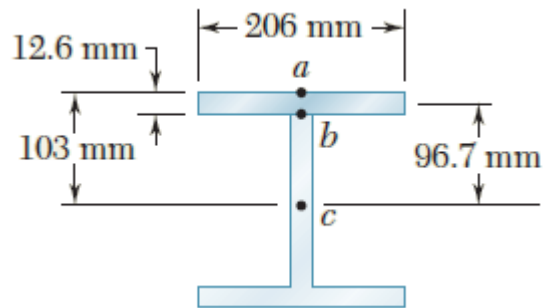
$$\sigma_a = \frac{M_A}{S} = \frac{60 \text{ kN} \cdot \text{m}}{511 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 117.4 \text{ MPa}$$

تنش نرمال در نقطه  $b$  :

$$\sigma_b = \sigma_a \frac{y_b}{c} = (117.4 \text{ MPa}) \frac{90.4 \text{ mm}}{103 \text{ mm}} = 103.0 \text{ MPa}$$

تنش برشی در مقطع عرضی

با توجه به شکل زیر

تنش برشی در نقطه  $a$  :

$$Q = 0 \quad \tau_a = 0$$

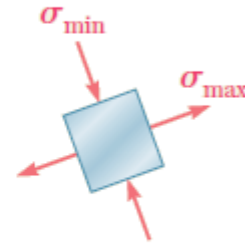
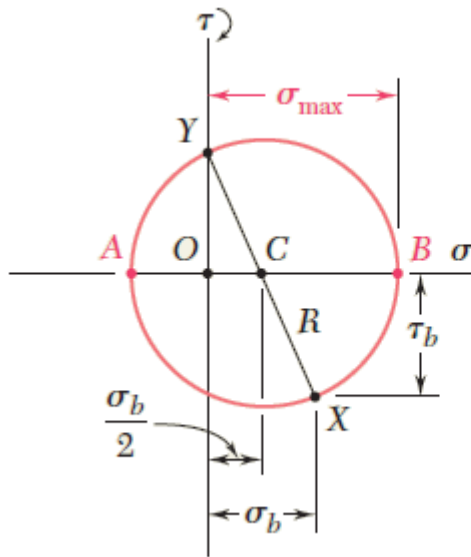
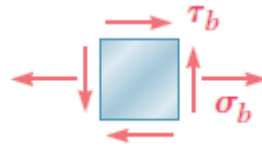
تنش برشی در نقطه  $b$  :

$$Q = (206 \times 12.6)(96.7) = 251.0 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 251.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_b = \frac{V_A Q}{I t} = \frac{(160 \text{ kN})(251.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(52.9 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.00787 \text{ m})} = 96.5 \text{ MPa}$$



حال با توجه به المان تنش به صورت زیر در نقطه  $b$  مقادیر حداکثر تنش نرمال در این نقطه به صورت زیر تعیین می‌گردد:



$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{1}{2} \sigma_b + R = \frac{1}{2} \sigma_b + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \sigma_b\right)^2 + \tau_b^2} \\ &= \frac{103.0}{2} + \sqrt{\left(\frac{103.0}{2}\right)^2 + (96.5)^2} \\ \sigma_{\max} &= 160.9 \text{ MPa} \end{aligned}$$



## مثال های حل شده سری ۱۰

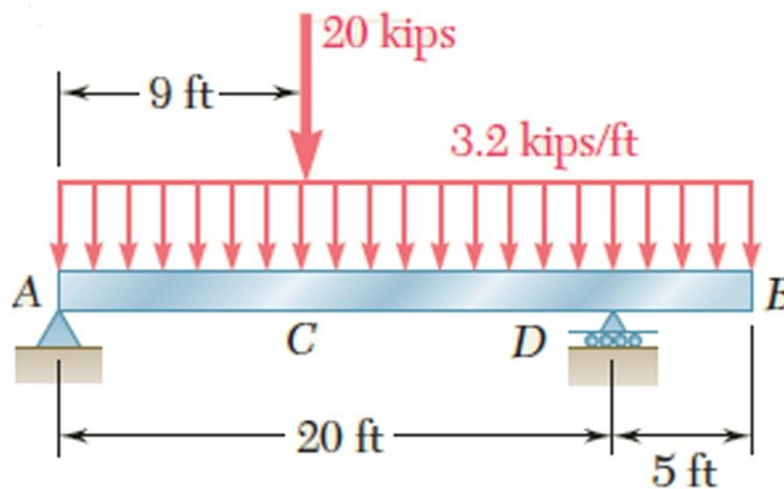
۲

هدف: در این مثال با طراحی تیر تحت بارگذاری دلخواه آشنا خواهیم شد.

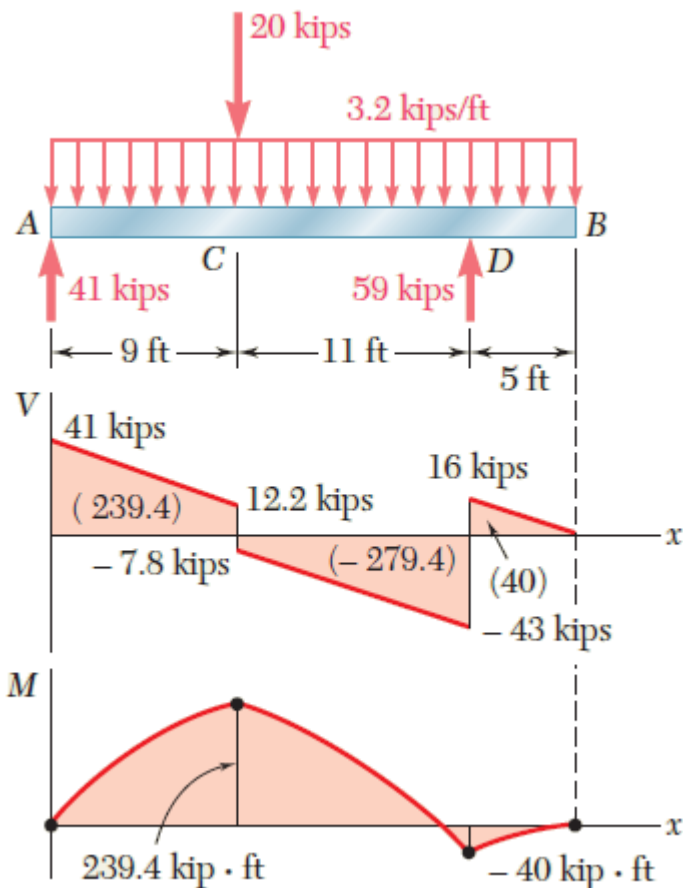
تیری بال پهن  $I$  شکل تحت بارگذاری نشان داده شده، قرار دارد. با فرض مقادیر مجاز تنش به صورت زیر، پروفیل مناسب برای مقطع انتخاب گردد.

$$\tau_{all} = 14.5 \text{ ksi} \text{ و } \sigma_{all} = 24 \text{ ksi}$$

The overhanging beam AB supports a uniformly distributed load of 3.2 kips/ft and a concentrated load of 20 kips at C. Knowing that for the grade of steel to be used  $\sigma_{all} = 24 \text{ ksi}$  and  $\tau_{all} = 14.5 \text{ ksi}$ , select the wide-flange shape that should be used.



با استفاده از اصول استاتیک، دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی در طول تیر به صورت زیر می‌باشد:



با توجه به نمودارهای ترسیم شده مقادیر حداکثر لنگر خمشی و نیروی برشی به صورت زیر می‌باشد:

$$|M|_{\max} = 239.4 \text{ kip} \cdot \text{ft} = 2873 \text{ kip} \cdot \text{in.} \quad |V|_{\max} = 43 \text{ kips}$$

با توجه به حداکثر لنگر خمشی و تنش نرمال مجاز، حداقل مدول (اساس) مقطع موردنیاز برای تحمل لنگر ناشی از بار وارده

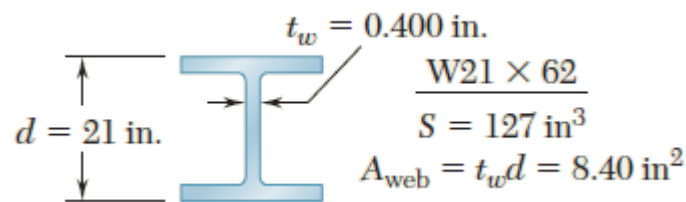
به صورت زیر می‌باشد:

$$S_{\min} = \frac{|M|_{\max}}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{2873 \text{ kip} \cdot \text{in.}}{24 \text{ ksi}} = 119.7 \text{ in}^3$$

حال با استفاده از جداول مربوط به مقاطع نورد شده (جدول اشتال) پروفیل مورد نظر برای مقطع انتخاب می‌گردد. به عنوان نمونه‌ای از این جداول به صورت زیر، داریم:

Shape	$S$ (in <sup>3</sup> )
W24 × 68	154
W21 × 62	127
W18 × 76	146
W16 × 77	134
W14 × 82	123
W12 × 96	131

با توجه به جدول فوق، سبک‌ترین مقطع که شرط مدول (اساس) مقطع را برآورده کند، به عنوان اولین گزینه انتخاب و سایر شرایط بررسی می‌گردد. مقطع انتخابی به صورت زیر می‌باشد:



### تنش برشی در تیر

با توجه به آنچه در کلاس درس یاد گرفتیم، در حالت طراحی چنین مقطعی برای برش به صورت محافظه‌کارانه می‌توان فرض کرد که برش حداکثر به صورت یکنواخت در جان تیر توزیع شده است. لذا داریم:

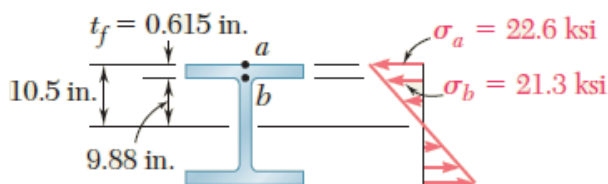
$$\tau_m = \frac{V_{\max}}{A_{\text{web}}} = \frac{43 \text{ kips}}{8.40 \text{ in}^2} = 5.12 \text{ ksi} < 14.5 \text{ ksi} \quad (\text{OK})$$

حال مقادیر تنش‌های نرمال و برشی را در مقطعی از تیر که لنگر خمشی حداکثر می‌باشد، کنترل می‌کنیم:

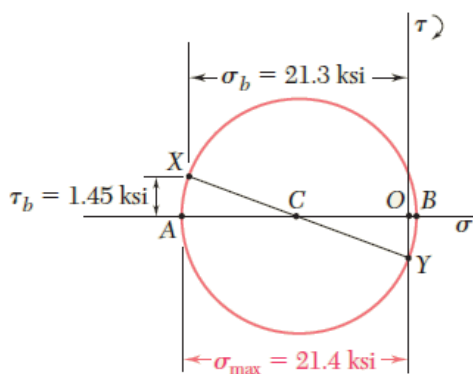
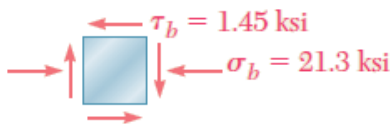
$$\sigma_a = \frac{M_{\max}}{S} = \frac{2873 \text{ kip} \cdot \text{in.}}{127 \text{ in}^3} = 22.6 \text{ ksi}$$

$$\sigma_b = \sigma_a \frac{y_b}{c} = (22.6 \text{ ksi}) \frac{9.88 \text{ in.}}{10.50 \text{ in.}} = 21.3 \text{ ksi}$$

محافظة کارانه  $\tau_b = \frac{V}{A_{\text{web}}} = \frac{12.2 \text{ kips}}{8.40 \text{ in}^2} = 1.45 \text{ ksi}$



با توجه به المان تنش به صورت زیر در نقطه  $b$  و دایره مور متناظر با آن، داریم:



$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_b + R = \frac{21.3 \text{ ksi}}{2} + \sqrt{\left(\frac{21.3 \text{ ksi}}{2}\right)^2 + (1.45 \text{ ksi})^2}$$

$$\sigma_{\max} = 21.4 \text{ ksi} \leq 24 \text{ ksi} \quad (\text{OK})$$

همین بررسی به سادگی در نقطه  $a$  مقطع عرضی نیز قابل انجام است.

## مثال های حل شده سری ۱۰

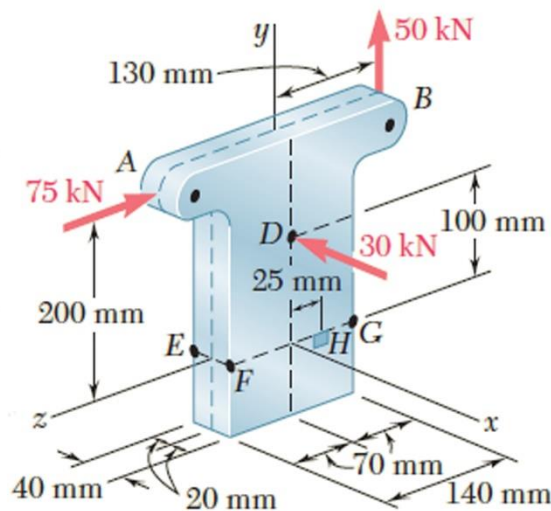
۳

هدف: در این مثال با تعیین مقادیر اصلی تنش تحت بارگذاری کلی (ترکیب بارها و لنگرهای در امتدادهای مختلف) آشنا خواهیم شد.

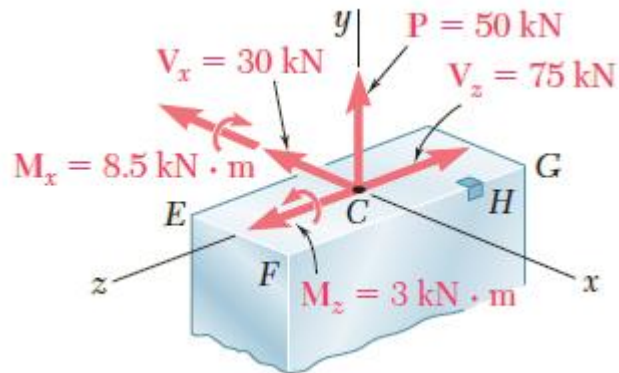
سه نیرو در نقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  مطابق شکل اعمال می شود. با توجه به اینکه مقطع افقی قطعه به صورت مستطیلی با ابعاد  $40 \times 140$  میلیمتر می باشد، تنش های اصلی، امتداد های اصلی و تنش برشی حداکثر را در نقطه  $H$  بدست آورید.

Three forces are applied as shown at points A, B, and D of a short steel post.

Knowing that the horizontal cross section of the post is a  $40 \times 140$  mm rectangle, determine the principal stresses, principal planes and maximum shearing stress at point H.



با بررسی تعادل استاتیکی، سیستم نیرو-کوپل (نیروهای داخلی) در مقطع عرضی شامل نقطه  $H$  را به صورت زیر بدست می آوریم:



$$V_x = -30 \text{ kN} \quad P = 50 \text{ kN} \quad V_z = -75 \text{ kN}$$

$$M_x = (50 \text{ kN})(0.130 \text{ m}) - (75 \text{ kN})(0.200 \text{ m}) = -8.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_y = 0 \quad M_z = (30 \text{ kN})(0.100 \text{ m}) = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

مشخصات هندسی مقطع برای محاسبه تنش‌ها (نرمال و برشی) ناشی از نیروهای داخلی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$A = (0.040 \text{ m})(0.140 \text{ m}) = 5.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

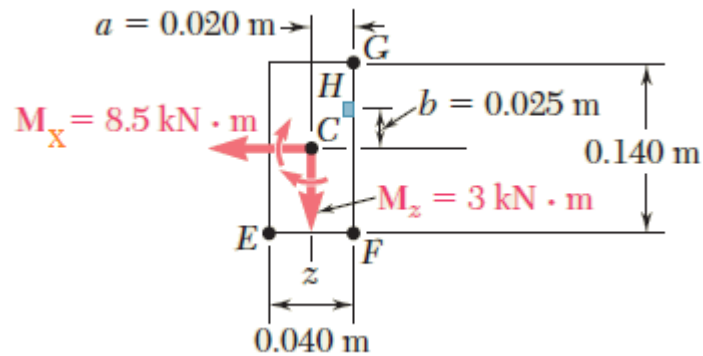
$$I_x = \frac{1}{12}(0.040 \text{ m})(0.140 \text{ m})^3 = 9.15 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}(0.140 \text{ m})(0.040 \text{ m})^3 = 0.747 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

حال مقادیر تنش‌های نرمال و برشی را تحت نیروهای داخلی در نقطه  $H$  تعیین می‌کنیم.

تنش نرمال

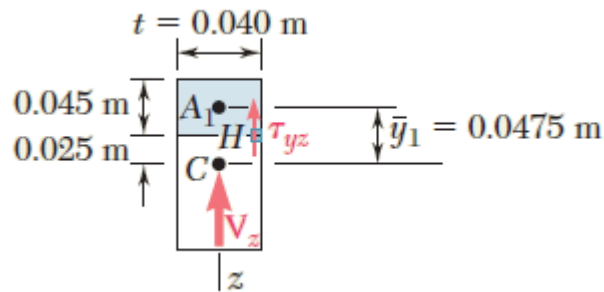
تنش نرمال ناشی از نیروی محوری  $P$  و لنگرهای خمشی  $M_x$  و  $M_z$  می‌باشد.



$$\begin{aligned}\sigma_y &= +\frac{P}{A} + \frac{|M_z|a}{I_z} - \frac{|M_x|b}{I_x} \\ &= \frac{50 \text{ kN}}{5.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{(3 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.020 \text{ m})}{0.747 \times 10^{-6} \text{ m}^4} - \frac{(8.5 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.025 \text{ m})}{9.15 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \\ \sigma_y &= 8.93 \text{ MPa} + 80.3 \text{ MPa} - 23.2 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 66.0 \text{ MPa}\end{aligned}$$

تنش برشی

دقت کنید که نیروی برشی  $V_x$  را اگر بررسی کنیم مقدار  $Q$  در نقطه  $H$  نسبت به محور  $z$  برابر صفر بوده و لذا تحت نیروی برشی  $V_x$ ، تنش برشی برابر صفر می‌باشد. تنش برشی ناشی از نیروی  $V_z$  به صورت زیر تعیین می‌گردد:

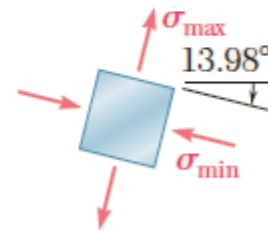
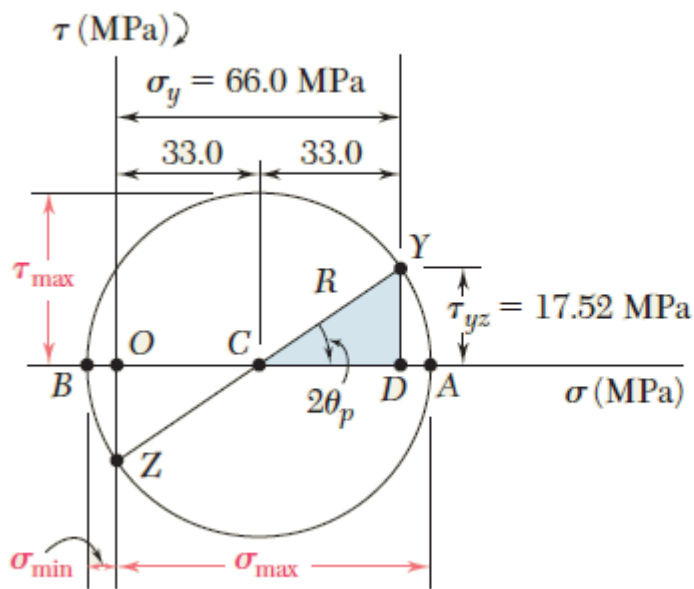
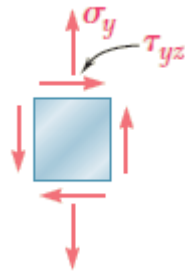


$$Q = A_1 \bar{y}_1 = [(0.040 \text{ m})(0.045 \text{ m})](0.0475 \text{ m}) = 85.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_{yz} = \frac{V_z Q}{I_x t} = \frac{(75 \text{ kN})(85.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(9.15 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.040 \text{ m})} \quad \tau_{yz} = 17.52 \text{ MPa}$$

حال با استفاده از المان تنش در نقطه  $H$  به صورت زیر و استفاده از دایره موهر (مور)، مقادیر تنش‌ها و محورهای اصلی و تنش حداکثر برشی به صورت زیر تعیین می‌گردد:





$$\tan 2\theta_p = \frac{17.52}{33.0} \quad 2\theta_p = 27.96^\circ \quad \theta_p = 13.98^\circ$$

$$R = \sqrt{(33.0)^2 + (17.52)^2} = 37.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max} = OA = OC + R = 33.0 + 37.4$$

$$\sigma_{min} = OB = OC - R = 33.0 - 37.4$$

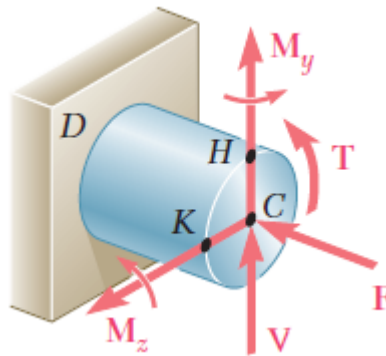
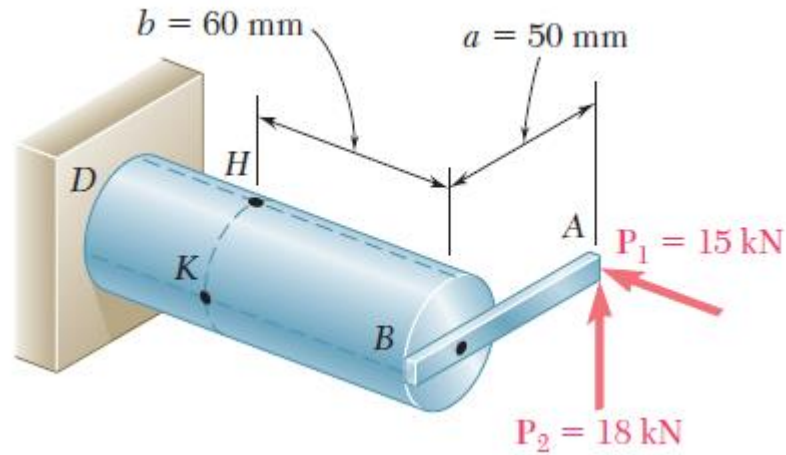
$$\tau_{max} = 37.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max} = 70.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = -7.4 \text{ MPa}$$

به عنوان جمع بندی به موارد ذیل دقت کنید:

### الف: بحث 1



$$F = P_1 = 15 \text{ kN}$$

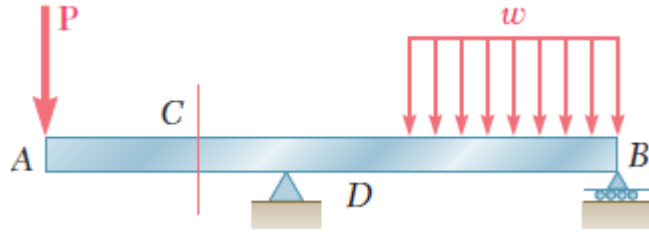
$$V = P_2 = 18 \text{ kN}$$

$$T = P_2 a = (18 \text{ kN})(50 \text{ mm}) = 900 \text{ N} \cdot \text{m}$$

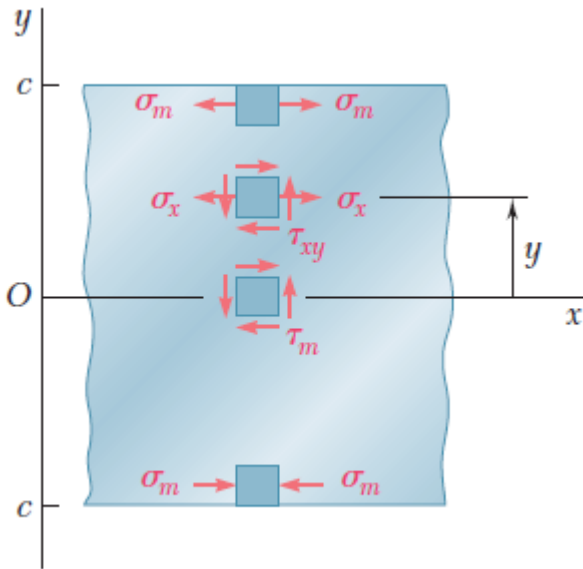
$$M_y = P_1 a = (15 \text{ kN})(50 \text{ mm}) = 750 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = P_2 b = (18 \text{ kN})(60 \text{ mm}) = 1080 \text{ N} \cdot \text{m}$$

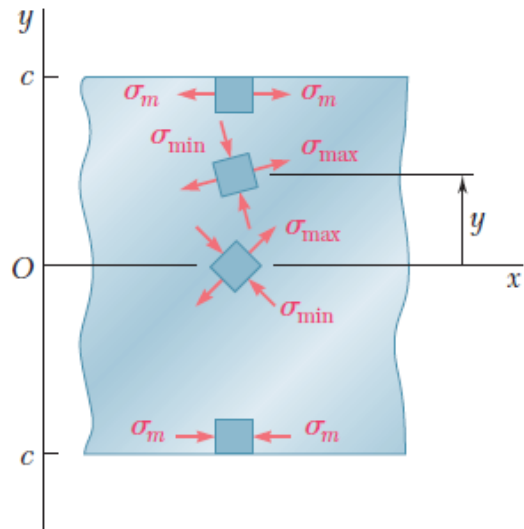
ب: بحث 2



تیر تحت بارگذاری دلخواه



المان تنش در نقاط مختلف مقطع (عرضی)



تنش‌های اصلی